

Proprietà Per ogni $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $r, s \in \mathbb{Q}$ risulta:

1) $a^{r+s} = a^r \cdot a^s$;

2) $(ab)^r = a^r \cdot b^r$;

3) $(a^r)^s = a^{rs}$;

4) $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$;

5) $a^r > 0$, $a^0 = 1$, $1^r = 1$;

6) $\begin{cases} a^r > 1 & \text{se } a > 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } a < 1 \text{ e } r < 0 \\ a^r < 1 & \text{se } a < 1 \text{ e } r > 0, \text{ oppure se } a > 1 \text{ e } r < 0; \end{cases}$

Attenzione, anche quando i numeri hanno senso, queste proprietà non valgono se le basi sono < 0

$$(X^2)^{1/2} = \begin{cases} X & \text{se } X \geq 0 \\ -X & \text{se } X < 0 \end{cases}$$

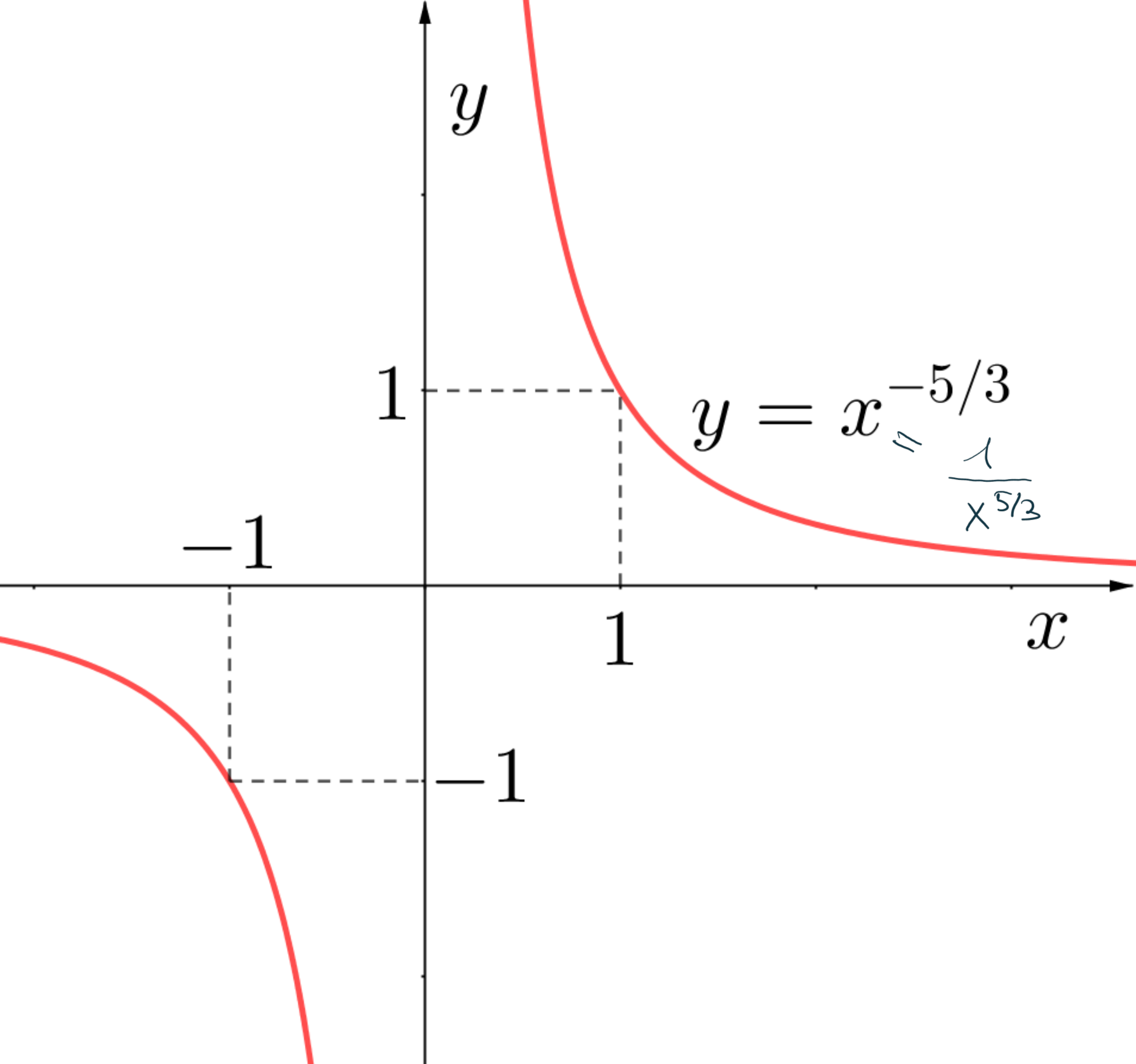
$$\sqrt{X^2} = |X|$$

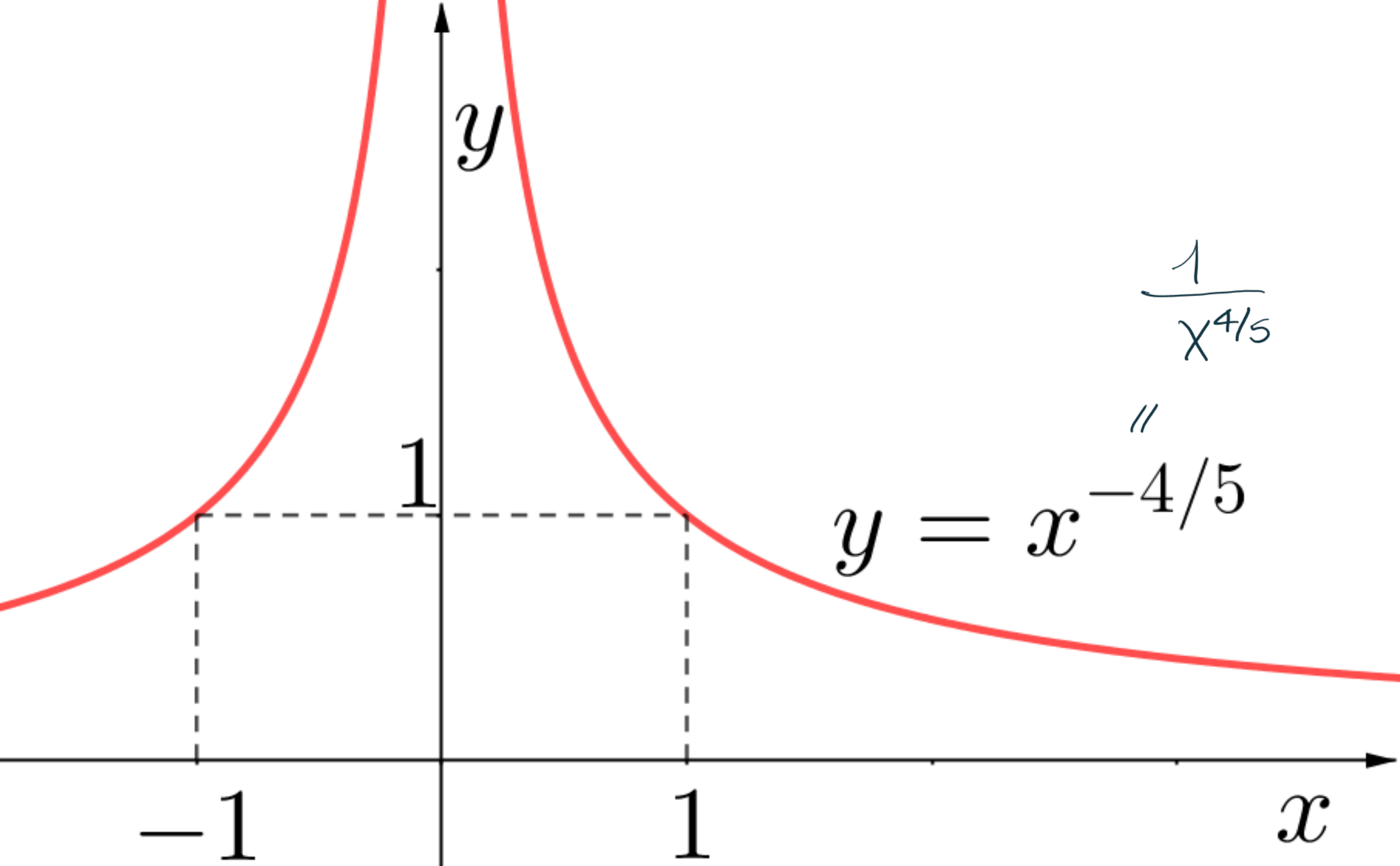
$$7) \quad r < s \Rightarrow \begin{cases} a^r < a^s & \text{se } a > 1 \\ a^r > a^s & \text{se } a < 1; \end{cases}$$

