

DEF Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni def^{te} diverse da zero.

Diremo che a_n e b_n sono asintoticamente equivalenti,

e scriveremo $a_n \sim b_n$ per $n \rightarrow +\infty$

se $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, cioè $a_n = b_n(1 + o(1))$
per $n \rightarrow +\infty$

Esempi:

$$2n^2 + 3n + 5 \sim 2n^2$$

$$\sqrt[3]{n^3 + 5} \sim n$$

$$\frac{n+1}{2n^2+5} \sim \frac{1}{2n}$$

OSS se $a_n \sim b_n$, esse hanno lo stesso limite.

Il viceversa non è vero, per es

$$\frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad \frac{1}{n^2} \rightarrow 0, \quad \text{ma} \quad \frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2}$$

Però è vero se il limite è diverso da zero.

PROP. Supponiamo $a_n \sim \bar{a}_n$, $b_n \sim \bar{b}_n$. Allora

$$1) \quad \frac{a_n}{b_n} \sim \frac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n}$$

Esempio

$$\frac{2n^2 - 3n + 7}{n + n^2 + 1} \sim \frac{2n^2}{n^2} = 2$$

$2n^2$
 n^2

Dim 1)

$$\frac{\left(\frac{a_n}{b_n}\right)}{\left(\frac{\bar{a}_n}{\bar{b}_n}\right)} = \frac{\frac{a_n}{\bar{a}_n}}{\frac{b_n}{\bar{b}_n}} \rightarrow 1$$

↓ ↓
1 1

□

$$2) \quad a_n \cdot b_n \sim \bar{a}_n \cdot \bar{b}_n$$

Dim

$$\frac{a_n \cdot b_n}{\bar{a}_n \cdot \bar{b}_n} \rightarrow 1$$

↓ ↓
1 1

□

$$3) \quad (a_n)^r \sim (\bar{a}_n)^r \quad \forall r \in \mathbb{R}$$

Dim

$$\frac{(a_n)^r}{(\bar{a}_n)^r} = \left(\frac{a_n}{\bar{a}_n}\right)^r \rightarrow 1^r = 1$$

↓
1

□

Quindi si possono sostituire successioni asint. equivalenti in prodotti, frazioni, potenze fissate.

ATTENZIONE Non si possono sostituire succ^{hi} asintoticamente equivalenti in somme/differenze, all'interno di funzioni, in composizione di funzioni.

Esempi.

$$(n+1)^2 \sim n^2 \quad \text{vero.}$$

ma

~~$(n+1)^2 - n^2 \sim n^2 - n^2 = 0$ è errato.~~

$$(n+1)^2 - n^2 = \cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2} \rightarrow +\infty$$

Invece si può sempre sostituire con gli $o(-)$

$$\begin{aligned} (n+1)^2 - n^2 &= n^2(1+o(1)) - n^2 = \cancel{n^2} + n^2 o(1) - \cancel{n^2} = \\ &= n^2 o(1) \end{aligned}$$

non posso concludere
ma è corretto.

È scorretto sostituire succ^{hi} asint. equiv. in una somma anche quando il risultato viene giusto

~~$(2n+1)^2 - n^2 \sim 4n^2 - n^2 = 3n^2 \rightarrow +\infty$~~

risultato vero
ma preced.
scorretto.

Proc. corretto:

$$\begin{aligned} (2n+1)^2 - n^2 &= 4n^2(1+o(1)) - n^2 = n^2(4 + o(1) - 1) \rightarrow \\ &= 4n^2(1+o(1)) \end{aligned}$$

3

Altro esempio di errore

$$n^2 + n \sim n^2 \text{ vero.}$$

~~$$\Rightarrow e^{n^2+n} \sim e^{n^2}$$~~

~~$$\frac{e^{n^2+n}}{e^{n^2}} = e^n \rightarrow +\infty$$~~

FALSO!

L'errore è che ho sostituito asint. eq. all'interno di un esponente.

~~$$e^{n^2+n} - e^{n^2} \rightarrow 0$$~~

FALSO!

$$1 + \frac{1}{n} \sim 1 \text{ vero}$$

~~$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \sim 1^n$$~~
$$\downarrow$$

$$e$$

FALSO, ho sostituito all'interno di una potenza che si muove

Tuttavia anche in una somma/differenza può essere utile considerare le asintotiche equivalenti (senza sostituire)

Esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\sqrt{n^3+1}}_{\sim n^{3/2}} - n \right) = \lim_n n^{3/2} \left(\underbrace{\frac{\sqrt{n^3+1}}{n^{3/2}}}_{\sim 1} - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_{\sim 0} \right) = +\infty$$

non sostituisco ma capisco cosa devo mettere in evidenza.

