

Formula di Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

Usiamo la formula di Stirling per provare (di nuovo!) che

$$\frac{n!}{b^n} \rightarrow +\infty \quad \forall b > 1.$$

Per Stirling

$$\frac{n!}{b^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} n^n}{e^n b^n} = \underbrace{\sqrt{2\pi n}}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{n}{eb}\right)^n}_{\downarrow (+\infty)^{+\infty} = +\infty} \rightarrow +\infty$$

Confrontiamo ora n^n e $(2n)!$

Vediamolo con il criterio del rapporto (provarci anche con Stirling)

$$a_n = \frac{n^n}{(2n)!}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(2n+2)!} \frac{(2n)!}{n^n} = \frac{(n+1)^{\cancel{n+1}}}{(2n+1)2(\cancel{n+1}) n^n} = \frac{(n+1)^n}{2(2n+1) n^n} \\ &= \frac{(n+1)^n}{(2n)!(2n+1)(2n+2)} \\ &= \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\rightarrow e} \cdot \underbrace{\frac{1}{2(2n+1)}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 < 1 \xRightarrow{\text{rapporto}} a_n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Gerarchie degli infiniti.

$$\log n < \sqrt{n} < n < n^2 < n^3 < \dots < n^{1000} < \dots < 2^n < 3^n < \dots < 1000^n < n! < n^n < \dots$$

dove $a_n < b_n$ significa a_n è un infinito di ordine inferiore risp. a b_n

Posso estenderla a destra

$$n^n < n^{n+1} < (2n)^n <$$

$$\frac{n^{n+1}}{(2n)^n} = \frac{\cancel{n^n} n}{2^n \cancel{n^n}} = \frac{n}{2^n} \rightarrow 0$$

oppure potrei estenderla a sinistra

$$\sqrt{\log \log n} < \log(\log n) < (\log(\log n))^2 < \sqrt{\log n} < \log n < (\log n)^2$$

oppure potrei "zoomare" al centro

$$n < n \log(\log n) < n(\log n) < n(\log n)^2 < n^{1,001}$$

Confrontiamo ora queste quattro successioni

$$\log n, \quad \log_2 n, \quad \log(n^2), \quad \log(n^3)$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$

$$\frac{\log n}{\log 2}, \quad 2 \log n, \quad 3 \log n$$

sono tutte dello stesso ordine di infinito.

Queste gerarchie si usano nei limiti.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - 5n^2 \log n}{n^5 - n^2 2^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{-n^2 2^n} = - \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3/2)^n}{n^2} = -\infty$$

o(1)

Num. $3^n - 5n^2 \log n = 3^n \left(1 - \frac{5n^2 \log n}{3^n} \right) \sim 3^n$

*è di ordine sup. a n^2
ma inferiore risp. a $n^{2+\varepsilon}$ ($\varepsilon > 0$)*

Denom. $n^5 - n^2 2^n = n^2 2^n (o(1) - 1) \sim -n^2 2^n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{\log_2 n}}{n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\log_2 5}}{n} = +\infty$$

$$5^{\log_2 n} = 2^{\log_2 5 \log_2 n} = n^{\frac{\log_2 5}{2}}$$

oppure

$$\frac{5^{\log_2 n}}{2^{\log_2 n}} = \left(\frac{5}{2} \right)^{\log_2 n} \rightarrow +\infty$$

*ordine sup. a n^2
ma inferiore a $n^{2+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$*

*ordine superiore a n
ma inferiore rispetto a $n^{1+\varepsilon} \forall \varepsilon > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 (\log n)^3 + n^{5/2} - n (\log n)^5}{\log(\log(2n)) + \sqrt{n} \sqrt{n^4 + \log n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{5/2}}{n^{5/2}} = 1$$

NUM $n^2 (\log n)^3 + n^{5/2} - n (\log n)^5 = n^{5/2} (1 + o(1)) \sim n^{5/2}$

Denom $\log(2n) = \log n + \log 2 = \log n (1 + o(1))$

$$\log(\log(2n)) = \log(\log n (1 + o(1))) =$$

$$= \log(\log n) + \underbrace{\log(1 + o(1))}_{o(1)} =$$

$$= \log(\log n) \left(1 + \frac{o(1)}{\log \log n} \right) = \log(\log n) (1 + o(1))$$

$$\sqrt{n} \sqrt{n^4 + \log n} = n^{5/2} \sqrt{1 + \frac{\log n}{n^4}} = n^{5/2} (1 + o(1))$$

$$\text{Denom} = n^{5/2} (1 + o(1))$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\sqrt{n}} - (\sqrt{n})^n)$$

$$\sqrt{n} = n^{1/2} \Rightarrow (\sqrt{n})^n = (n^{1/2})^n = n^{n/2}$$

$$n^{\sqrt{n}} - (\sqrt{n})^n = n^{\sqrt{n}} - n^{n/2} = n^{n/2} \left(n^{\sqrt{n} - \frac{n}{2}} - 1 \right)$$