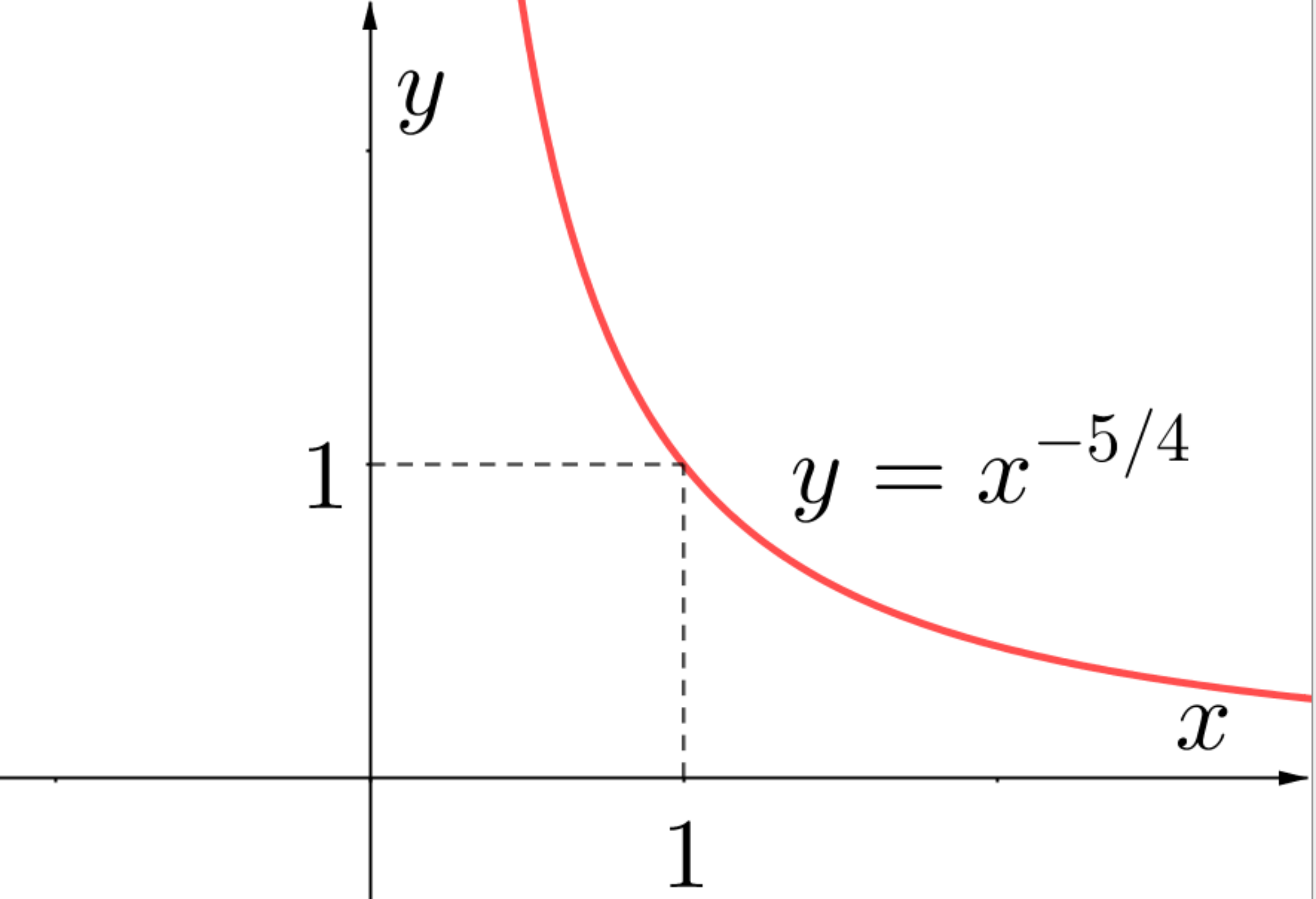
$$8) \quad 0 < a \leq b \Rightarrow \begin{cases} a^r \leq b^r & \text{se } r > 0 \\ a^r \geq b^r & \text{se } r < 0 \end{cases}$$

