

DEF Una **funzione** f è una legge che associa ad ogni elemento x di un insieme A , detto **dominio**, un elemento $f(x) \in B$, dove B è un altro insieme, detto **codominio**.

$$\begin{array}{ccc}
 f: & A & \longrightarrow B \\
 \text{argomento} \longrightarrow & x & \longmapsto f(x) \longleftarrow \begin{array}{l} \text{valore di } f \text{ corrispondente a } x = \\ \text{immagine di } x \text{ tramite } f \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 f: & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} [0, +\infty) \\
 & x & \longmapsto x^2
 \end{array}$$

$$f(-3) = 9$$

Potenze con esponente intero $n \in \mathbb{N}$ ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\begin{array}{ccc}
 f: & \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\
 & x & \longmapsto x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_n
 \end{array}$$

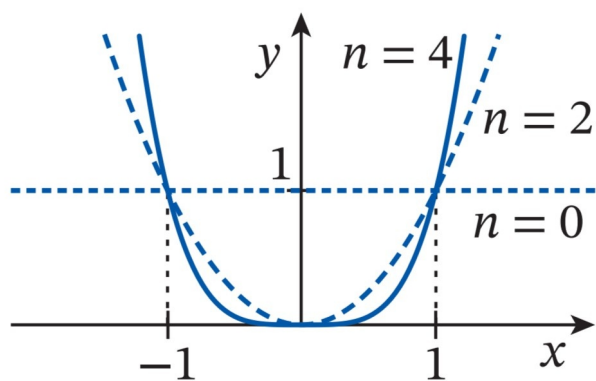


Figura 1.48 Grafico di x^n per n pari.

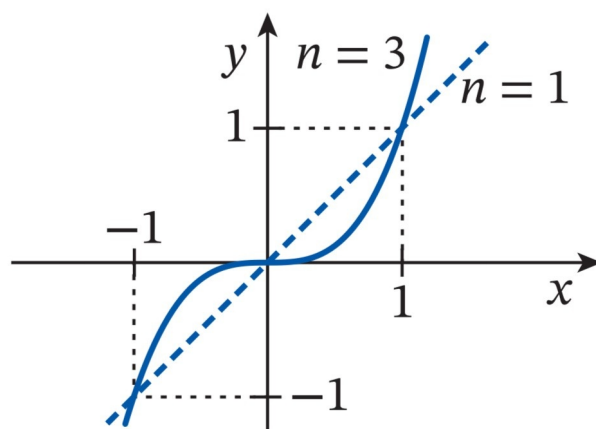


Figura 1.49 Grafico di x^n per n dispari.

DEF Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

$$f = \frac{f}{f}$$

Sia $f: A \rightarrow B$

Diremo che f è **crescente** se
decrecente

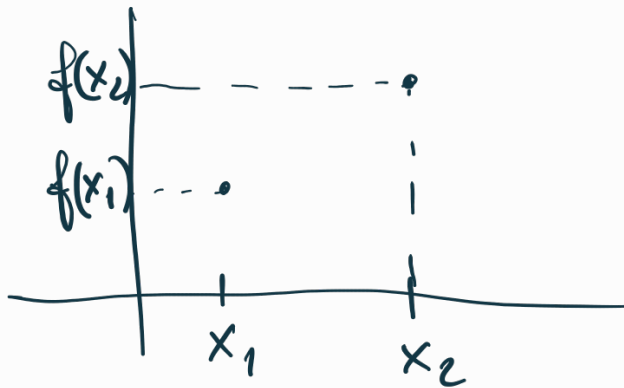
$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ t.c. } x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) \leq f(x_2)$$

$\geq$

f si dice **strettamente crescente** se
" **decrecente**

$$\forall x_1, x_2 \in A \text{ t.c. } x_1 < x_2 \text{ si ha } f(x_1) < f(x_2)$$

$>$



Prop $\forall n \in \mathbb{N}$ la funzione

$$f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = x^n$$

è strett. crescente.

