

TEOREMA (limite di succ^{ie} monotone, cioè crescenti o decrescenti)

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ie} crescente di numeri reali.
decrescente

Allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n$
 $= \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n$

Dim. (nel caso di $\{a_n\}$ crescente)

Due casi:

1°) $\sup a_n = L \in \mathbb{R}$.

Caratterizzazione del sup $\Rightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N} \quad \text{t.c.} \quad a_{\bar{n}} > L - \varepsilon$$

se $n > \bar{n}$,

proprietà del sup

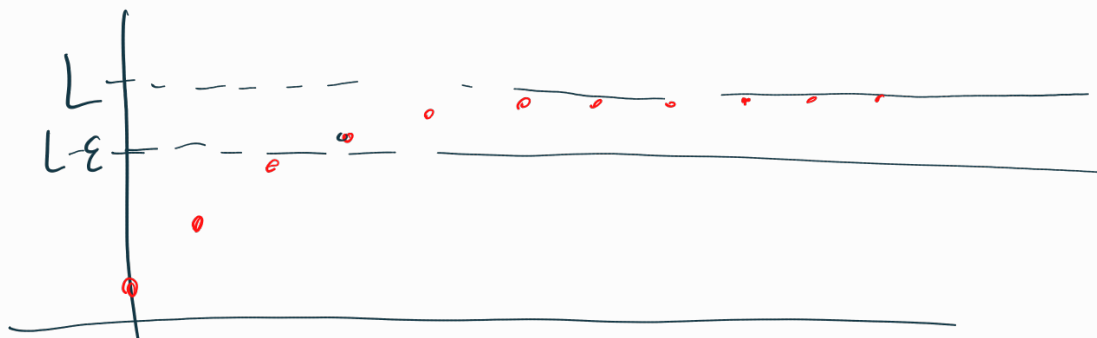
$$L - \varepsilon < a_{\bar{n}} \leq a_n \leq L < L + \varepsilon$$

crescenza

Abbiamo provato che $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \quad \text{t.c.} \quad \forall n > \bar{n}$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$$

è la def di limite $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n \quad \square$



2° caso $L = \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n = +\infty \Rightarrow \{a_n\}$ non è limitata sup

$\Rightarrow \forall M > 0 \exists \bar{n}$ t.c. $a_{\bar{n}} > M$.

Se $n > \bar{n}$ $a_n \geq a_{\bar{n}} > M$.

crescente

Abbiamo provato:

$\forall M > 0 \exists \bar{n}$ t.c. $\forall n > \bar{n} \quad a_n > M$,

cioè $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$

COROLLARIO

Sia $\{a_n\}$ una succ^{ve} crescente, allora

- $\{a_n\}$ è convergente $\Leftrightarrow \{a_n\}$ è limitata superiormente
- $\{a_n\}$ è divergente a $+\infty \Leftrightarrow \{a_n\}$ è illimitata superiormente.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = (1^{+\infty})$ forma indeterminata.

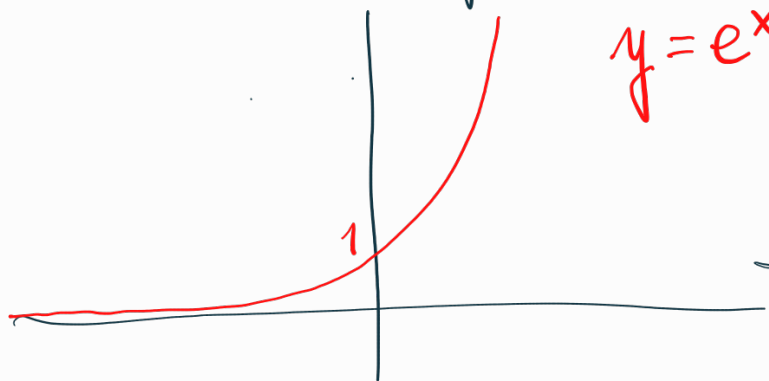
TEOREMA La successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è
strett. crescente e limitata superiormente $\Rightarrow$ (teor. precedente)

essa converge, ad un numero reale che viene indicato con e
(costante di Nepero, o di Eulero) e vale

