

Potenze con esponente intero negativo

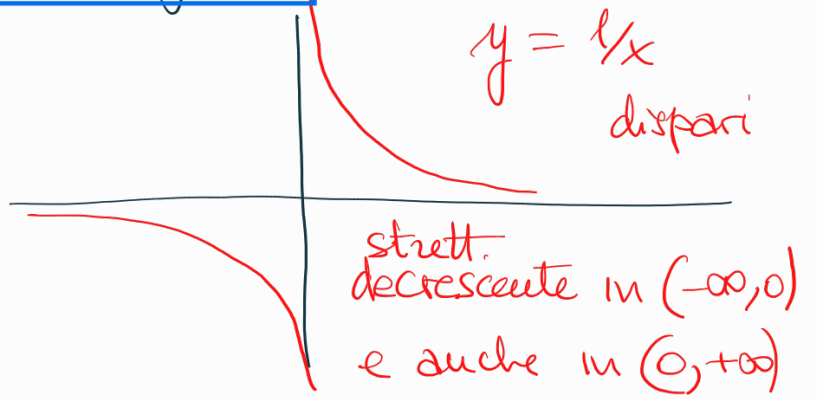
$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

$$x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Se $n \in \mathbb{N}^+$, definiamo

deve essere $x \neq 0$.

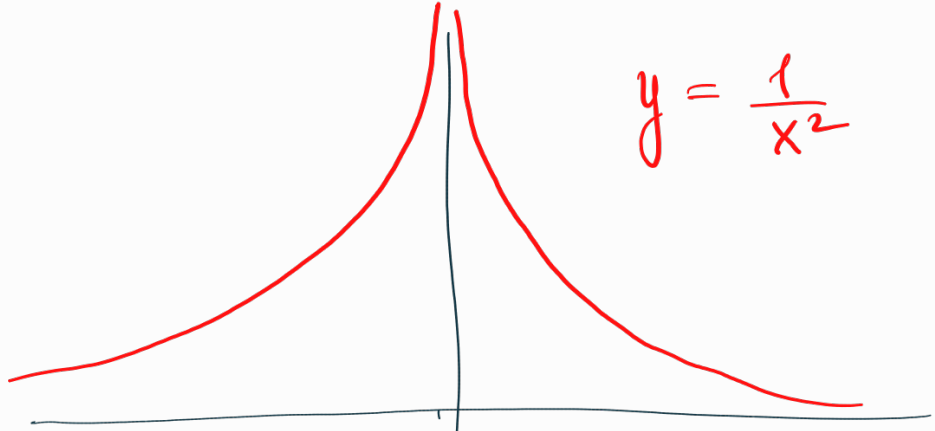


ma non è decrescente in
 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
 per es. $f(-1) < f(1)$

$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$	
	$\begin{matrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{matrix}$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



pari, crescente in $(-\infty, 0)$,
decrease. in $(0, +\infty)$

Vorrei definire X^α con $\alpha \in \mathbb{Q}$

Per prima cosa vorrei definire

$x^{1/n}$

Con

$$n \in \mathbb{N}^+$$

$$x^{1/2} = \sqrt{x}$$

$$x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

DEF $f: X \rightarrow Y$ si dice iniettiva
se (equivalentemente)

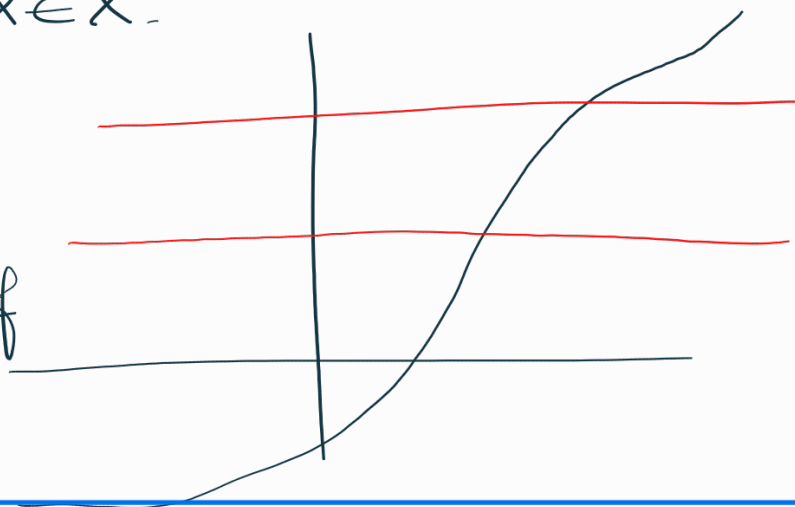
1) comunque presi $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$
si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$