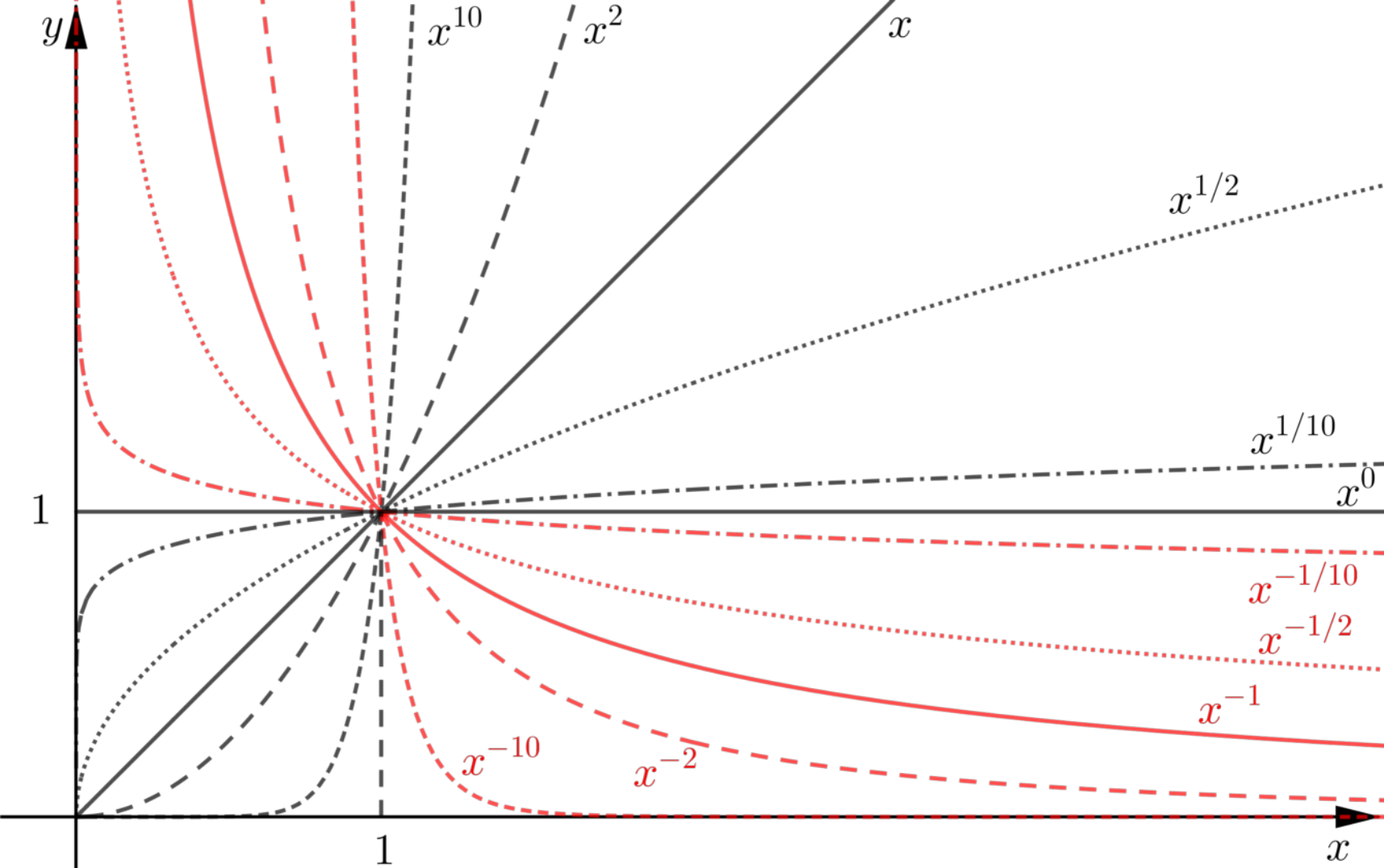
$$9) \quad \forall a \neq 1: \quad a^r = a^s \Rightarrow r = s$$

