

Proprietà del valore assoluto.

7) dis. triangolare

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

Questo si scrive anche nella forma

$$|x-y| = |(x-z) + (z-y)| \leq |x-z| + |z-y|$$

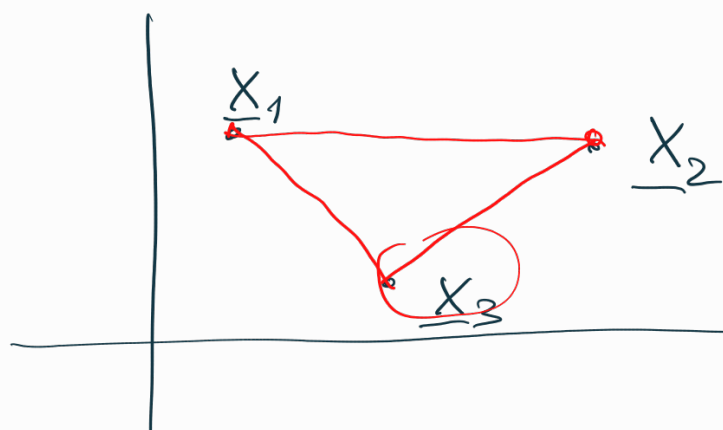
Oss in $\mathbb{R}^2$ si introduce una distanza tra due punti:

$$\underline{x}_1 = (x_1, y_1) \quad \underline{x}_2 = (x_2, y_2)$$

$$|\underline{x}_1 - \underline{x}_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Anche in questo caso vale una dis. triangolare

$$|\underline{x}_1 - \underline{x}_2| \leq |\underline{x}_1 - \underline{x}_3| + |\underline{x}_3 - \underline{x}_2|$$



E' la nota proprietà per cui ogni lato ha lunghezza minore della somma delle lunghezze degli altri due.

7')

dis. triangolare per la differenza

$$||x| - |y|| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

dm $|x| = \overbrace{|x-y+y|}^{\text{dis. triang}} \leq |x-y| + |y|$

$$\Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y| \quad (*)$$

Scambio x e y

$$|y| - |x| \leq |x-y|$$

$$|x| - |y| \geq -|x-y| \quad (**)$$

$$-\underbrace{|x-y|}_r \leq |x| - |y| \leq \underbrace{|x-y|}_r$$

$$\stackrel{(5)}{\Rightarrow} ||x| - |y|| \leq |x-y| \quad \square$$

8) $|x|^2 = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$||x| = |x| \quad |x|^4 = x^4$$

Una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice pari quando
 $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

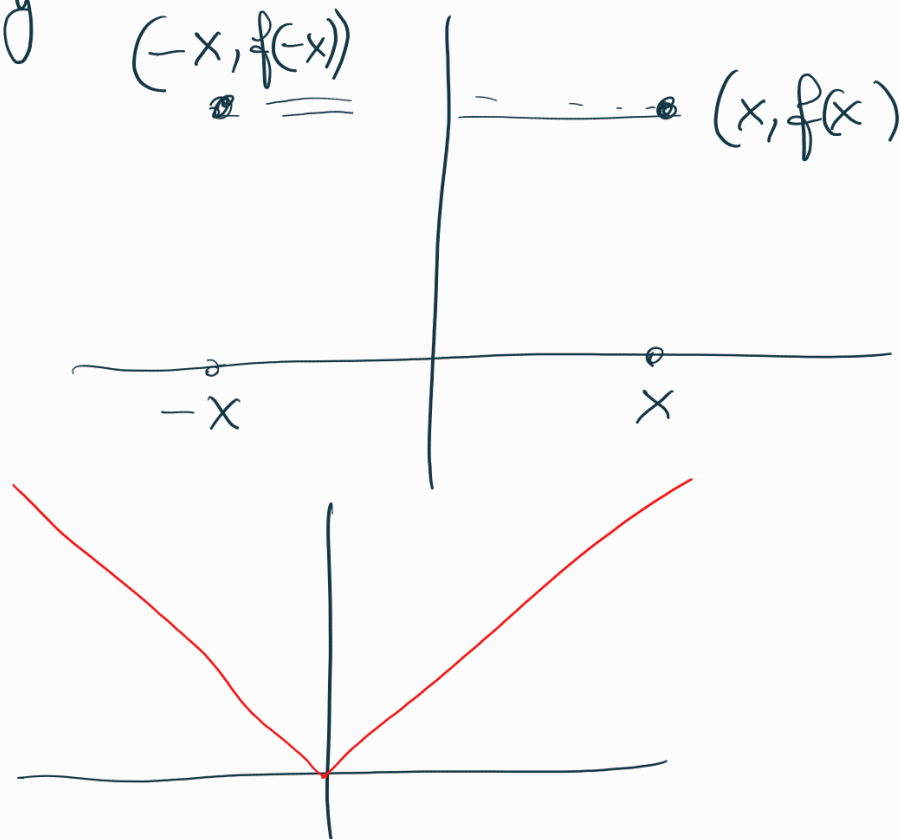
Esempi di funzioni pari: $f(x) = x^2, x^4, x^6$

$\cos x, \frac{1}{x^2}, |x|$.

9) $f(x) = |x|$ è una funzione pari, cioè

$$|-x| = |x| \quad \forall x$$

Una funzione pari ha il grafico simmetrico risp. all'asse y



Ricordo che $E \subseteq \mathbb{R}$ è limitato se $\exists a, b \in \mathbb{R}$ t.c. $a \leq x \leq b \quad \forall x \in E$.

~~10~~ $(-7, 3)$

10) Un insieme $E \subset \mathbb{R}$ è limitato $\Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \exists k \geq 0$ t.c. $|x| \leq k$
 $\forall x \in E$



Se $|x| \leq k \quad \forall x \in E$, vuol dire

$$\underbrace{-k}_{=: a} \leq x \leq \underbrace{k}_{=: b}$$

$\Rightarrow$

Supponiamo che $-8 \leq x \leq 3 \quad \forall x \in E$

$$|x| \leq \max \{3, 8\} = 8$$

Supponiamo che $a \leq x \leq b \quad \forall x \in E$

$$\begin{aligned} -|a| &\leq a \leq x \leq b \leq |b| \leq \underbrace{\max \{|a|, |b|\}}_r \\ &\parallel \\ &\min \{-|a|, -|b|\} \\ &\parallel \\ &\underbrace{-\max \{|a|, |b|\}}_{-r} \end{aligned}$$

(5)

$\Rightarrow$

$$|x| \leq r = \max \{|a|, |b|\}$$

$$f(x) = \frac{|x^2 - 3x|}{3 - |x|} = \frac{|x| |x - 3|}{3 - |x|}$$

Vogliamo "spezzare" la funzione togliendo i valori assoluti nei vari intervalli

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } \cancel{x-3 \geq 0} \quad x \geq 3 \\ 3-x & \text{se } \cancel{x-3 < 0} \quad x < 3 \end{cases}$$



III) se $x \geq 3 \quad (\Rightarrow x \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} |x-3| = x-3 \\ |x| = x \end{cases}$

$$f(x) = \frac{|x| |x-3|}{3-|x|} = \frac{x \cancel{(x-3)}^{-1}}{\cancel{3-x}} = -x$$

II) $0 \leq x < 3 \Rightarrow \begin{cases} |x-3| = 3-x \\ |x| = x \end{cases}$

$$f(x) = \frac{x(3-x)}{3-x} = x$$

I) $x < 0 \Rightarrow \begin{cases} |x-3| = 3-x \\ |x| = -x \end{cases}$

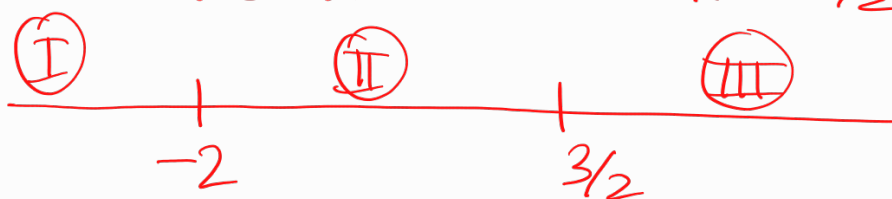
$$f(x) = \frac{-x(3-x)}{3+x} = \frac{x^2-3x}{3+x}$$

Esercizio 1 Risolvere la diseq^{ue}

$$|x+2| \leq |2x-3| + 1$$

$$|x+2| = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \geq -2 \\ -x-2 & \text{se } x < -2 \end{cases}$$

$$|2x-3| = \begin{cases} 2x-3 & \text{se } x \geq 3/2 \\ 3-2x & \text{se } x < 3/2 \end{cases}$$

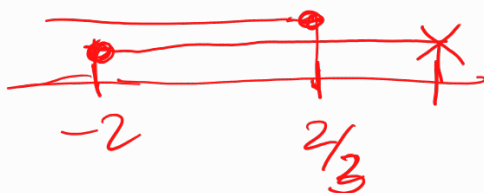


$$\begin{cases} x \geq 3/2 \\ x+2 \leq 2x-3+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x \geq 3/2 \end{cases}$$

$$\vee \begin{cases} -2 \leq x < 3/2 \\ x+2 \leq 3-2x+1 \end{cases}$$

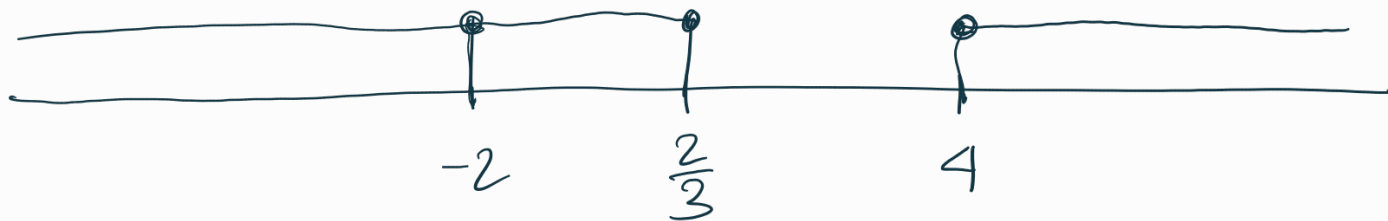
$$\begin{cases} 3x \leq 2 \\ -2 \leq x < 3/2 \end{cases}$$



$$\vee \begin{cases} x < -2 \\ -x-2 \leq 3-2x+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 6 \\ x < -2 \end{cases}$$

$$(x \geq 4) \quad \vee \quad (-2 \leq x < \frac{2}{3}) \quad \vee \quad (x < -2)$$



Solⁿ:

$$x \leq \frac{2}{3}$$

$\vee$

$$x \geq 4$$