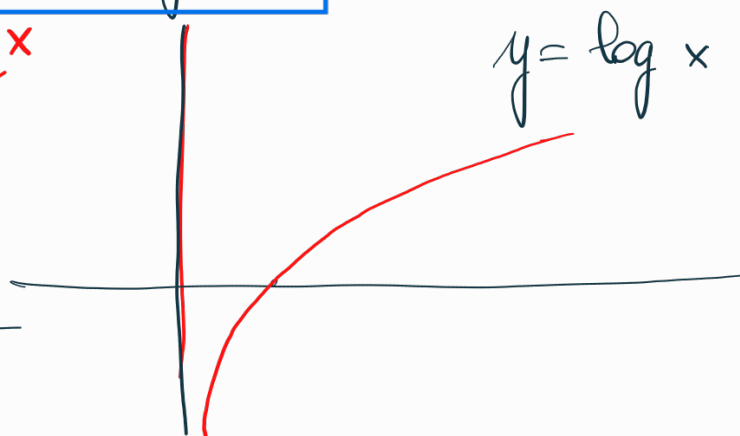
$$e = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,7182818284 \dots$$

(si può dim. che è irrazionale).

Si definisce $\log x = \ln x = \log_e x$



$$y = e^x$$



$$y = \log x$$

Conseguenze della def di e.

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{n}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{\downarrow \log 1 = 0} = (+\infty \cdot 0) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \log \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow e} = \log_e e = 1$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = (1^{+\infty}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{(n-1)+1}{n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{\substack{\text{"} \\ \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \rightarrow e \\ (m \rightarrow +\infty)}}} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)}_{\downarrow 1} =$$

$$= \frac{1}{e}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$$

3) Sia $b_n \rightarrow +\infty$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = (1^{+\infty})$$

oss b_n non è una successione di interi.

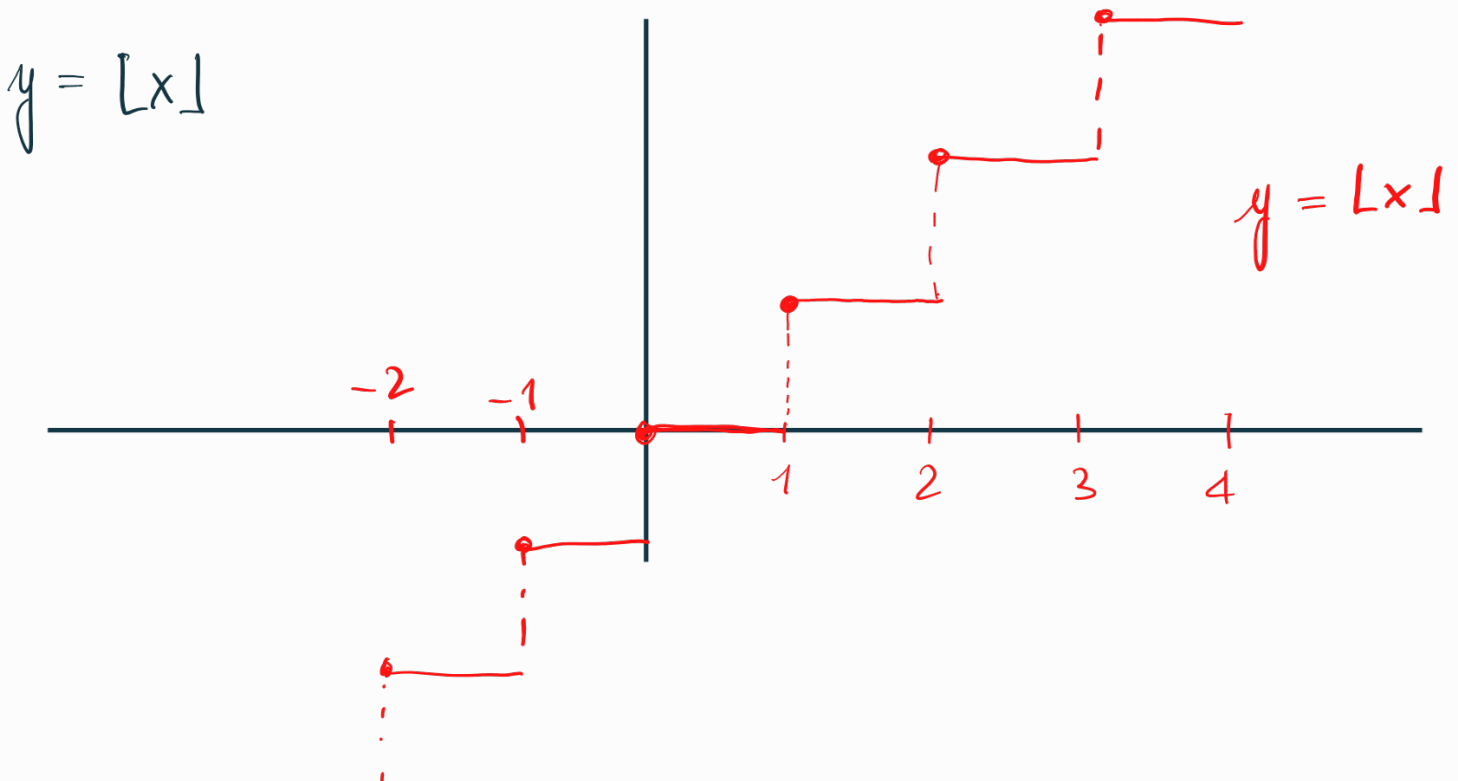
DEF Sia $x \in \mathbb{R}$. Si definisce la parte intera di x