Dim $n=0$ ovvio

$n=1$: siano x_1, x_2 t.c.

$$0 \leq x_1 < x_2 \stackrel{?}{\Rightarrow} \underbrace{f(x_1)}_{x_1} < \underbrace{f(x_2)}_{x_2}$$

$n=2$: $\forall x_1, x_2$ t.c. $0 \leq x_1 < x_2$

$$\stackrel{?}{\Rightarrow} \underbrace{f(x_1)}_{x_1^2} < \underbrace{f(x_2)}_{x_2^2}$$

$$x_2^2 - x_1^2 \stackrel{?}{>} 0$$

$$\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0} \underbrace{(x_2 + x_1)}_{>0}$$

OK

$n=3$ se $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 \stackrel{?}{<} x_2^3$

$$x_2^3 - x_1^3 \stackrel{?}{>} 0$$

$$\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\substack{\text{V} \\ 0}} \underbrace{(x_2^2 + x_1 x_2 + x_1^2)}_{\substack{\text{V} \\ 0}} \underbrace{\quad}_{\substack{\text{V} \\ 0}}$$

n generico > 3 : $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^n \stackrel{?}{<} x_2^n$

$$x_2^n - x_1^n \stackrel{?}{>} 0$$

OK!

$$\underbrace{(x_2 - x_1)}_{\substack{\text{V} \\ 0}} \underbrace{(x_2^{n-1} + x_2^{n-2} x_1 + x_2^{n-3} x_1^2 + \dots + x_2 x_1^{n-2} + x_1^{n-1})}_{> 0}$$

Il comportamento di $f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}_+$) per $x < 0$ è completamente diverso per n pari e per n dispari.

DEF una funzione $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice pari

se 1) A è simmetrico rispetto all'origine, cioè $x \in A \Rightarrow -x \in A$

2) $\forall x \in A \quad f(-x) = f(x)$

Esempi di funzioni pari:

$$f(x) = x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x^4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x^0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x^{-2} = \frac{1}{x^2}: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\cos x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$|x|:$$

$$\sqrt{|x|}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sin(x^4):$$

$$e^{-x^2}$$

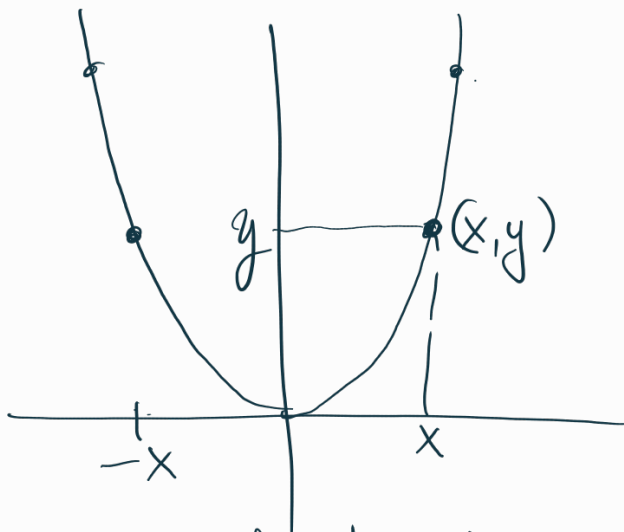
$$x \sin x$$

Le potenze $f(x) = x^2, x^4, x^n$ con $n \in \mathbb{N}_+$ pari
sono funzioni pari.

Se f è pari, allora

se $f(x) = y \iff (x, y)$ appartiene al grafico di f

$f(-x) = y \iff (-x, y)$ " " " "



Una funzione pari ha il grafico simmetrico rispetto all'asse y

Prop. Sia $n=2,4,6,\dots$

$$f(x) = x^n \text{ è}$$

- strettamente crescente in $[0, +\infty)$
- strett. decrescente in $(-\infty, 0]$

Siano $\boxed{x_1 < x_2 \leq 0} \Rightarrow x_1^n \overset{?}{>} x_2^n$

$x_1^n \overset{?}{>} x_2^n \Leftrightarrow \underset{\text{pari}}{(-x_1)^n \overset{?}{>} (-x_2)^n}$

$0 \leq -x_2 < -x_1 \nearrow$

Sia ora $f(x) = x^n$ $n=1,3,5,7,\dots$

DEF $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **dispari** se

- 1) A è simmetrico rispetto a $x=0$
- 2) $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A.$

Esempi di funzioni dispari

$$f(x) = x$$

$$x^3$$

$$\frac{1}{x^3}$$

$$\sin x$$

$$\sqrt[3]{x}$$

$$\operatorname{arctg} x$$

$$|x| \sin x$$

$$\sin(x^5)$$

$$|x| \sin x$$