Esercizio dal libro.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x + n^{4-x}}{n^{x-2} + n^6} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Num } n^x + n^{4-x} \sim \begin{cases} n^x & \text{se } x > 2 \\ 2n^2 & \text{se } x = 2 \\ n^{4-x} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$x > 4-x \Leftrightarrow x > 2$$

$$\text{Den } n^{x-2} + n^6 \sim \begin{cases} n^{x-2} & \text{se } x > 8 \\ 2n^6 & \text{se } x = 8 \\ n^6 & \text{se } x < 8 \end{cases}$$

$$x-2 > 6 \Leftrightarrow x > 8$$



$$\boxed{x > 8} \Rightarrow d_n \sim \frac{\cancel{n^x}}{\cancel{n^{x-2}}} = n^2 \rightarrow +\infty$$

$$\boxed{x = 8} \Rightarrow d_n \sim \frac{n^x}{2n^6} = \frac{n^8}{2n^6} = \frac{n^2}{2} \rightarrow +\infty$$

$$\boxed{2 < x < 8} \Rightarrow d_n \sim \frac{n^x}{n^6} = n^{x-6} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } 6 < x < 8 \\ 1 & \text{se } x = 6 \\ 0 & \text{se } 2 < x < 6 \end{cases}$$

$$\boxed{x = 2} \Rightarrow d_n \sim \frac{2n^2}{n^6} = \frac{2}{n^4} \rightarrow 0$$

$$\boxed{x < 2} \Rightarrow d_n \sim \frac{n^{4-x}}{n^6} = n^{-2-x} \rightarrow \begin{cases} 0 & -2 < x < 2 \\ 1 & x = -2 \\ +\infty & x < -2 \end{cases}$$

a

$$-2-x > 0 \Leftrightarrow x < -2$$

Ricapitoliamo: il limite vale

$$\begin{cases} +\infty & (x > 6) \vee (x < -2) \\ 1 & (x = 6) \vee (x = -2) \\ 0 & -2 < x < 6 \end{cases}$$

CONFRONTO TRA INFINITI

Una succ^{ne} che tende a $\pm\infty$ si dice "un infinito".

Per es. $a_n = n$, $b_n = n^2 - n$, $c_n = -n^3 + 7$

Some infinit.

Vogliamo chiarire come si confrontano tra loro infiniti diversi.

Situazione tipica $\frac{a_n}{b_n}$, con $a_n, b_n \rightarrow +\infty$

d_n "vred mandare" $\hookrightarrow$ frazione $d \rightarrow \infty$
 b_n " " " " " " $d \rightarrow 0$

DEF Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due succ.ⁿⁱ tendenti a $\pm\infty$.

Diremo che

• $\{a_n\}$ è un infinito di ordine superiore risp. a $\{b_n\}$, e
che $\{b_n\}$ è un infinito " inferiore " $\{a_n\}$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b_n}{a_n} = 0 \quad \left(\text{e equivalentemente} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_n}{b_n} \right| = +\infty \right)$$

- $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infiniti dello stesso ordine se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ cioè se } a_n \sim l b_n$$

Esempio: n^3 è un infinito di ordine superiore rispetto a $5n^2 + 1$

• n^3 è un infinito dello stesso ordine di $3n^3 - 5n^2$

Confronto tra potenze ed esponenziali

n^α (con $\alpha > 0$) e b^n (con $b > 1$) sono entrambi infiniti

PROP 1 Siano $b > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^n}{n^\alpha} = +\infty \quad \left(\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{b^n} = 0 \right)$$

oss se $b > 1$, $\alpha > 0$, la prop. dice che

b^n è un infinito di ordine superiore risp. a n^α

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n - n^2}{\underbrace{n^7 - 2n^5 + 5}_{\sim n^7}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n^7} = +\infty \quad \text{prop}$$

$$3^n - n^2 = 3^n \left(1 - \underbrace{\frac{n^2}{3^n}}_{\substack{\downarrow \text{prop} \\ 0}} \right) \sim 3^n$$

$\downarrow$
1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\underbrace{n^2 2^n}_{\parallel \frac{n^2}{(3/2)^n}}}{3^n} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{\left(\frac{3}{2} \right)^n} = 0$$

COROLLARIO $n^\alpha b^n$, con $\alpha > 0$ $0 < b < 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha b^n = (+\infty) \cdot 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^\alpha}{\underbrace{\left(\frac{1}{b} \right)^n}_{> 1}} = 0$$

Dim. Prop. $b > 1, \alpha \in \mathbb{R} \stackrel{?}{\Rightarrow} \frac{b^n}{n^\alpha} \rightarrow +\infty$

ovvio se $\alpha \leq 0$, consideriamo $\alpha > 0$.