$$\lfloor x \rfloor = \max \{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$$

$$\lfloor 4 \rfloor = 4$$

$$\lfloor \pi \rfloor = 3$$

$$\lfloor -\pi \rfloor = -4$$



OSS

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

$$\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n}$$

$$b_n \rightarrow +\infty$$

($b_n > 0$ def^{te})

$$\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \leq \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{\lfloor b_n \rfloor + 1} \leq \left(1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}\right)^{\lfloor b_n \rfloor + 1} =$$

$$b_n \geq \lfloor b_n \rfloor$$

$$\frac{1}{b_n} \leq \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}$$

$$= \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}\right)^{\lfloor b_n \rfloor}}_{\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m \rightarrow e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor}\right)}_{\downarrow 1}$$

(oss $\lfloor b_n \rfloor \rightarrow +\infty$)

Ho trovato un "carabiniere" dall'alto

$$\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \geq \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{\lfloor b_n \rfloor} \geq \left(1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor + 1}\right)^{\lfloor b_n \rfloor + 1} =$$

$$= \frac{\left(1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor + 1}\right)^{\lfloor b_n \rfloor + 1}}{1 + \frac{1}{\lfloor b_n \rfloor + 1}} \rightarrow e$$

è il "carabiniere" dal basso.

Se $b_n \rightarrow +\infty$, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e$

e se $b_n \rightarrow -\infty$?

$$c_n = -b_n \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = (1^{-\infty}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{c_n}\right)^{-c_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{c_n}\right)^{c_n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\left(\frac{c_n - 1}{c_n}\right)^{c_n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{c_n}{c_n - 1}\right)^{c_n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{c_n - 1}\right)^{c_n - 1}}_{\downarrow e} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{c_n - 1}\right)}_{\downarrow 1} = e$$

se $b_n \rightarrow \pm\infty$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n} = e.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = (1^{+\infty}) =$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\underbrace{n/a}_{\downarrow +\infty}}\right)^{\frac{n}{a}} \right]^a = e^a$$

Il caso $a=0$ si fa a parte ma è ovvio

e in realtà si ha anche

$$\text{se } b_n \rightarrow \pm\infty \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{b_n}\right)^{b_n} = e^a$$

I limiti di $\left(1 + \frac{a}{b_n}\right)^{b_n}$ con $b_n \rightarrow \pm\infty$

si usano per risolvere le f.i. $\infty \pm \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{n-4} = (1^{\pm\infty}) = \text{(aggiungo e tolgo 2 a num.)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{5}{n+2}\right)^{n-4} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\left(1 - \frac{5}{n+2}\right)^{n+2}}_{\downarrow e^{-5}} \right]^{\frac{n-4}{n+2}} \xrightarrow{\uparrow 1} = e^{-5}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n^2-3}{n^2}\right)^{1-3n} = (1^{\pm\infty}) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{\left(1 - \frac{3}{n^2}\right)^{n^2}}_{\downarrow e^{-3}} \right]^{\frac{1-3n}{n^2}} \xrightarrow{\downarrow 0} = 1$$