2) se $x_1, x_2 \in X$, $f(x_1) = f(x_2)$, allora
 $x_1 = x_2$

3) $\forall y \in Y \quad \exists$ al più un elemento $x \in X$ t.c.
 $f(x) = y$

4) $\forall y \in Y$ l'equazione $f(x) = y$ ammette
al più una sol^{ne} $x \in X$.

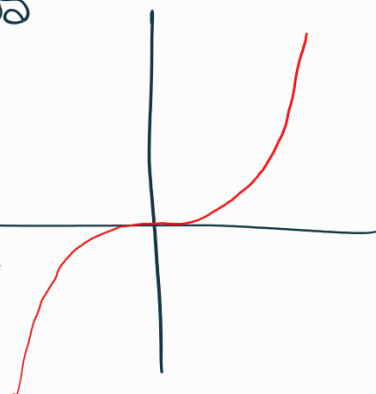
5) (se $X, Y \subseteq \mathbb{R}$)
ogni retta orizzontale
interseca il grafico di f
in al più un punto



Esempi: $f(x) = x^3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è iniettivo
in quanto è strettamente crescente

se $x_1 \neq x_2$, possiamo supporre $x_1 < x_2$

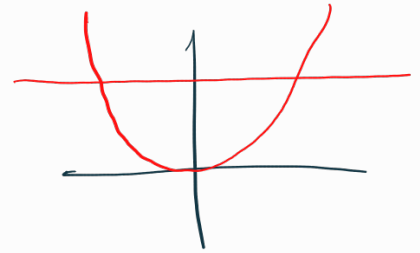
$$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



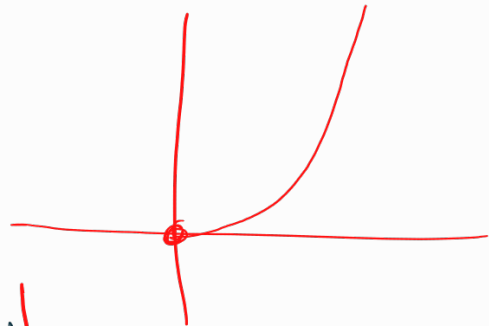
OSS se f è strettamente monotona (crescente o decrescente)
allora è iniettiva

$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è iniettiva.

perché $f(-2) = f(2) = 4$



$f(x) = x^2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$



$f(x) = \frac{1}{x}$ è iniettiva



$$\frac{1}{x} = y$$

risolve in x

$\rightarrow$ se $y = 0 \Rightarrow$ nessuna sol.

$$\text{se } y \neq 0 \Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$f: X \rightarrow Y$ si dice suriettiva se
vale una delle seguenti affermazioni equivalenti

- 1) $\forall y \in Y \quad \exists$ almeno un $x \in X$ t.c. $f(x) = y$
- 2) ogni elemento di Y "proviene" da almeno un punto $x \in X$

3) $\forall y \in Y$ l'eq^{ue} (nella variabile x)

$$f(x) = y$$

ammette almeno una sol^{ue}.

