

DEF Data una successione $\{a_n\}$, si dice sottosuccessione di $\{a_n\}$ una successione della forma $b_n = a_{k_n}$, dove $\{k_n\}$ è una successione strettamente crescente di interi naturali.

PROP Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}^*$, allora ogni sottosuccessione di $\{a_n\}$ tende ancora a l .

Se esiste una sottosuccessione a_{k_n} t.c. $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k_n} = l$, cosa posso dire del limite dell'intera succ^{ne} $\{a_n\}$?
Non possiamo dire che esiste, ma esiste vale l .

PROP Supponiamo che ci siano due sottosuccⁿⁱ di $\{a_n\}$, indicate con $\{a_{k_n}\}$ $\{a_{h_n}\}$ (dove h_n e k_n sono succⁿⁱ strett. crescenti di naturali t.c. $\{k_n\} \cup \{h_n\} = \mathbb{N}$)
per es. $k_n = 2n$, $h_n = 2n+1$.

e supponiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{h_n} = l \in \mathbb{R}^*$.

Allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$

Esempio

$\lim_{n \rightarrow +\infty}$

$$\frac{n^2 - (-1)^n n}{3n^2 + (-1)^n (n+7)}$$

a_n

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n^2 - 2n}{12n^2 + (2n+7)} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)^2 + 2n+1}{3(2n+1)^2 - (2n+1+7)} = \frac{1}{3} \quad (2)$$

da (1) e (2) segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{3}$

OSS Una successione convergente è limitata.

Il viceversa è falso ($(-1)^n$ è limitata ma non converge)

Possono però dimostrare che il viceversa è vero "pur di estrarre una sottosuccessione".

TEOREMA (Bolzano-Weierstrass)

Sia $\{a_n\}$ una successione limitata. Allora esiste una sottosucc^{ne} convergente.

Esempio banale $a_n = (-1)^n$ è limitata

Le due sottosuccⁿⁱ $a_{2n} \equiv 1$ e $a_{2n+1} \equiv -1$ sono convergenti

Esempio meno banale

La succ^{ne} $a_n = \sin n$ è limitata.

BW $\Rightarrow$ esiste una sottosucc^{ne} convergente.

La dim. del teor. di Bolzano-Weierstrass usa una proposizione abbastanza sorprendente.

PROP Sia $\{a_n\}$ una qualsiasi successione di numeri reali. Allora essa ammette sempre una sottosucc^{ne} monotona (crescente oppure decrescente)

Dim. di B-W dando per buona la prop.

Sia $\{a_n\}$ limitata. Per la prop. esiste una sottosucc^{he}
 $\{a_{k_n}\}$ crescente o decrescente.

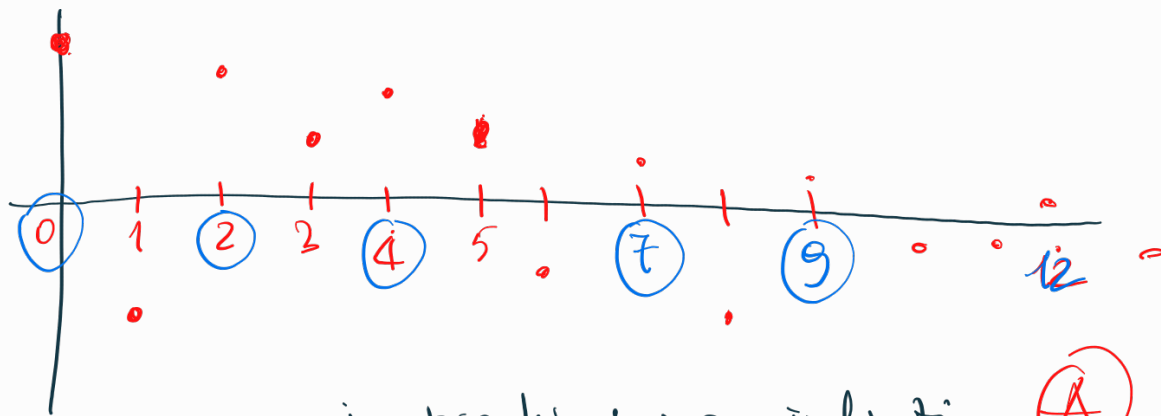
Ma $\{a_{k_n}\}$ è anche limitata (perché estratta da $\{a_n\}$ limitata)

(Teorema: se $\{a_{k_n}\}$ è monotona e limitata, è
anche convergente $\Rightarrow$ QED $\square$)

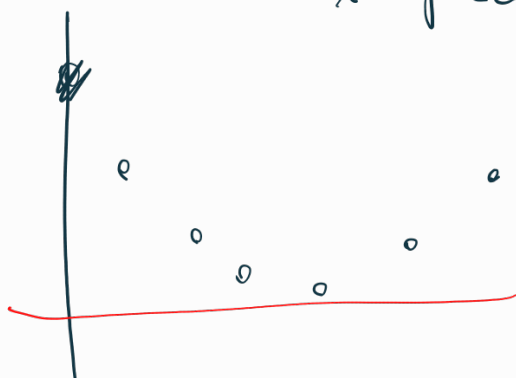
Dim prop Sia $\{a_n\}$ una successione di reali.