• Sia $b_n \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{b_n}_{\downarrow \pm\infty} \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)}_{\downarrow 0} = (\pm\infty \cdot 0) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \log\left[\left(1 + \frac{1}{b_n}\right)^{b_n}\right] = \log e = 1.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{(n^2 - 4)}_{\downarrow +\infty} \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}_{\downarrow 0} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{n^2 - 4}{n+1}\right)}_{\downarrow +\infty} \boxed{\underbrace{(n+1)}_{\downarrow 1} \underbrace{\log\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}_{\downarrow 1}} = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(n^3)}{1 + \log n} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \log n}{1 + \log n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \cancel{\log n}}{\cancel{\log n} \left(\underbrace{\frac{1}{\log n}}_{\downarrow 0} + 1 \right)} = 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^n + 5)}{3n + 7} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(e^n (1 + \frac{5}{e^n}))}{3n+7} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log e^n + \log(1 + \frac{5}{e^n})}{3n+7} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n + o(1)}{3n+7} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n (1 + \frac{o(1)}{n})}{n (3 + \frac{7}{n})} = \frac{1}{3}$$

OSS $\frac{o(1)}{n} = o(1)$ che vuol dire.

"una succ^{te} inf^{ma} divisa per n è ancora infinitesima

Uso degli $o(1)$

Ricordo che: $a_n = o(1)$ per $n \rightarrow +\infty$
 significa $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Cosa significa $a_n = 5 + o(1)$?

equivale a dire $a_n - 5$ è infinitesima, cioè

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 5$$

$$\frac{3 + o(1)}{2 + o(1)} \neq \frac{3}{2} + o(1)$$

$$\frac{5 + o(1)}{n^2} = o(1) ?$$

significa: " se prendo una generica successione che tende a 5 e la divido per n^2 , la frazione tende a zero" ed è vero.

$$o(1) + o(1) = o(1) \text{ significa}$$

la somma di due infinitesimi è infinitesima, ed è vero.

$$o(1) \cdot o(1) = o(1) ?$$

"il prodotto di due infinitesimi è infinitesimo, ed è vero."

$$\frac{o(1)}{o(1)} = o(1) ?$$

significa " il rapporto di due successioni infinitesime è sempre infinitesimo "

NON è vero, perché se prendo

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \cdot n^2 = n \rightarrow +\infty$$

$$c \cdot o(1) = o(1) ?$$

È vero, nel caso $c=0$, $c \cdot o(1)$ non è solo infinitesimo ma è identicamente nullo $\forall c \in \mathbb{R}$

$$(n + o(1))^2 = n^2 (1 + o(1))$$

Significa:

"se ho una succ^{te} infinitesima e la sommo a n , elevo al quadrato, e poi divido per n^2 , o tengo qualcosa che tende a 1

$$d_n \rightarrow 0$$

$$\frac{(n + d_n)^2}{n^2} \xrightarrow{?} 1$$

è vero!

$$\frac{n^2 \left(1 + \frac{d_n}{n}\right)}{n^2} \rightarrow 1$$

$$(n + o(1))^2 = n^2 + o(1)$$

Significa: se $d_n \rightarrow 0$

$$(n + d_n)^2 - n^2 \xrightarrow{?} 0 \quad \text{NO, infatti se prendo}$$

$$d_n = \frac{1}{n}$$

$$\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 = \cancel{n^2} + \frac{1}{n^2} + 2 - \cancel{n^2} \rightarrow 2$$

DEF Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni def^{te} diverse da zero.

Diremo che $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono **asintoticamente equivalenti**,

e scriveremo

$$a_n \sim b_n \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

$$\text{Se } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Esempio di coppie asintoticamente equivalenti

$$2n^2 + 3n + 5 \sim 2n^2$$

$$\text{Infatti } \frac{2n^2 + 3n + 5}{2n^2} \rightarrow 1$$

$$\frac{n+1}{2n^2+5} \sim \frac{1}{2n} \quad \text{Infatti}$$

$$\frac{\left(\frac{n+1}{2n^2+5} \right)}{\left(\frac{1}{2n} \right)} = \frac{(n+1)2n}{2n^2+5} \rightarrow 1$$