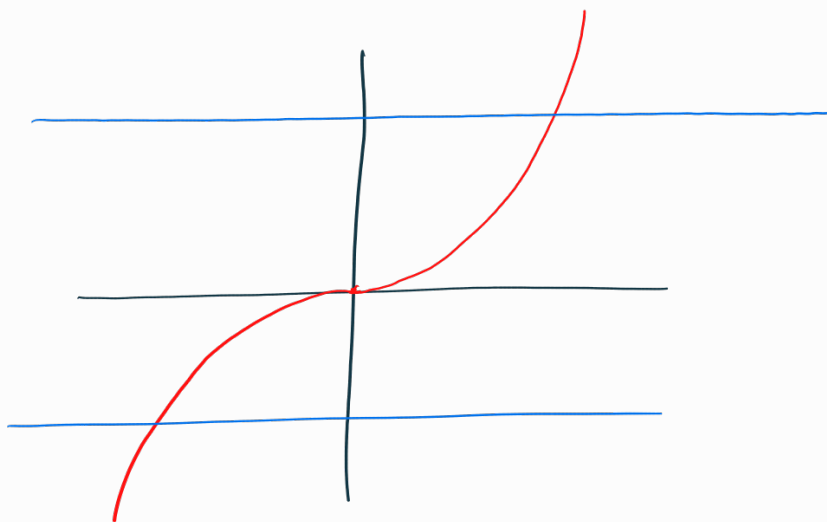
4) L'insieme di arrivo Y coincide con l'immagine di f .

$$\begin{aligned} \text{im } f &= f(X) = \{y \in Y \text{ t.c. } \exists x \in X \text{ verificante} \\ &\quad y = f(x)\} \\ &= \{y \in Y \text{ che sono valori della } f\} \end{aligned}$$

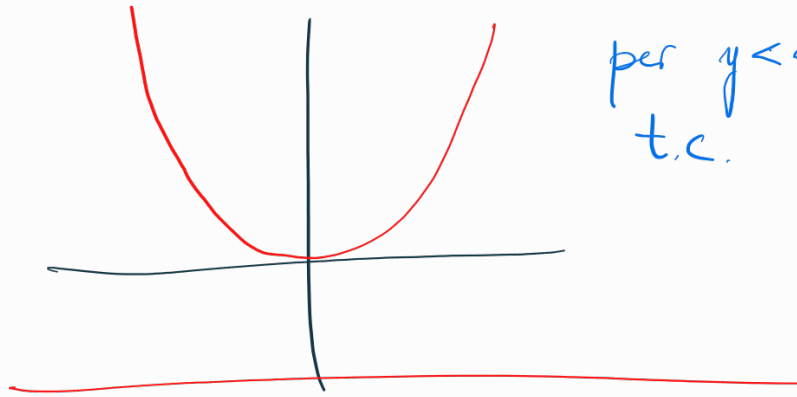
5) per funzioni da $X \subseteq \mathbb{R}$ a $Y \subseteq \mathbb{R}$.
ogni retta orizzontale interseca il grafico di f in almeno un punto.

