

Limiti di potenze. $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

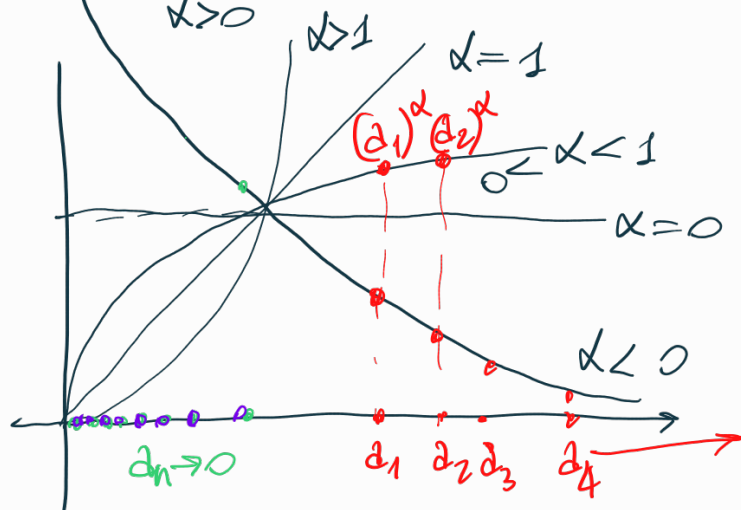
Questo si estende al caso in cui, al posto di n , c'è una successione $a_n \rightarrow +\infty$

$$\text{Se } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty, \text{ allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Per es. se $\alpha > 0$.

Fissato $M > 0$, voglio che sia $(a_n)^\alpha > M$ def^{te}.

$$(a_n)^\alpha > M \iff a_n > M^{1/\alpha} \text{ vero def^{te} perché } a_n \rightarrow +\infty.$$



$$y = x^\alpha$$

Sia ora $\{a_n\}$ t.c. $a_n > 0$, $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0 \end{cases}$$

Per es. dim. il caso $\alpha < 0$:

Fisso $M > 0$, vorrei che fosse $(a_n)^\alpha > M$ def^{te}.

$$(a_n)^\alpha > M \iff_{\alpha < 0} a_n < \underbrace{M^{1/\alpha}}_0 \text{ vero def}^{\text{te}} \text{ perché } a_n \rightarrow 0$$

Supponiamo ora che $a_n \rightarrow a \in (0, +\infty)$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^\alpha = a^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Esempio:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{5n-2}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5n-2}{n}\right)^{1/2} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$$

oss $\frac{5n-2}{n} = 5 - \frac{2}{n} \rightarrow 5$

Proviamo a dimostrare che $(a_n)^\alpha \rightarrow a^\alpha$

Fissato $\varepsilon > 0$, devo provare che

$$|(a_n)^\alpha - a^\alpha| < \varepsilon \text{ def}^{\text{te}} \quad ?$$

$$a^\alpha - \varepsilon < (a_n)^\alpha < a^\alpha + \varepsilon$$

(1)

(2) dimostriamo che (2) vale def^{te}.

$$(a_n)^\alpha < a^\alpha + \varepsilon \iff_{\alpha > 0} a_n < \underbrace{(a^\alpha + \varepsilon)^{1/\alpha}}_a \text{ vero def}^{\text{te}} \quad \alpha > 0$$

Esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^4 + 3n^2 + 2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^4 + 3n^2 + 2)^{1/3} = +\infty$$