Diremo che $m_0 \in \mathbb{N}$ è un "picco" per $\{a_n\}$ se

$$a_{m_0} \geq a_n \quad \forall n \geq m_0$$



2 possibilità $\left\{ \begin{array}{l} \text{i picchi sono infiniti} \quad \textcircled{A} \\ \text{i picchi sono in numero finito o nullo} \quad \textcircled{B} \end{array} \right.$



caso (A) ci sono infiniti picchi

Prendo la sottosuccessione $\{a_{k_n}\}$ t.c. k_n sono tutti i picchi in ordine crescente

Questa sottosucc^{te} è monotona decrescente, infatti

a_{k_n} (essendo k_n un picco) maggiore tutti i termini successivi, quindi anche $a_{k_{n+1}}$

caso (B) i picchi sono in numero finito.

$\Rightarrow$ Posso trovare un k_0 strettamente più grande di tutti i picchi.

k_0 non è un picco $\Rightarrow \exists k_1 > k_0$ t.c.

$$a_{k_0} < a_{k_1}$$

k_1 non è un picco $\Rightarrow \exists k_2 > k_1$ t.c. $a_{k_1} < a_{k_2}$

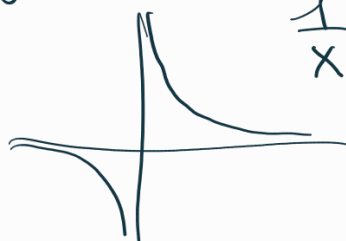
$\Rightarrow$ in questo modo costruisco una sottosucc^{te} $\{a_{k_n}\}$ strettamente crescente

□

Limiti di funzioni.

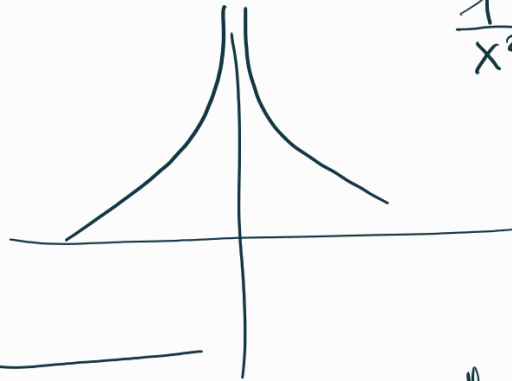
L'obiettivo è quello di dare un significato a espressioni del tipo

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ che significa "quando x va verso $+\infty$, $\frac{1}{x}$ si avvicina a 0"



$\lim_{x \rightarrow 5} (3x^2 + x) = 80$, "quando x si avvicina a 5,
 $3x^2 + x$ si avvicina a 80"

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ "quando x si avvicina a zero,
 $\frac{1}{x^2}$ va verso $+\infty$ "



$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$ "Quando x va verso $-\infty$,
 $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ si avvicina a 1".

La prima cosa da fare per definire $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

è capire che può essere x_0 .

Questo è legato al dominio di f .

$$f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Per es. se $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$

non ha senso considerare il limite

per $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 2$, $x \rightarrow -3$

mentre ha senso considerare $x \rightarrow 0$, $x \rightarrow 1$, $x \rightarrow \frac{3}{4}$

per es $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
è definita
in $(0, 1)$

DEF Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Diremo che x_0 è un punto di accumulazione di X
se ogni intorno di x_0 contiene infiniti punti di X .
Un punto $x_0 \in X$ che non è pto di accumulazione di X
si dice punto isolato di X .

Esempi $X = (0, 1)$



2 non è pto di accum per X perché l'intorno $(1, 3)$ di 2 non contiene pti di X .

0 è un punto di accum di X perché ogni intorno di 0 contiene infiniti pti di X .

$\frac{1}{2}$ è un punto di accum. di X .

1 è pto di accum.

$\frac{3}{2}$ non lo è, $-\infty$ non lo è.

$\{\text{punti di accum di } (0, 1)\} = [0, 1]$

Se $X = [0, 1]$, i suoi pti di accum sono tutti e soli gli elementi di X .

Se $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
i suoi pti di accum. sono tutti gli elementi di $\mathbb{R}^*$

Se $X = \{1, 2, 5, 8\}$ esso non ha pti di accum.
 $\Rightarrow X$ è fatto da punti isolati.

se $X = \mathbb{N}$, solo $x_0 = +\infty$ è pto di accum.



Tutti gli elementi di $\mathbb{N}$ sono punti isolati di $\mathbb{N}$.

Per questo se ho una funzione definita su $\mathbb{N}$ (successione)
posso fare solo il limite per $x \rightarrow +\infty$

Proprietà vere def^{te}

Siano $X \subseteq \mathbb{R}$, $P(x)$ un enunciato dipendente da $x \in X$.

Diremo che $P(x)$ è vera definitivamente per $x \rightarrow x_0$ se:

1) $x_0 \in \mathbb{R}^*$ è pto di accum. di X ;

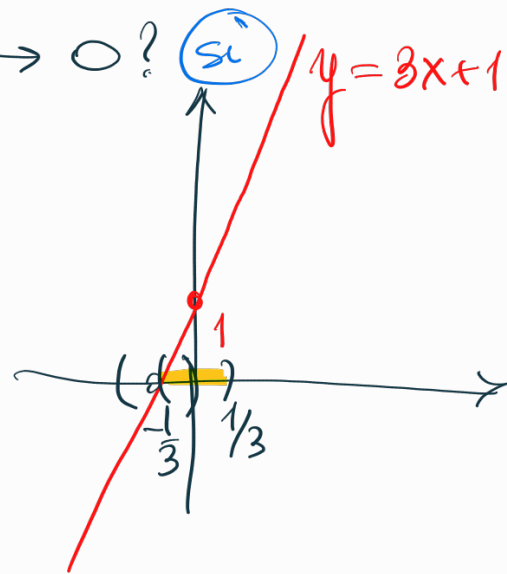
2) $\exists$ intorno U di x_0 t.c. $P(x)$ è vera
 $\forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$

Esempi X non lo specifichero, sarà l'insieme su cui ha senso considerare $P(x)$.

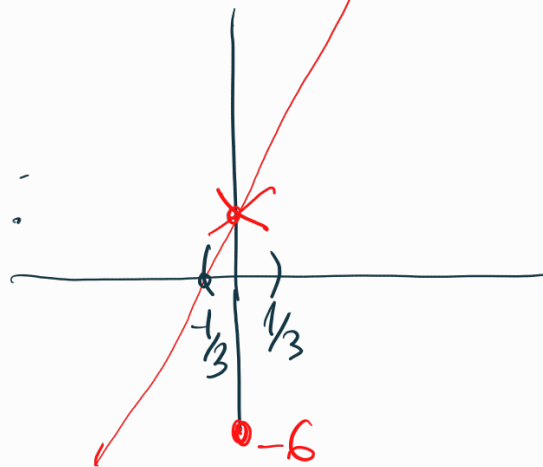
1) $P(x)$
 $3x+1 > 0$ def^{te} per $x \rightarrow 0$? si
(qui $X = \mathbb{R}$).

Prendo $U = B_{1/3}(0) = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$P(x)$ è vera, cioè $3x+1 > 0$ è vera
 $\forall x \in U \setminus \{0\} = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \setminus \{0\}$



Oss 2) se considerassi $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{se } x \neq 0 \\ -6 & \text{se } x = 0 \end{cases}$
 $f(x) > 0$ è def^{te} vera per $x \rightarrow 0$

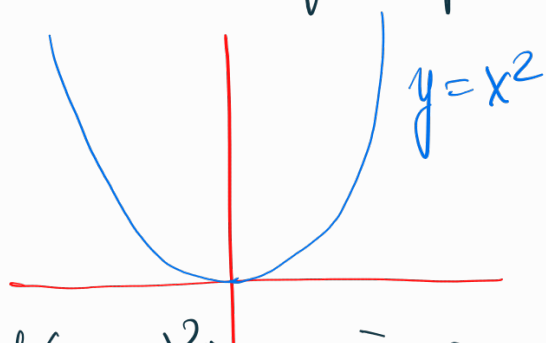


3) $3x+1 > 0$ def^{te} per $x \rightarrow -\frac{1}{3}$?
 $P(x)$

No, perché non esiste un intorno di $-\frac{1}{3}$, cioè della forma $(-\frac{1}{3}-r, -\frac{1}{3}+r)$ in cui $3x+1 > 0$

Infatti $P(x)$ è falsa in tutto il sotto intervallo $(-\frac{1}{3}-r, -\frac{1}{3})$

4) $x^2 > 0$ def^{te} per $x \rightarrow 0$?



sì, perché $x^2 > 0$ è vera in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi posso prendere per es. $U = (-1, 1)$