$f(x) = x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è suriettivo

$f(x) = x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è suriettivo

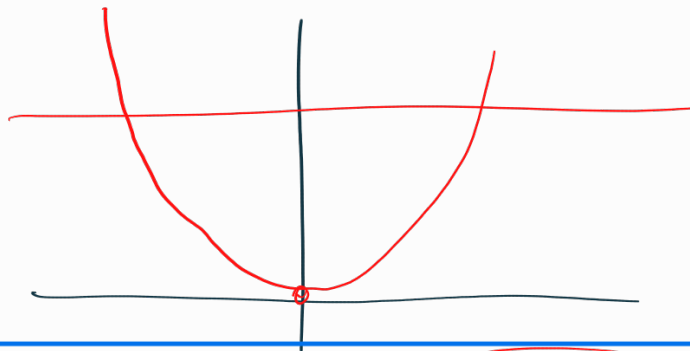


$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è suriettiva? No
perché

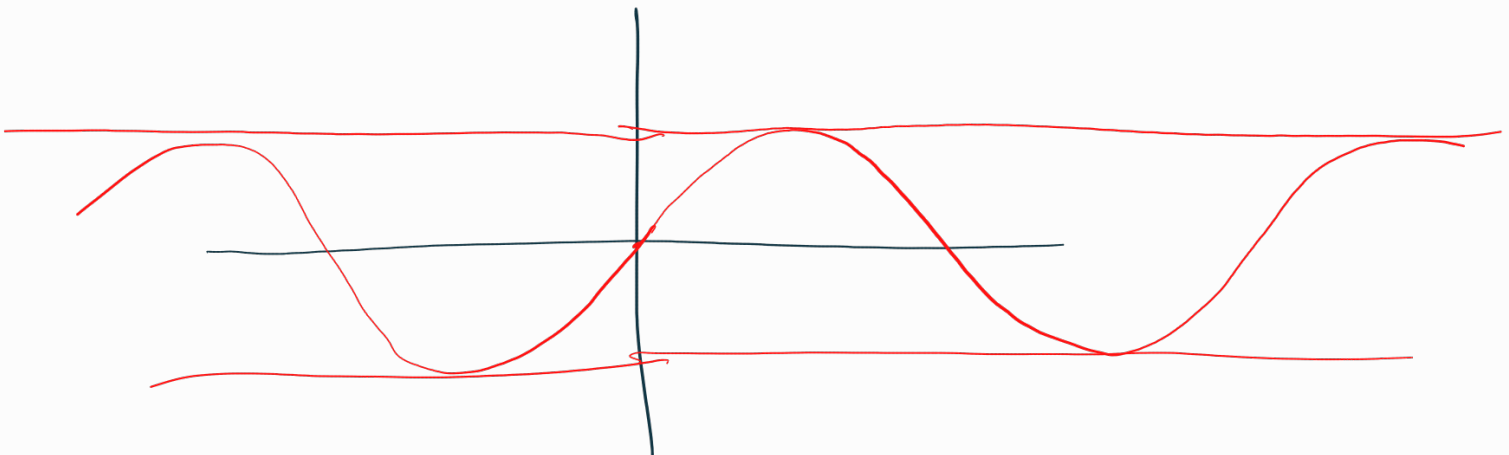


per $y < 0 \nexists x \in \mathbb{R}$
t.c. $x^2 = y$

$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ è suriettiva

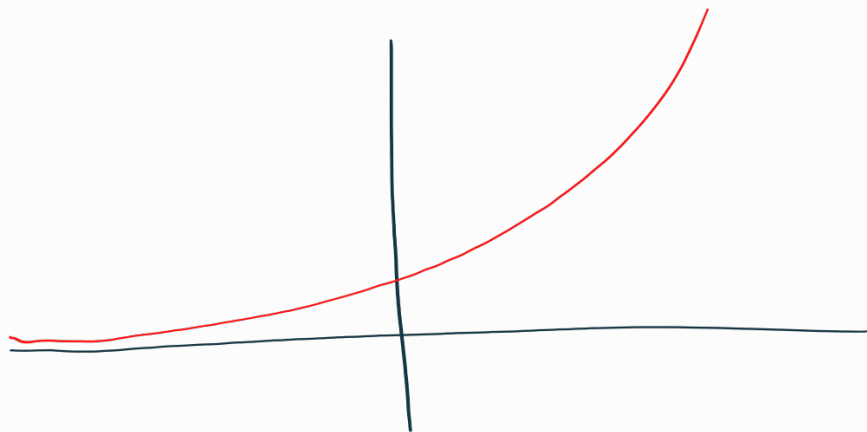


$f(x) = \sin x : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ è suriettiva



Ogni funzione $f: X \rightarrow Y$, anche se non suriettiva,
si può sempre rendere suriettiva
cambiando l'insieme di arrivo, cioè prendendo
al posto di Y l'immagine di f .

$f(x) = 2^x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ non è suriettivo
 (non prende valori neg.)
 $\tilde{f}(x) = 2^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ è suriettivo



$f : X \rightarrow Y$ si dice **biiettivo** se è
 sia iniettiva che suriettiva, ossia:

- 1) $\forall y \in Y \quad \exists! x \in X \text{ t.c. } f(x) = y.$
- 2) $\forall y \in Y$ l'eq. $f(x) = y$ ammette
una unica soluzione $x \in X$
- 3) ogni retta orizzontale interseca il grafico di f
in esattamente un punto.

Esempi di funzioni biettive.

$$f(x) = x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^4 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$



$$f(x) = \frac{1}{x} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$