$\frac{1}{3} > 0$

OSS

$$n^4 + 3n^2 + 2 > n^4 \rightarrow +\infty$$

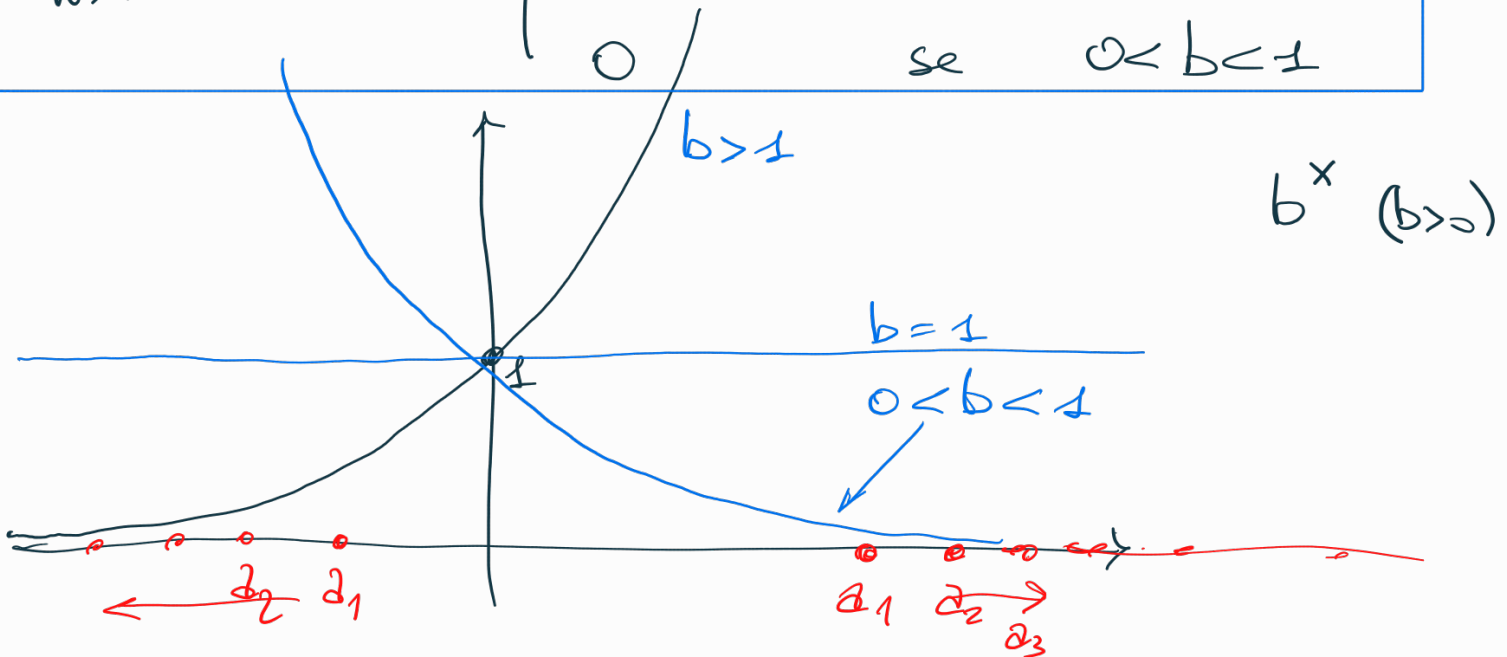
$$\Rightarrow n^4 + 3n^2 + 2 \rightarrow +\infty$$

Limiti di esponenziali. Ricordare: $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = \begin{cases} +\infty & b > 1 \\ 1 & b = 1 \\ 0 & -1 < b < 1 \\ \text{A} & b \leq -1 \end{cases}$

Sia ora $b > 0$ ($b \in \mathbb{R}_+$)

Se $\{a_n\}$ verifica $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, allora

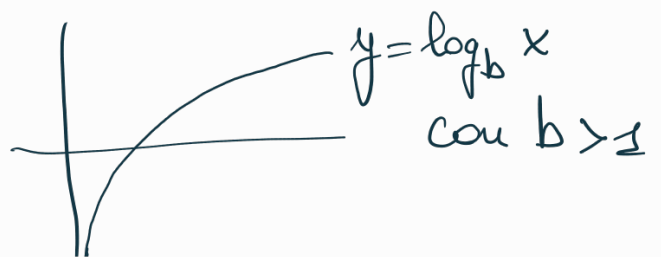
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ 1 & \text{se } b = 1 \\ 0 & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$



Dm nel caso $b > 1$

Fissato $M > 0$, voglio che sia $b^{a_n} > M$ def^{te}.

$$b^{a_n} > M \iff a_n > \underbrace{\log_b M}_{\substack{\text{applico } \log_b x \\ b > 1}} \quad \text{vero def}^{\text{te}} \text{ poich\'e } a_n \rightarrow +\infty$$



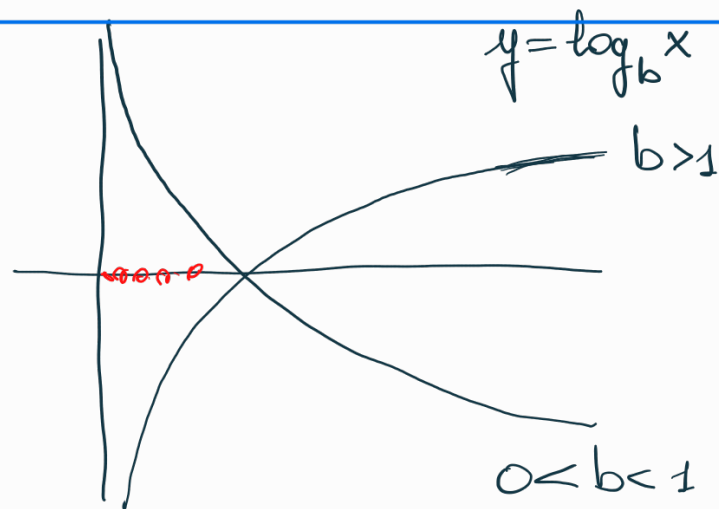
Se ora $a_n \rightarrow -\infty$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = \begin{cases} 0 & \text{se } b > 1 \\ 1 & \text{se } b = 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1. \end{cases}$$

Infine se $a_n \rightarrow a \in \mathbb{R}$, allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^{a_n} = b^a \quad \forall b > 0.$$

Limiti di logaritmi.



1) Sia $\{a_n\}$ t.c. $a_n \rightarrow +\infty$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_b a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < b < 1. \end{cases}$$

2) Sia $a_n > 0$ t.c. $a_n \rightarrow 0$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_b a_n = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1. \end{cases}$$

3) Sia $a_n > 0$ t.c. $a_n \rightarrow a \in (0, +\infty)$. Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log_b a_n = \log_b a$$

TEOREMA (Aritmetica dei limiti)

Siano $\{a_n\}, \{b_n\}$ due successioni t.c.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = m \in \mathbb{R}. \quad \text{Allora:}$$

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = l + m ;$$

$$2) \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha l + \beta m$$

(linearità del limite)

(oss: se prendo $\alpha = 1, \beta = -1$, ottengo

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - b_n) = l - m$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = l m ;$$

$$4) \text{ se } m \neq 0, \text{ allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{m} ;$$

↑ oss se $m \neq 0$,
anche $b_n \neq 0$ def^{te}

$$5) \text{ se } m \neq 0, \text{ allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l}{m}.$$

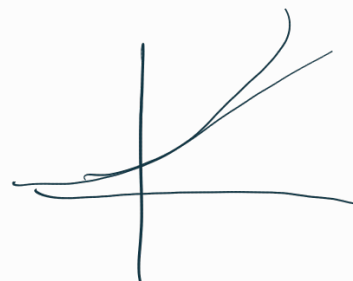
Esempi.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{7}{n^{-3} + 1} \right) = 2 - 7 = -5$$

Annotations: A blue circle highlights the fraction $\frac{7}{n^{-3} + 1}$. An arrow points from the 7 to the value 7 in the result. Red arrows point from n^{-3} to 0 and from 1 to 1 in the denominator.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 + 3^{-n}}{-1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{5}{-1} = -5$$

Annotations: Red arrows point from 5 to 5 and from 3^{-n} to 0. In the denominator, red arrows point from -1 to -1 and from $\frac{1}{\sqrt{n}}$ to 0, with the note $n^{-1/2} \rightarrow 0$.



Prima di dimostrare il teorema sull'aritmética, ci serve uno strumento importante.

TEOREMA Sia $\{a_n\}$ una successione convergente (cioè: $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$). Allora $\{a_n\}$ è limitata. (cioè: $\exists M$ t.c. $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$)

Dim $a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n} \quad |a_n - l| < \varepsilon$.

Prendo $\varepsilon = 1 \Rightarrow \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq \bar{n} \quad |a_n - l| < 1$.

$$|a_n| = |(a_n - l) + l| \stackrel{\text{dis. triang.}}{\leq} |a_n - l| + |l| < 1 + |l|$$

$\forall n \geq \bar{n}$

Cosa succede per $n = 0, 1, \dots, \bar{n} - 1$?

Questi sono un numero finito di indici.

Scego $M = \{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\bar{n}-1}|, 1+|l|\}$

Affermo che $|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

• se $n \geq \bar{n} \quad |a_n| \leq 1+|l| \leq M$

• se $n = 0, 1, \dots, \bar{n}-1$

$$|a_n| \leq M$$

□

Dim teorema dell'aritmetica dei limiti

1) se $a_n \rightarrow l, \forall \varepsilon_1 > 0 \quad |a_n - l| < \varepsilon_1 \text{ def }^{\text{te}}$
 $b_n \rightarrow m \quad \forall \varepsilon_2 > 0 \quad |b_n - m| < \varepsilon_2 \text{ def }^{\text{te}}$

Tesi: $a_n + b_n \rightarrow l + m$

devo provare che $\forall \varepsilon > 0 \quad |(a_n + b_n) - (l + m)| < \varepsilon \text{ def }^{\text{te}}$

$$|(a_n + b_n) - (l + m)| = |(a_n - l) + (b_n - m)| \leq (\text{dis. triangolare})$$

$$\leq \underbrace{|a_n - l|}_{\hat{\varepsilon}/2} + \underbrace{|b_n - m|}_{\hat{\varepsilon}/2} \stackrel{\text{def }^{\text{te}}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Prendo $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ nella prima ipotesi $\Rightarrow |a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ def }^{\text{te}}$

$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2} > 0$ " seconda ipotesi $\Rightarrow |b_n - m| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ def }^{\text{te}}$

□

2) se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, devo provare che $\alpha a_n + \beta b_n \rightarrow \alpha l + \beta m$

$a_n \rightarrow l, \alpha \in \mathbb{R} \xRightarrow{\text{ges. dim.}} \alpha a_n \rightarrow \alpha l$

$$b_n \rightarrow m, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta b_n \rightarrow \beta m.$$

$$\underbrace{\alpha a_n}_{\downarrow \alpha l} + \underbrace{\beta b_n}_{\downarrow \beta m} \xrightarrow{(1)} \alpha l + \beta m$$

3) devo provare che $a_n b_n \rightarrow lm$.

Uso il teor. dei carabinieri, per provare che

$$|a_n b_n - lm| \rightarrow 0$$

$$0 \leq |a_n b_n - lm| = |(a_n b_n - l b_n) + (l b_n - lm)| \leq$$

dis. triang

$$\leq |a_n b_n - l b_n| + |l b_n - lm|$$

$$= \underbrace{|b_n|}_{\text{limitata}} \underbrace{|a_n - l|}_{\downarrow 0} + |l| \underbrace{|b_n - m|}_{\downarrow 0} \xrightarrow{(1)} 0$$

$\underbrace{\text{limitata} \times \text{infinitesima}}_{\downarrow 0}$

4) se $b_n \rightarrow m \neq 0$, allora $\frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{m}$

devo provare che $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{m} \right| \rightarrow 0$

$$0 \leq \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{m} \right| = \frac{|m - b_n|}{|b_n m|} = \frac{|b_n - m|}{b_n m} < \frac{|b_n - m|}{m^2} \rightarrow 0$$

$\uparrow$
defte
 b_n ha lo stesso segno di m .

Supponiamo per semplicità $m > 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |b_n - m| < \varepsilon \quad \text{def}^{\text{te}}$$

$$\text{scelgo } \varepsilon = \frac{m}{2} > 0 \quad |b_n - m| < \frac{m}{2} \quad \text{def}^{\text{te}}$$

$$\frac{m}{2} = m - \frac{m}{2} < b_n < m + \frac{m}{2} \quad \text{def}^{\text{te}}$$

$\Downarrow$

$$\frac{1}{b_n} < \frac{2}{m} \quad \text{def}^{\text{te}}$$

$$5) \quad a_n \rightarrow l, \quad b_n \rightarrow m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \rightarrow \frac{l}{m}$$

$$\frac{a_n}{b_n} = \underbrace{a_n}_{\downarrow l} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{b_n}\right)}_{\substack{\downarrow (4) \\ 1/m}} \xrightarrow{(3)} l \cdot \frac{1}{m} = \frac{l}{m} \quad \square$$

Vogliamo "estendere" questa aritmetica ai casi di limiti infiniti, oppure denominatore zero, ...

$$\text{Esempio} \quad \begin{array}{l} a_n \rightarrow +\infty \\ b_n \rightarrow -2 \end{array} \quad \Bigg| \quad \Rightarrow \quad a_n + b_n \rightarrow +\infty$$

PROP Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = m \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\text{Allora} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = +\infty$$

In sintesi:

$$\begin{aligned} & \text{"} +\infty + m = +\infty \text{"} \quad \forall m \in \mathbb{R} \\ & \text{"} +\infty + \infty = +\infty \text{"} \end{aligned}$$

Dim.

OSS se $b_n \rightarrow m \in \mathbb{R} \Rightarrow b_n > m-1$ def^{te}
 $b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow b_n > 0$ def^{te}

In ogni caso $b_n > k$ def^{te}

$$a_n + b_n > a_n + k \xrightarrow{\times} +\infty$$

def^{te}

Fissato $M > 0$, $a_n + k > M \Leftrightarrow a_n > M - k$
vero def^{te} perché $a_n \rightarrow +\infty$

Thm. del carabinieri $\Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty$

□

In realtà abbiamo provato di più:

PROP. se $a_n \rightarrow +\infty$
 b_n limitata inferiormente $\Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty$

esempio

$$\underbrace{3n}_{\downarrow +\infty} + \underbrace{4(-1)^n}_{\text{limitata}} \rightarrow +\infty$$