$P(x)$ è vera $\forall x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$

5) $x^2 > 1000$ def^{te} per $x \rightarrow -\infty$? (sì)

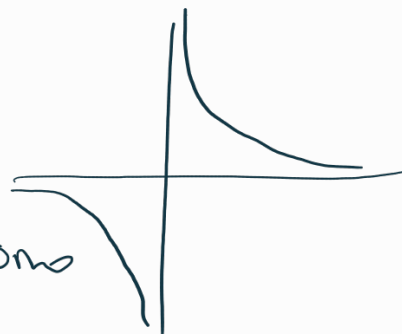
$$x^2 > 1000 \Leftrightarrow x < -10\sqrt{10} \vee x > 10\sqrt{10}$$

sì, posso prendere $U = (-\infty, -10\sqrt{10})$ e

$x^2 > 1000$ è vera $\forall x \in U$

6) $\frac{1}{x} > 0$ def^{te} per $x \rightarrow 0$?

No, perché presso un qualsiasi intorno



$U = (-r, r)$ con $r > 0$ la diseq^{ne} è
falsa in $(-r, 0)$

oss Se $X = \mathbb{N}$ la def^{ne} di def^{te} (per $n \rightarrow +\infty$)
coincide con quella già nota.

$P(n)$ vera def^{te} $\Leftrightarrow \exists K$ t.c. $P(n)$ è vera
 $\forall n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > K$.

Def Limite di funzione.

Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, sia $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pto di accum. di X .

Sia $l \in \mathbb{R}^*$.

Diremo che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

(oppure che $f(x) \rightarrow l$ per $x \rightarrow x_0$)

se $\forall U$ intorno di l si ha $f(x) \in U$ def^{te} per $x \rightarrow x_0$,
cioè

$\forall U$ intorno di l $\exists U$ intorno di x_0 t.c.

$$f(x) \in U \quad \forall x \in U \cap X \setminus \{x_0\}$$

Ci sono 9 casi $x_0 \in \mathbb{R}, x_0 = \pm\infty$
 $l \in \mathbb{R}, l = \pm\infty$.

1° caso $x_0 \in \mathbb{R}, l \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ significa:

Gli intorno di l sono del tipo $(l - \varepsilon, l + \varepsilon) = U$

x_0 deve essere pto di accum.
di dom f
X

" " di x_0 " " " " $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \mathcal{U}$
 $\varepsilon, \delta > 0$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ significa

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \text{ t.c. } \underbrace{|f(x) - l|}_{f(x) \in \mathcal{U}} < \varepsilon$$

$$\forall x \in X \text{ verificante } 0 < \underbrace{|x - x_0|}_{x \neq x_0} < \underbrace{\delta}_{x \in \mathcal{U}}$$

Esempio:

$$X = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad l = 0, \quad x_0 = 0$$

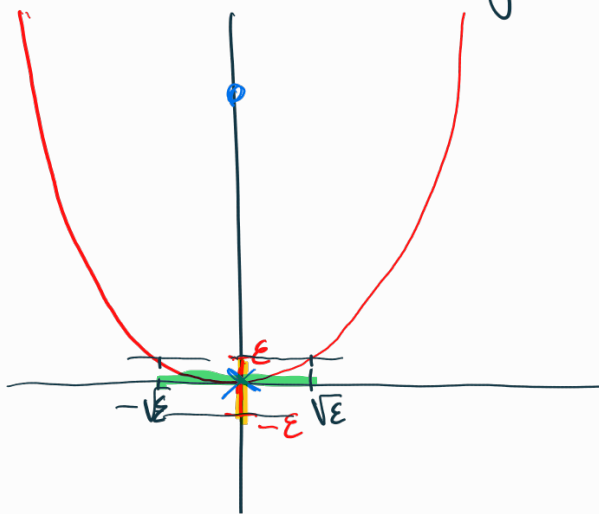
Verifica

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ cerco } \delta > 0 \text{ t.c. } |x^2 - 0| < \varepsilon$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ verificante } 0 < \underbrace{|x - 0|}_{|x| < \delta} < \delta$$

$$|x^2 - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow x^2 < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \sqrt{\varepsilon}$$

basta scegliere $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$



Se considero $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

resta vero che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$,

perché nella def^{ne} di limite non conta $f(x_0)$

OSS si capisce che se ho verificato il limite per un certo ϵ_0 , esso risulta verificato anche $\forall \epsilon > \epsilon_0$, con la stessa scelta di δ corrispondente ad ϵ_0 .

Quindi nella verifica posso sempre imporre

$0 < \epsilon \leq \epsilon_0$, con $\epsilon_0 > 0$ a nostra scelta

In altre parole, basta verificare la def^{ne}

"per ϵ piccolo".