

Arithmetica estesa (... continua)

basta $b_n \geq c > 0$

PROP

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow +\infty \\ b_n \rightarrow m \end{array} \right| \Rightarrow a_n b_n \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } m \in (0, +\infty] \\ -\infty & \text{se } m \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

basta $b_n \leq c < 0$

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow -\infty \\ b_n \rightarrow m \end{array} \right| \Rightarrow a_n b_n \rightarrow \begin{cases} -\infty & \text{se } m \in (0, +\infty] \\ +\infty & \text{se } m \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

Resto fuori da questa analisi il caso in cui

$a_n \rightarrow \pm\infty$,
 $b_n \rightarrow 0$ in questo caso può succedere di tutto.

Esempi

$$\left. \begin{array}{l} a_n = n \rightarrow +\infty \\ b_n = \frac{1}{n^2} \rightarrow 0 \end{array} \right| \Rightarrow a_n b_n = \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = n^2 \rightarrow +\infty \\ b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \end{array} \right| \Rightarrow a_n b_n = \frac{n^2}{n} = n \rightarrow +\infty$$

Fare esempi in cui $a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow 0$, e

$a_n b_n \rightarrow 3$ oppure -3 , oppure non ha limite

" $\pm\infty \cdot 0$ è una forma indeterminata"

Rapporti di successioni.

PROP se $|b_n| \rightarrow +\infty$, (questo è vero in particolare se $b_n \rightarrow +\infty$, se $b_n \rightarrow -\infty$, ma anche se $b_n = (-1)^n n$)

allora $\frac{1}{b_n} \rightarrow 0$

Dim. $\frac{1}{b_n} \xrightarrow{?} 0$.

$\forall \varepsilon > 0$ deve essere $\left| \frac{1}{b_n} \right| < \varepsilon$ def^{te}

$$\left| \frac{1}{b_n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{|b_n|} < \varepsilon \Leftrightarrow |b_n| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{vero def}^{\text{te}} \text{ perché } |b_n| \rightarrow +\infty.$$

□

Per esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2 - 4} = \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0$

PROP se $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$, $b_n \rightarrow \pm\infty$, allora

$$\frac{a_n}{b_n} \rightarrow 0$$

↖ basta che $\{a_n\}$ sia limitata.

Dim $\frac{a_n}{b_n} = \underbrace{a_n}_{\downarrow l} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{b_n} \right)}_{\downarrow 0} = 0$ □

" $\frac{l}{\pm\infty} = 0$ " $\forall l \in \mathbb{R}$.

OSS se $a_n \rightarrow \pm\infty$, $b_n \rightarrow \pm\infty$, allora non si può dire nulla sul rapporto $\frac{a_n}{b_n}$.

" $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ " è una forma indeterminata.

Fare esempi di succⁿⁱ $a_n, b_n \rightarrow \pm\infty$ e t.c. il rapporto $\frac{a_n}{b_n}$ tenda a 0, $+\infty$, $\neq$, non esista.

Bisogna studiare il limite di $\frac{a_n}{b_n}$ quando $b_n \rightarrow 0$.

Bisogna dare una definizione che permetta di distinguere se $b_n \rightarrow 0$ "da numeri positivi" o "da numeri negativi".

DEF Sia $\{a_n\}$ una succ^{ne} di numeri reali, e sia $l \in \mathbb{R}$.
Diremo che a_n tende a l "per eccesso" oppure "dall'alto" se $a_n \rightarrow l$ e in più $a_n > l$ def^{te}.
"per difetto" oppure "dal basso" $<$

e scriveremo $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l^+$

Questo significa che

$\forall \varepsilon > 0$ si ha $l < a_n < l + \varepsilon$ def^{te}.
 $l - \varepsilon < a_n < l$

Esempio $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{n^2} \right) = 2^-$$