$\downarrow$ oss $\sqrt{n} - \frac{n}{2} \rightarrow -\infty$
 $(+\infty)^{-\infty} = 0$

oppure

$$n^{\sqrt{n}} - (\sqrt{n})^n = e^{\sqrt{n} \log n} - e^{\underbrace{n \log(\sqrt{n})}_{\frac{n}{2} \log n}} =$$

$$= e^{\sqrt{n} \log n} - e^{\frac{n}{2} \log n} =$$

$$\underbrace{e^{\frac{n}{2} \log n}}_{+\infty} \left(\underbrace{e^{\underbrace{\sqrt{n} \log n - \frac{n}{2} \log n}_{-\infty}}}_{\rightarrow 0} - 1 \right) \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{n}} = ((+\infty)^0) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{n} \log n} = e^0 = 1.$$

0 per la gerarchia
dei limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{3n^7 - n^5 + 5} = ((+\infty)^0) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^7 \left(3 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^7}\right)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{7/n} \left(3 - \frac{1}{n^2} + \frac{5}{n^7}\right)^{1/n} = 1.$$

$$e^{\frac{7}{n} \log n}$$

$$e^0 = 1$$

$$3^0 = 1$$

In questo modo si dimostra che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1$$

per polinomio $P_k(n)$ con termine
 $a_k > 0$

Dimostriamo il criterio del rapporto per successioni

TEOREMA Sia $\{a_n\}$ a termini > 0 .

Se

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in (1, +\infty]$, allora $a_n \rightarrow +\infty$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \in [0, 1)$, allora $a_n \rightarrow 0$

Dim.

caso a) Definitivamente $\frac{a_{n+1}}{a_n} > M > 1$.

Infatti se $l \in (1, +\infty)$, prendo $M = \frac{1+l}{2} < l$

Per la permanenza del segno, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > M$ def^{te}.

se invece $l = +\infty$, allora $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 2$ def^{te}.

Quindi $\frac{a_{n+1}}{a_n} > M > 1$ per $n \geq n_0$.

$$a_{n+1} > M a_n$$

$$a_{n_0+1} > M a_{n_0}$$

$$a_{n_0+2} > M a_{n_0+1} > M^2 a_{n_0}$$

Se $n > n_0$

$$a_n > M a_{n-1} > M^2 a_{n-2} > \dots > M^{n-n_0} a_{n_0}$$

così $a_n > \underbrace{M^n}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{\frac{a_{n_0}}{M^{n_0}}}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty \quad \forall n > n_0$

Caso b) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \rightarrow l \in [0, 1)$

Preso $M = \frac{1+l}{2}$, $l < M < 1$

def^{te} ($\forall n \geq n_0$) si ha $\frac{a_{n+1}}{a_n} < M$

$$\Rightarrow a_{n+1} < M a_n \quad \forall n \geq n_0$$

$$0 < a_n < M^{n-n_0} a_{n_0} \quad \forall n \geq n_0$$

$$\begin{aligned} & \parallel \\ & M^n \frac{a_{n_0}}{M^{n_0}} \\ & \downarrow \\ & 0 \end{aligned}$$

Thm. dei carabinieri $\Rightarrow a_n \rightarrow 0$

□

Sottosuccessioni (o successioni estratte).

DEF Data una successione $\{a_n\}$, si dice sottosuccessione di $\{a_n\}$ una successione della forma $b_n = a_{k_n}$, dove $\{k_n\}$ è una successione strettamente crescente di interi naturali.

Se $a_n = \frac{1}{n}$

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots$

$a_{2n} = \frac{1}{2n} \quad (K_n = 2n)$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$

$a_{2n-1} = \frac{1}{2n-1} \quad (K_n = 2n-1)$

$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \dots$

$a_{n^2} = \frac{1}{n^2} \quad (K_n = n^2)$

$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$

$a_{k_n} \quad (K_n \text{ è la successione dei numeri primi})$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \dots$

In pratica una sottosuccessione di $\{a_n\}$ è una successione che ottengo da $\{a_n\}$ cancellando dei termini, anche in numero infinito.

Le seguenti non sono sottosuccessioni di $a_n = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \dots$

$\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots$

PROP Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}^*$, allora ogni sottosuccessione di $\{a_n\}$ tende ancora a l .

Dim.

$a_n \rightarrow l \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall V \text{ intorno di } l \exists h \text{ t.c. } \forall n > h \quad a_n \in V$

sia $\{a_{k_n}\}$ una sottosuccessione di $\{a_n\}$

$(\{k_n\})$ è una successione strett. crescente di naturali

oss $k_n \geq n$

quindi se $n > h \Rightarrow k_n > h \Rightarrow a_{k_n} \in V$

Ma questo vale $\forall V$ intorno di $l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{k_n} = l$.

Applicazione alla non esistenza dei limiti

Un modo per provare che $\{a_n\}$ non ha limite è trovare due sottosuccessioni che hanno limiti diversi.

$a_n = (-1)^n$ non ha limite.

Infatti

$$\begin{aligned} a_{2n+1} &= (\text{la sottosucc}^{\text{a}} \text{ dei termini dispari}) \\ &= (-1)^{2n+1} = -1 \rightarrow -1 \end{aligned}$$

$$a_{2n} = (-1)^{2n} = 1 \rightarrow 1$$

(la sottosucc^a dei termini di indici pari)

$$a_n = (-1)^n n$$

$$a_{2n+1} = \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{-1} (2n+1) \rightarrow -\infty$$

$$a_{2n} = (-1)^{2n} (2n) \rightarrow +\infty$$