(la 9) è una facile conseguenza della 7)).









OSS 1 su f^{-1}

Sia $f: X \rightarrow Y$ biettiva ($\exists f^{-1}: Y \rightarrow X$)

Allora f^{-1} è biettiva, e $(f^{-1})^{-1} = f$.

OSS 2 $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ $f: X \rightarrow Y$ strett. crescente
" ~~decrecente~~

$\Rightarrow f$ iniettiva, ed eventualmente restringendo Y possiamo supporre biettiva. $\Rightarrow \exists f^{-1}: Y \rightarrow X$.

Allora f^{-1} è strett. crescente
" ~~decrecente~~

Supponiamo f strett. crescente $\Rightarrow$ voglio provare f^{-1} strett. crescente

$$\begin{array}{l} y_1, y_2 \in Y \\ y_1 < y_2 \end{array} \Rightarrow f^{-1}(y_1) \stackrel{?}{<} f^{-1}(y_2)$$

Per assurdo, supponiamo $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$
~~X~~ ~~X~~

$\Rightarrow$ applico f (crescente)

$$\begin{array}{ccc} f(f^{-1}(y_1)) & \geq & f(f^{-1}(y_2)) \\ \text{"} & & \text{"} \\ y_1 & & y_2 \end{array}$$

Potenze con esponente razionale, m, n primi tra loro

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$$

Attenzione:

$$\begin{array}{ll} \sqrt[3]{x^3} = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \sqrt{x^2} = |x| & \forall x \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\sqrt[4]{x^4} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1$$

Potenze con esponenti irrazionali.