Risultato corrispondente se $a_n \rightarrow -\infty$

PROP. se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$

se $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

(in realtà basta $\{b_n\}$ limitata superiormente)

allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = -\infty$

In simboli

$$\begin{aligned} & \text{"} -\infty + m = -\infty \text{" } \forall m \in \mathbb{R} \\ & \text{"} -\infty - \infty = -\infty \text{"} \end{aligned}$$

Cosa succede ad $a_n + b_n$ se

$a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow -\infty$? Può succedere di tutto.

$$\left. \begin{array}{l} a_n = 2n \rightarrow +\infty \\ b_n = -n \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow a_n + b_n = 2n - n = n \rightarrow +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = n \rightarrow +\infty \\ b_n = -2n \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow a_n + b_n = n - 2n = -n \rightarrow -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = n+5 \rightarrow +\infty \\ b_n = -n \end{array} \right\} \Rightarrow a_n + b_n = n+5-n = 5 \rightarrow 5$$

$$\left. \begin{array}{l} a_n = n + (-1)^n \rightarrow +\infty \\ b_n = -n \end{array} \right\} \Rightarrow a_n + b_n = n + (-1)^n - n = (-1)^n$$

non ha limite.

Si dice che $"+\infty - \infty"$ è una forma indeterminata
(va esaminata caso per caso)

Vediamo i prodotti

PROP se $a_n \rightarrow +\infty$
 $b_n \rightarrow m$ $\left| \Rightarrow a_n b_n \rightarrow \begin{cases} +\infty & \text{se } m \in (0, +\infty] \\ -\infty & \text{se } m \in [-\infty, 0) \end{cases} \right.$

In breve

$$\begin{aligned} & \text{"} +\infty \cdot m = +\infty \text{" } \forall m > 0 \\ & \text{"} +\infty \cdot m = -\infty \text{" } \forall m < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &'' + \infty \cdot (+\infty) = +\infty '' \\ &'' + \infty \cdot (-\infty) = -\infty '' \end{aligned}$$

Dm .. se $b_n \rightarrow m \in (0, +\infty) \Rightarrow b_n \stackrel{\text{def}^{\text{te}}}{>} \frac{m}{2} > 0$

$$a_n b_n \stackrel{\text{def}^{\text{te}}}{>} a_n \frac{m}{2} \rightarrow +\infty$$

perché $b_n > \frac{m}{2}$ def
e $a_n > 0$ def

$$a_n \frac{m}{2} > M \Leftrightarrow a_n > \frac{M2}{m} \text{ vero def}^{\text{te}}$$

se $b_n \rightarrow +\infty \Rightarrow b_n > 1$ def^{te}

$$a_n b_n > a_n \cdot 1 = a_n \rightarrow +\infty$$

• se $b_n \rightarrow m < 0$

Pongo $m = -k$ $k > 0$

$$b_n \rightarrow -k \Rightarrow b_n < -\frac{k}{2} \text{ def}^{\text{te}}$$

$$a_n b_n \stackrel{\text{def}^{\text{te}}}{<} -\frac{a_n k}{2} \rightarrow -\infty$$

• se $b_n \rightarrow -\infty$ farlo da soli.

□

OSS in realtà per questo dm. ci è bastato che

$$\begin{aligned} &a_n \rightarrow +\infty \\ &b_n \geq c > 0 \text{ def}^{\text{te}} \end{aligned} \Bigg| \Rightarrow a_n b_n \rightarrow +\infty.$$

Per es $\underbrace{n}_{\downarrow +\infty} \underbrace{(3+2\text{sen } n)}_{\substack{\text{non ha limite} \\ \text{ma } \bar{e} \geq 3-2=1 > 0}} \rightarrow +\infty$

Analogamente se $a_n \rightarrow -\infty$

$$\begin{array}{l} a_n \rightarrow -\infty \\ b_n \rightarrow m \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow \quad a_n b_n \rightarrow \begin{cases} -\infty & \text{se } m \in (0, +\infty] \\ +\infty & \text{se } m \in [-\infty, 0) \end{cases}$$

$$'' (-\infty) \cdot m = -\infty '' \quad \forall m > 0$$

$$'' -\infty \cdot m = +\infty '' \quad \forall m < 0$$

$$'' (-\infty)(+\infty) = -\infty ''$$

$$'' (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty ''$$

Resta escluso il caso $a_n \rightarrow \pm\infty$, $b_n \rightarrow 0$ in cui può succedere di tutto (fare esempi)

'' $\pm\infty \cdot 0$ '' è una forma indeterminata.