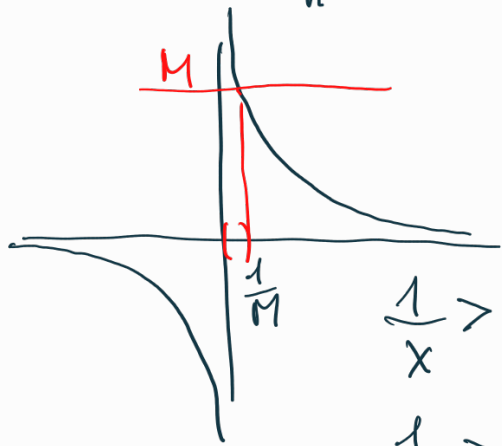
PROP. Se $b_n \rightarrow 0^+$, allora $\frac{1}{b_n} \rightarrow +\infty$. (1)
 $b_n \rightarrow 0^-$, allora $\frac{1}{b_n} \rightarrow -\infty$

Dim (1) Se $b_n \rightarrow 0^+$, vuol dire che
 $\forall \varepsilon > 0$ definitivamente $0 < b_n < \varepsilon$

$$\frac{1}{b_n} \xrightarrow{?} +\infty$$

Fisso $M > 0$, devo vedere se $\frac{1}{b_n} > M$ def^{te}

$$\frac{1}{b_n} > M \Leftrightarrow \underset{\substack{\text{def}^{\text{te}} \\ b_n > 0}}{b_n} < \frac{1}{M} \quad \text{vero def}^{\text{te}}.$$



$$y = \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{x} > M \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{M}$$

$$\frac{1}{b_n} > M \Leftrightarrow 0 < b_n < \frac{1}{M} \quad \text{vero def}^{\text{te}}.$$

PROP Se $\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow l \\ b_n \rightarrow 0^+ \end{array} \right| \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } l \in (0, +\infty] \\ -\infty & \text{se } l \in [-\infty, 0) \end{cases}$
 $\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow l \\ b_n \rightarrow 0^- \end{array} \right| \Rightarrow \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \begin{cases} -\infty & \text{se } l \in (0, +\infty] \\ +\infty & \text{se } l \in [-\infty, 0) \end{cases}$

Dim se $a_n \rightarrow l \in (0, +\infty]$, $b_n \rightarrow 0^+$

$$\frac{a_n}{b_n} = \underbrace{a_n} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{b_n}\right)}_{\substack{\downarrow \\ +\infty}} \rightarrow +\infty \quad \text{etc..}$$

$$" \frac{l}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } l > 0 \\ -\infty & \text{se } l < 0 \end{cases} "$$

$$" \frac{+\infty}{0^+} = +\infty "$$

$$" \frac{l}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \text{se } l > 0 \\ +\infty & \text{se } l < 0 \end{cases} "$$

$$" \frac{+\infty}{0^-} = -\infty "$$

$$" \frac{-\infty}{0^+} = -\infty "$$

$$" \frac{-\infty}{0^-} = +\infty "$$

Resta indeterminato il caso in cui $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 0$

" $\frac{0}{0}$ è una forma indeterminata "

Tabella 2.1 Algebra (parziale!) dei limiti in $\mathbb{R}^*$ ($\ell \in \mathbb{R}$)

Somma	Prodotto	Quoziente
$\pm\infty + \ell = \pm\infty$ $+\infty + \infty = +\infty$ $-\infty - \infty = -\infty$	$(\pm\infty) \cdot \ell = \begin{cases} \pm\infty & \text{se } \ell \in (0, +\infty) \\ \mp\infty & \text{se } \ell \in (-\infty, 0) \end{cases}$ $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$ $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$	$\frac{\ell}{+\infty} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } \ell \in (0, +\infty) \\ 0^- & \text{se } \ell \in (-\infty, 0) \end{cases}$ $\frac{\ell}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell \in (0, +\infty) \\ -\infty & \text{se } \ell \in (-\infty, 0) \end{cases}$ $\frac{\ell}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \ell \in (0, +\infty) \\ +\infty & \text{se } \ell \in (-\infty, 0) \end{cases}$ $\frac{\pm\infty}{0^+} = \pm\infty, \quad \frac{\pm\infty}{0^-} = \mp\infty$