$$2^\pi$$

$$2^{\sqrt{2}}$$

$$2^e$$

$$\pi = 3,1415926 \dots$$

$$2^3 = 8$$

$$2^{3,1} = 2^{\frac{31}{10}}$$

$$2^{3,14} = 2^{\frac{314}{100}}$$

$$2^{3,141}$$

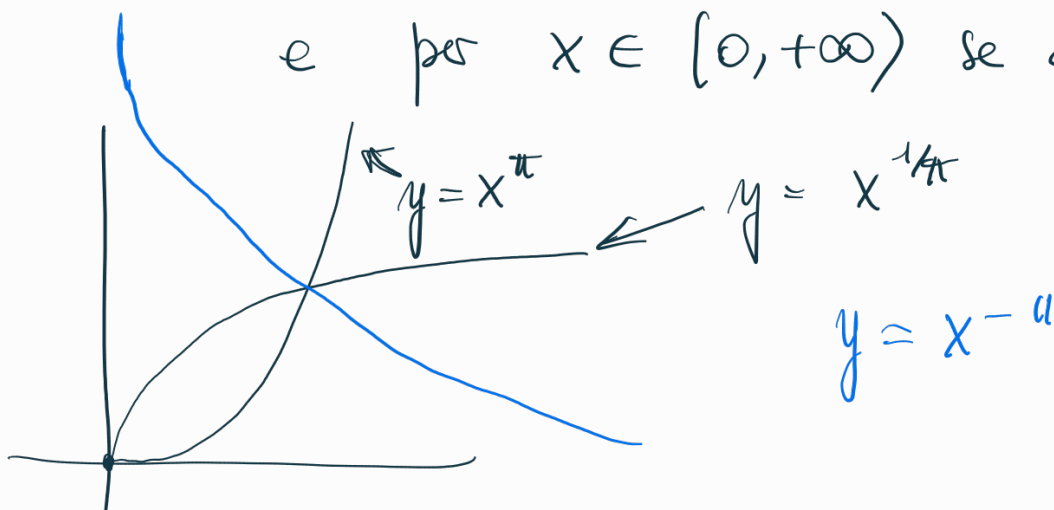
Definisco $2^\pi =$ limite di questa successione

Questo si può fare se la base è positiva

Quindi $f(x) = x^a$, con a reale generico,

è definita solo per $x \in (0, +\infty)$

e per $x \in [0, +\infty)$ se $a \geq 0$



OSS Non c'è modo di definire (in modo ragionevole) a^b , dove $a < 0$, b è irrazionale

Continuano a valere per esponenti irrazionali le proprietà delle potenze viste prima.

Studio di disequazioni irrazionali: esempio di uso in analisi
Studiare

$$f(x) = 3\sqrt{|x^2-4|} - x = \begin{cases} 3\sqrt{x^2-4} - x & x \leq -2 \vee x > 2 \\ 3\sqrt{4-x^2} - x & -2 < x < 2 \end{cases}$$

Calcolo $f'(x)$

per $-2 < x < 2$ $f'(x) = -\frac{3x}{\sqrt{4-x^2}} - 1 = -\frac{3x + \sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}}$

studiare il segno di $f'(x)$ porta a disequazioni con le radici.

Equazioni e disequazioni irrazionali

Se compaiono radici di ordine dispari, è tutto facile

$$\sqrt[3]{x^3-5} > x-1 \iff x^3-5 > (x-1)^3 \iff$$

$f(t) = t^3$
strett. crescente

$$\cancel{x^3-5} > \cancel{x^3} - 3x^2 + 3x - 1 \iff$$

$$3x^2 - 3x - 4 > 0 \iff \left(x < \frac{3-\sqrt{57}}{6}\right) \vee \left(x > \frac{3+\sqrt{57}}{6}\right)$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+48}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{6}$$

Cosa succede se compaiono radici di ordine pari

$$\sqrt[n]{P(x)} \geq Q(x) \quad \text{dove } Q(x), P(x) \text{ sono, per es. polinomi.}$$

u pari!

Due difficoltà:

1) $\sqrt[n]{t}$ è definita solo per $t \geq 0$.

2) t^n (con n pari) non è strett. monotona

$$\sqrt{x^2 + 4} = 2x \Rightarrow \cancel{x^2 + 4} = 4x^2$$

0

sempre ricordarsi la C.E.

1^a strategia. Elevo al quadrato l'eq^{ue}, potrei aver aggiunto soluzioni
alle fine le ricontrollo

$$3x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Le testo nell'eq^{ue} originale $\Rightarrow$

$x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ è soluzione

~~$x = -\frac{2}{\sqrt{3}}$~~ non è soluz.