

Sia $f: X \rightarrow Y$ biettiva = suriettiva + iniettiva

$$\forall y \in Y \exists! x \in X \text{ t.c. } f(x) = y$$

In questo modo resta definita una funzione da Y in X .
Questa è la **funzione inversa** f^{-1} di f

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$
$$y \mapsto \text{l'unico } x \in X \text{ t.c. } f(x) = y$$
$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y.$$

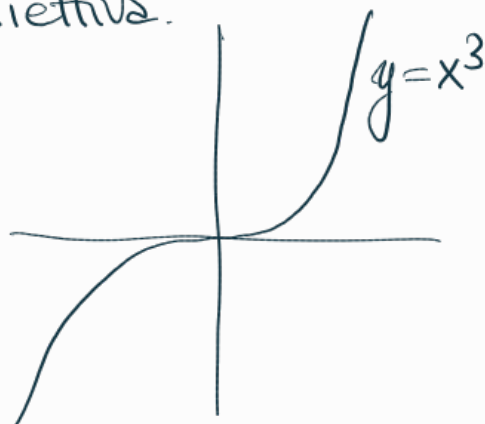
Per esempio se $f(x) = 2x+3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Fissato $y \in \mathbb{R}$ cerco x t.c. $f(x) = y \iff 2x+3 = y$

$$x = \frac{y-3}{2}$$

$$f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$y \mapsto f^{-1}(y) = \frac{y-3}{2}$$

$f(x) = x^3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ biettiva.
iniettiva perché strettamente crescente
suriettiva perché continua in $\mathbb{R}$
teorema $\Rightarrow$ assume tutti i valori tra $\inf f$
e $\sup f \Rightarrow$ tutti i valori reali.



$$\Rightarrow f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \text{l'unico } x \text{ t.c. } f(x) = y$$

$$x^3 = y$$

$$x = \sqrt[3]{y} = y^{1/3}$$

Grafico di f^{-1} :

Cos'è il grafico di una funzione?

$f: X \rightarrow Y$ X, Y insiemi qualsiasi.

$X \times Y =$ prodotto cartesiano di X e $Y =$
 $= \{ \text{coppie ordinate } (x, y) \text{ t.c. } x \in X, y \in Y \}.$

$$X = \{1, 2, 4\} \quad , \quad Y = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$\Rightarrow X \times Y = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (1, 7),$$

$$(2, 1), (2, 3), (2, 5), (2, 7)$$

$$(4, 1), (4, 3), (4, 5), (4, 7)\}$$

Grafico di f Se $f: X \rightarrow Y$.

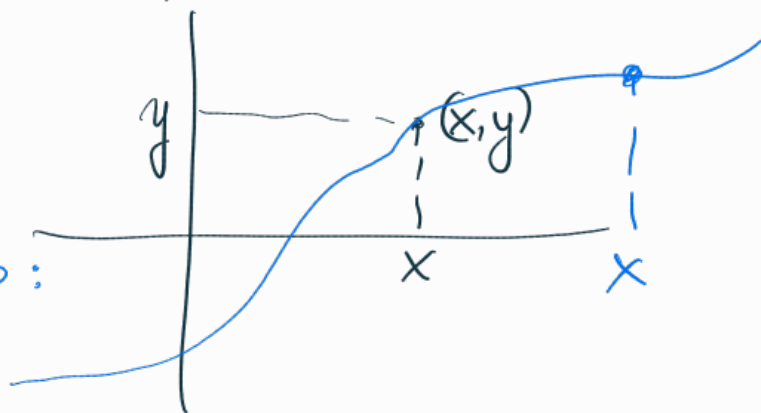
$$\text{graf } f = \{(x, y) \in X \times Y \text{ t.c. } y = f(x)\} =$$

$$= \{ (x, f(x)) \text{ , } x \in X \}$$

Se X e Y sono sottoinsiemi dei reali

il prodotto $X \times Y$ si può rappresentare come i punti del piano,

quindi in questo caso il grafico di f diventa il tradizionale disegno:



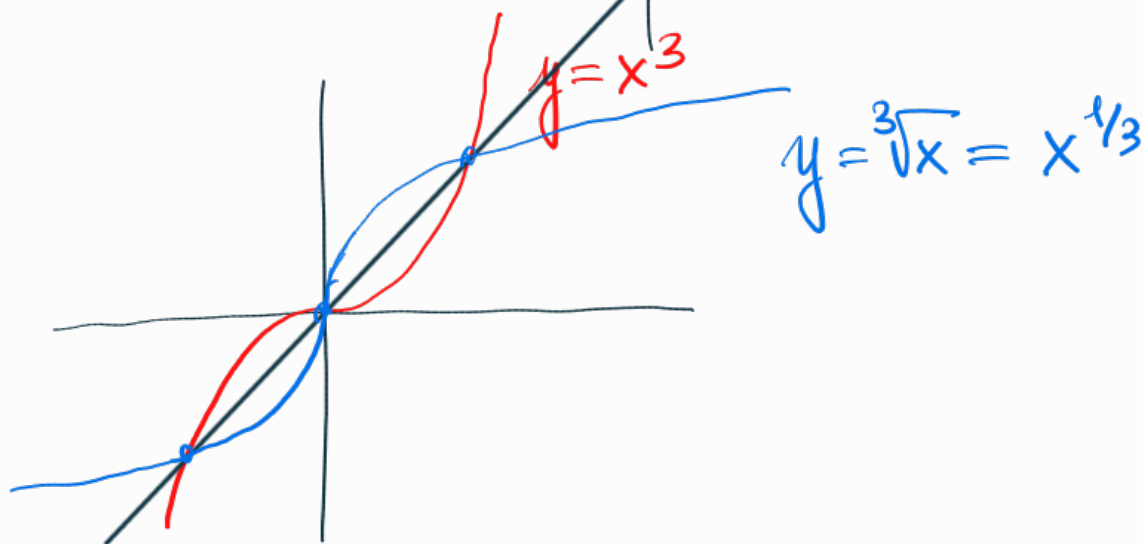
Il grafico di f^{-1} si ottiene dal grafico di f per simmetria rispetto alla bisettrice del 1°/3° quadr.

Sia f biettiva:

$$\text{se } f(-1) = 4 \iff f^{-1}(4) = 1$$

$$\Downarrow \\ (-1, 4) \in \text{graf } f$$

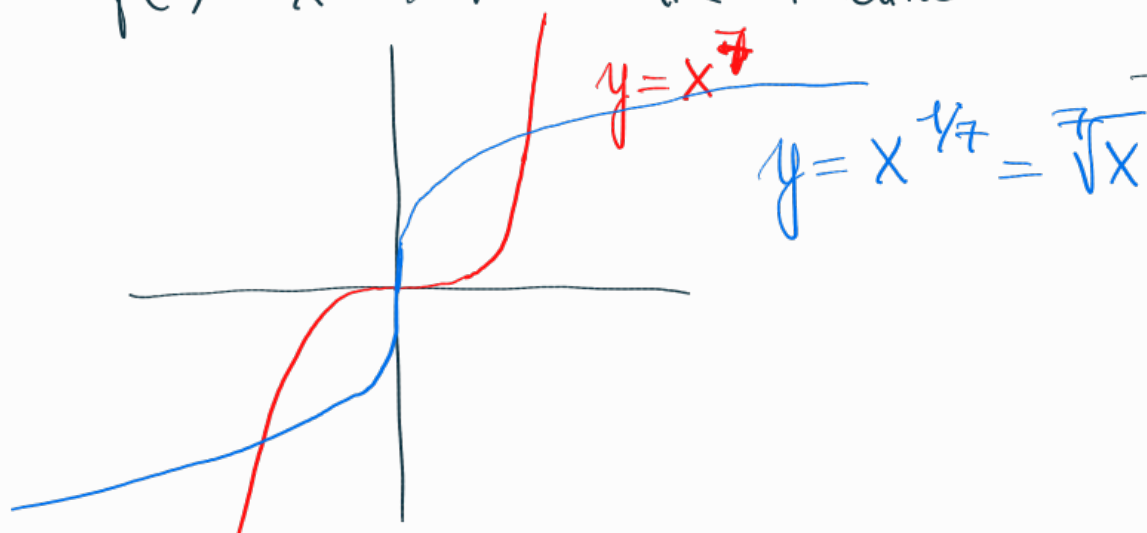
$$\Downarrow \\ (4, 1) \in \text{graf } f^{-1}$$