Usiamo il risultato (da provare in seguito)

CRITERIO del rapporto per successioni:

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} di termini positivi t.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l. \quad \text{Allora}$$

• se $l \in [0, 1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

• se $l \in (1, +\infty] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

oss il criterio non dice nulla se $l = 1$.

Applico il criterio alla succ^{ne} $a_n = \frac{b^n}{n^\alpha}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{b^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \right)}{\left(\frac{b^n}{n^\alpha} \right)} = \frac{b^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n^\alpha}{b^n} \rightarrow b > 1$$

$\left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha \rightarrow 1$

Per il criterio del rapporto $\Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$ □

Cosa succede se al posto di n ho una succ^{ne} $c_n \rightarrow +\infty$?

se $c_n \rightarrow +\infty$, allora $\frac{b^{c_n}}{(c_n)^\alpha}$ cosa fa?

PROP 2 $\forall b > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \text{ se } c_n \rightarrow +\infty, \text{ allora}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b^{c_n}}{(c_n)^\alpha} = +\infty.$$

Dim Voglio trovare un "carabiniere" dal basso

parte intera $\rightarrow \lfloor c_n \rfloor \leq c_n < \lfloor c_n \rfloor + 1$

$$\frac{b^{c_n}}{(c_n)^\alpha} \geq \frac{b^{\lfloor c_n \rfloor}}{(c_n)^\alpha} > \frac{b^{\lfloor c_n \rfloor + 1}}{(\lfloor c_n \rfloor + 1)^\alpha} \xrightarrow{+ \infty} \frac{1}{b} \rightarrow +\infty$$

$\lfloor c_n \rfloor + 1 = m \rightarrow +\infty \quad m \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \frac{b^{c_n}}{(c_n)^\alpha} \rightarrow +\infty$$

□

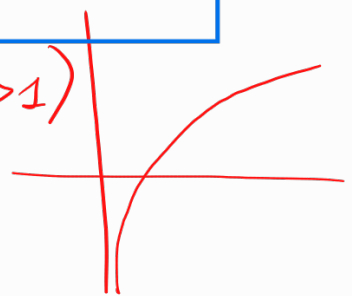
PROP 3 (Confronto tra logaritmi e potenze)

Siano $b > 1, \alpha > 0$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = 0$$

Dim

oss $\log_b n \quad (b > 1)$
 $\downarrow$
 $+\infty$



oss $n = b^{\log_b n}$

$$\frac{\log_b n}{n^\alpha} = \frac{\log_b n}{(b^{\log_b n})^\alpha} = \frac{\log_b n}{b^{\alpha \log_b n}} = \frac{\log_b n}{(b^\alpha)^{\log_b n}} =$$

$c_n = \log_b n \rightarrow +\infty$

$$= \frac{c_n}{(b^\alpha)^{c_n}} \xrightarrow{\text{PROP 2}} 0$$

□

$b^\alpha > 0$ perché $b > 1, \alpha > 0$

OSS Questo vale anche se al posto di n ci mettiamo una successione $c_n \rightarrow +\infty$

$$c_n \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log_b(c_n)}{(c_n)^\alpha} = 0 \quad \forall \alpha > 0$$

Fattoriale

Def sia $n \in \mathbb{N}$, definiamo il fattoriale

$$n! = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0 \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

$$1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6, \quad 4! = 24 \\ 5! = 120 \quad \text{etc} \dots$$

PROP 4

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{b^n} = +\infty \quad \forall b > 1. \\ (\text{ovvio se } 0 < b \leq 1)$$

Dim Usiamo il criterio del rapporto per $d_n = \frac{n!}{b^n}$

$$\frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{(n+1)!}{b^{n+1}} \cdot \frac{b^n}{n!} = \frac{n+1}{b} \rightarrow +\infty$$

$$\underline{\text{OSS}} \quad (n+1)! = n! (n+1)$$

$$\Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$$

□

PROP 5

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!} = +\infty.$$

Dim

$$a_n = \frac{n^n}{n!}$$

e applico il criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1) \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e > 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$$

□

Vale in realtà la seguente

Formula di Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$