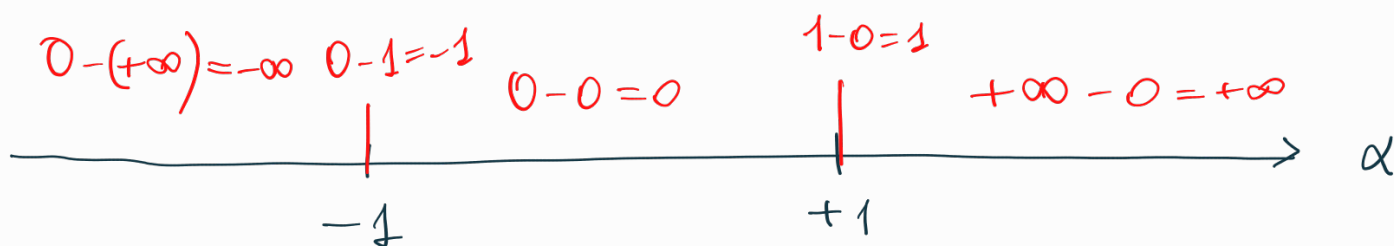
Abbiamo trovato quattro forme indeterminate

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\alpha-1} - n^{-\alpha-1}) = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 1 \\ 1 & \text{se } \alpha = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < \alpha < 1 \\ -1 & \text{se } \alpha = -1 \\ -\infty & \text{se } \alpha < -1 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$n^{\alpha-1} \rightarrow \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$n^{-\alpha-1} \rightarrow \begin{cases} 0 & \alpha > -1 \quad (-\alpha-1 < 0) \\ 1 & \alpha = -1 \\ +\infty & \alpha < -1 \quad (-\alpha-1 > 0) \end{cases}$$



$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^5 + 2n^3 - 12) = (+\infty + \infty - 12) = +\infty$$

$\downarrow$ $\downarrow$
 $+\infty$ $+\infty$

Studio di forme indeterminate: limiti di polinomi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^5 - 2n^3 - 12) = (+\infty - \infty) =$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad -\infty$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^5 \left(1 - \frac{2}{n^2} - \frac{12}{n^5} \right) = +\infty.$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad 0 \quad 0$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_1$

In un ^{generico} polinomio, ragionando come sopra,

$$\begin{aligned} P_k(n) &= a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 = \\ &= \sum_{j=0}^k a_j n^j \end{aligned} \quad a_j \in \mathbb{R}, \quad a_k \neq 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_k(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^k \left(a_k + \frac{a_{k-1}}{n} + \frac{a_{k-2}}{n^2} + \dots + \frac{a_1}{n^{k-1}} + \frac{a_0}{n^k} \right)$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$
 $+\infty \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$
 $\underbrace{\hspace{15em}}_{a_k \neq 0}$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } a_k > 0 \\ -\infty & \text{se } a_k < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (12 - n^6 + 5n^4 - 3n^2) = -\infty$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^6 (-1 + \text{"roba che tende a zero"}) \rightarrow -\infty$$

Limiti di funzioni razionali fratte (rapporti di polinomi)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 2n + 5}{-n^2 + n + 1} = \left(\frac{+\infty}{-\infty} \right) =$$
$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{n^2} \left(3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^2} \right)}{\cancel{n^2} \left(-1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} = \frac{3}{-1} = -3$$

Notazione importante

Sia $\{a_n\}$ una successione.

Diremo che $a_n = o(1)$ (per $n \rightarrow +\infty$)

se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$

Per esempio, scriviamo.

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{n} = o(1) \\ \frac{5}{n^2+3} = o(1) \end{array} \right| \Rightarrow \text{oss da questo non segue} \quad \frac{1}{n} = \frac{5}{n^2+3}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2 - 2n + 5}{-n^3 + n + 1} = \left(\frac{+\infty}{-\infty} \right) =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 \left(\right.$$