Questo discorso si ripete per le funzioni

$$f(x) = x^n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ biettiva}$$

$n \in \mathbb{N}$
 n dispari



$$f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

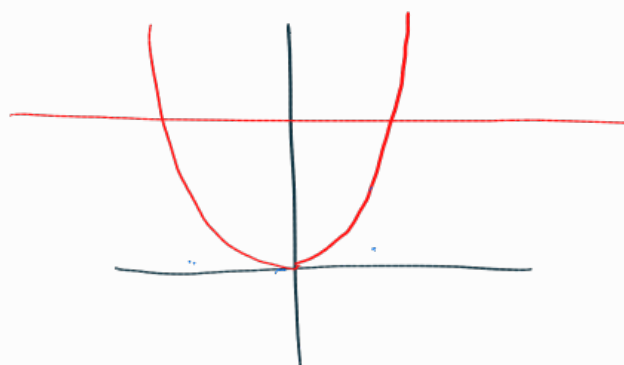
$$y \mapsto \text{l'unico } x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x^n = y$$

$$x = y^{1/n} = \sqrt[n]{y}.$$

$$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

né iniettiva né suriettiva

La suriettività si recupera prendendo $[0, +\infty)$ come insieme d'arrivo.



Per l'iniettività, ci sono varie scelte:

1) restringere il dominio a $[0, +\infty)$

2) " " " " $(-\infty, 0]$

3) " " " $[0, 1] \cup (-\infty, -1)$

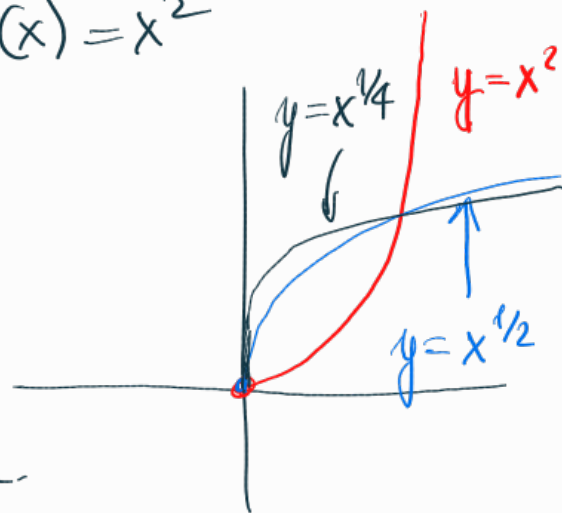
etc...

← scegliamo questo per convenzione

$$f(x) = x^2 \Big|_{[0, +\infty)} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

questa è biettiva
 $\Rightarrow$ resta definito



$$f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$

$$y \mapsto \text{l'unico } x \text{ t.c.}$$

$$x^2 = y$$

$$x = \sqrt{y} = y^{1/2}$$

La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è l'inversa di x^2
 ma è l'inversa di $x^2 \Big|_{[0, +\infty)}$

Stesso discorso per x^n $n \in \mathbb{N}_+$ pari.

$$x^2, x^4, x^6, \dots$$

$$x^n : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty) \quad (n \text{ pari} > 0)$$

biettiva

La sua inversa è la $\sqrt[n]{y} = y^{1/n}$

Voglio definire x^q $\forall q \in \mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : \begin{matrix} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N}_+ \end{matrix} \right\}$

Def. Supponiamo che $q = \frac{m}{n}$, e che
 m, n primi tra loro. Definiamo

$$X^q = X^{\frac{m}{n}} := \sqrt[n]{X^m} = \left(\sqrt[n]{X}\right)^m$$

Per es $X^{2/3} = \sqrt[3]{X^2}$

$$X^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{X^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{X^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{X^2}}$$

I grafici di queste funzioni sono molto diversi fra loro a seconda del numero q . Vediamone qualcuno:

