

Esempio importante:  $b \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ 1 & \text{se } b = 1 \\ 0 & \text{se } -1 < b < 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } b \leq -1 \end{cases}$$

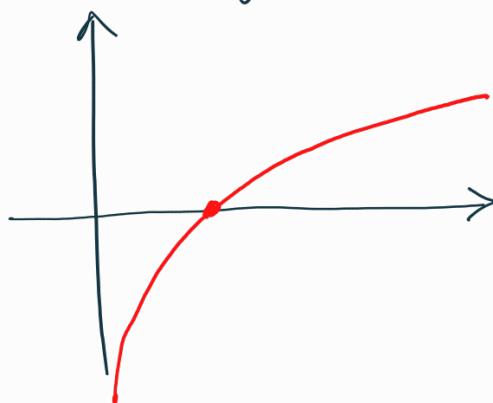
Dim.

$b > 1$  Voglio provare che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b^n = +\infty$

$\forall M > 0$  cerco  $k$  t.c.  $b^n > M \quad \forall n > k$ .

$$b^n > M \iff \log_b(b^n) = n > \log_b M =: k$$

Voglio applicare alla discg. il  $\log_b$



$$y = \log_b x \quad (b > 1)$$

Caso  $b = 1$  banale perché  $b^n = 1 \quad \forall n$

Caso  $-1 < b < 1$  ( $|b| < 1$ )

se  $b = 0$  è ovvio, quindi supponiamo  $0 < |b| < 1$

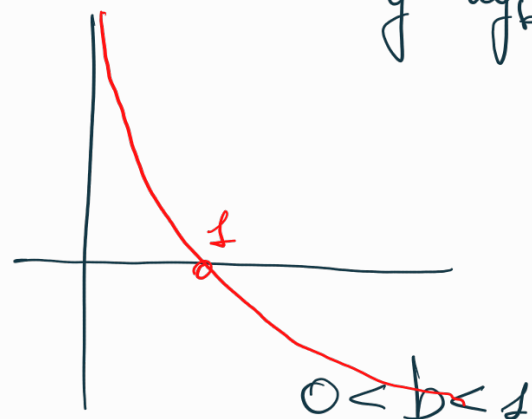
Devo provare che  $b^n \rightarrow 0$

$\forall \varepsilon > 0$  cerco  $k$  t.c.  $|b^n - 0| < \varepsilon \quad \forall n > k$ .

$$\underbrace{|b^n|}_{|b|^n} < \varepsilon \iff \log_{|b|}(|b|^n) = n > \log_{|b|} \varepsilon =: k.$$

Applico il log in base  $|b| \in (0, 1)$

$$y = \log_b(x)$$



Caso  $b \leq -1$ .

Il caso  $b = -1$  è già stato visto

Se  $b < -1$ , abbiamo che per  $n$  pari  $b^n > 1$   
per  $n$  dispari  $b^n < -1$

e quindi evidentemente non ha limite.

Proprietà dei limiti.

Teorema (unicità del limite)

Sia  $\{a_n\}$  una successione. Allora

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ , se esiste, è unico.

Dim Per assurdo, supponiamo che  $\{a_n\}$  abbia due limiti diversi:  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^*$ ,  $l_1 \neq l_2$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_1 \Leftrightarrow \forall U_1 \text{ intorno di } l_1 \text{ si ha def}^te a_n \in U_1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_2 \Leftrightarrow \forall U_2 \text{ " " } l_2 \text{ " " " } a_n \in U_2.$$

OSS se  $l_1 \neq l_2$  posso trovare un intorno  $U_1$  di  $l_1$  e un intorno  $U_2$  di  $l_2$  disgiunti:  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ .

• Se  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$



basta prendere  $U_1 = (l_1 - \varepsilon, l_1 + \varepsilon)$

$$U_2 = (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$$

con  $\varepsilon < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$

• se  $l_1 \in \mathbb{R}$ ,  $l_2 = +\infty$



Prendo  $U_1 = (l_1 - 1, l_1 + 1)$ ,  $U_2 = (l_1 + 2, +\infty)$

• Se  $l_1 = -\infty$ ,  $l_2 = +\infty$

prendo  $U_1 = (-\infty, 0)$   $U_2 = (0, +\infty)$

Presi quindi  $U_1$  e  $U_2$  disgiunti, si ha:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_1 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l_2 \Leftrightarrow$$

$$\text{si ha def}^{\text{te}} a_n \in U_1$$

$$'' '' '' a_n \in U_2.$$

$$\Rightarrow a_n \in U_1 \cap U_2 \text{ def}^{\text{te}} \text{ assurdo perche'}$$

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset. \quad \square$$

OSS se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ ,

e  $\tilde{a}_n$  è una successione ottenuta modificando  
un numero finito (anche grande) di elementi,

anche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{a}_n = l$ .

In fatti  $a_n = \tilde{a}_n \text{ def}^{\text{te}}$

## TEOREMA (Permanenza del segno)

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l > 0$  (più precisamente:  $l \in (0, +\infty]$ )

allora  $a_n > 0 \text{ def}^{\text{te}}$ .

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l < 0$  (più precisamente:  $l \in [-\infty, 0)$ )

allora  $a_n < 0 \text{ def}^{\text{te}}$ .

Dim Se  $l \in (0, +\infty]$ , posso trovare un intorno  $V$  di  $l$  costituito da soli numeri positivi:

$l = +\infty$ , prendo  $V = (0, +\infty)$

$l \in (0, +\infty)$ , prendo  $V = (0, 2l)$ .



Perché def<sup>te</sup>  $a_n \in V$ , allora  $a_n > 0$  def<sup>te</sup>  $\square$

OSS A volte il teorema si usa così:

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } a_n \geq 0 \text{ def}^{\text{te}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \end{array} \right| \Rightarrow l \geq 0$$

Per assurdo, se fosse  $l < 0$ , per il teor. dovrebbe essere  $a_n < 0$  def<sup>te</sup>, in contraddizione con l'ipotesi.

ATTENZIONE: Il seguente ragionamento è errato:

~~$$\left. \begin{array}{l} \text{se } a_n > 0 \text{ def}^{\text{te}} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \end{array} \right| \Rightarrow l > 0$$~~ **FALSO**

Per es  $a_n = \frac{1}{n} > 0$ , ma  $l = 0$

Facile generalizzazione: il teor. si può estendere a numeri diversi da zero.

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n > C \quad \Rightarrow \quad a_n > C \quad \text{def}^{\text{te}}$$

Per es., se  $a_n \rightarrow 6$ , posso dire che  $\text{def}^{\text{te}} a_n > 5$   
e che  $a_n < 6,1 \text{ def}^{\text{te}}$ .

$$\text{Oppure se } a_n \leq 2 \text{ def}^{\text{te}} \quad \left| \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \right| \Rightarrow l \leq 2.$$

$$\text{se } a_n \rightarrow 3, \text{ allora def}^{\text{te}} \quad \frac{5}{2} < a_n < 4$$

Teorema dei carabinieri (confronto)

Siano  $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$  tre successioni t.c.

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{definitivamente.}$$

Se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = l \in \mathbb{R}^*$ , allora

$$\text{anche } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l.$$

Esempio:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$$

$$-1 \leq \sin n \leq 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 $0$                        $0$

Quindi (sarebbero) anche  $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$ .

---

OSS Spesso il teorema dei Carabini si usa così:  
se  $l \in \mathbb{R}$ , allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - l| = 0$$

Quindi, per provare che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ , faccio così:

$$0 \leq |a_n - l| \leq c_n \rightarrow 0$$

Basta quindi trovare  $c_n$  t.c.  $c_n \rightarrow 0$   
 $|a_n - l| \leq c_n$  def<sup>te</sup>.

---

Per esempio, per provare che  $\frac{\sin n}{n} \rightarrow 0$

$$0 \leq \left| \frac{\sin n}{n} \right| = \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}$$

$\downarrow$   
 $0$

Dim. teor. dei carabini:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \Rightarrow \forall V$  intorno di  $l$  si ha  $a_n \in V$  def<sup>te</sup>.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = l \Rightarrow \forall V \text{ " } \underbrace{\quad}_{\text{"}} c_n \in V \text{ def }^{\text{te}}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ a_n, c_n \in V^{\text{def } t_e} \\ \Downarrow \end{array}$$

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ def}^te$$

anche  $b_n \in V^{\text{def } t}$

Poiché questo vale  $\forall V$  intorno di  $l$ , abbiamo provato  
che  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$



OSS se per caso  $l = +\infty$  opp.  $-\infty$ ,  
di caratteriere ne basta uno:

TEOREMA "del carabinieri"

Se  $a_n \leq b_n$  def<sup>te</sup>, allora.

- se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ , anche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = +\infty$
- se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = -\infty$ , anche  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ .

## Esempio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (5 - 2 \cos^2 n)(n^2 - 1) = +\infty$$

OSS

$$5 - 2\cos^2 n \geq 5 - 2 = 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(5 - 2\cos^2 n)(n^2 - 1) \geq \underbrace{3(n^2 - 1)}_{\rightarrow +\infty} \quad \forall n \geq 1$$

Per il teor. del carabinieri, anche la succ<sup>ne</sup> di partenza tende a  $+\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5n}{n + \cos^2 n} = 5$$

Devo provare che  $\left| \frac{5n}{n + \cos^2 n} - 5 \right| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \frac{5n}{n + \cos^2 n} - 5 \right| &= 5 \left| \frac{\cancel{n} - \cancel{n} - \cos^2 n}{n + \cos^2 n} \right| = \\ &= 5 \frac{\overbrace{\cos^2 n}^{\leq 1}}{n + \cos^2 n} \leq \frac{5}{n + \cos^2 n} \leq \frac{5}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

oss  $|- \cos^2 n| = \cos^2 n$

$$|n + \cos^2 n| = n + \cos^2 n$$

DEF Una successione  $\{a_n\}$  si dice **infinitesima**

se  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ .

La succ<sup>ne</sup>  $\{a_n\}$  si dice:

- limitata super. se  $\exists M$  t.c.  $a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- " inferom. se  $\exists m$  t.c.  $a_n \geq m$  "
- limitata se è limitata sup. e inf, cioè se  
$$m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Oss  $\{a_n\}$  è limitata  $\Leftrightarrow \exists L \geq 0$  t.c.  
 $|a_n| \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .  
( $\rightarrow$  Labor. di Matematica)

$$\frac{\sin n}{n} = \underbrace{\sin n}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{\text{infinitesima}} \rightarrow 0$$

Questo si può generalizzare,

TEOREMA. Il prodotto di una successione limitata per una succ<sup>te</sup> infinitesima è infinitesimo.

In formule:

$$\left. \begin{array}{l} a_n \rightarrow 0 \\ |b_n| \leq L \end{array} \right| \Rightarrow a_n b_n \rightarrow 0$$

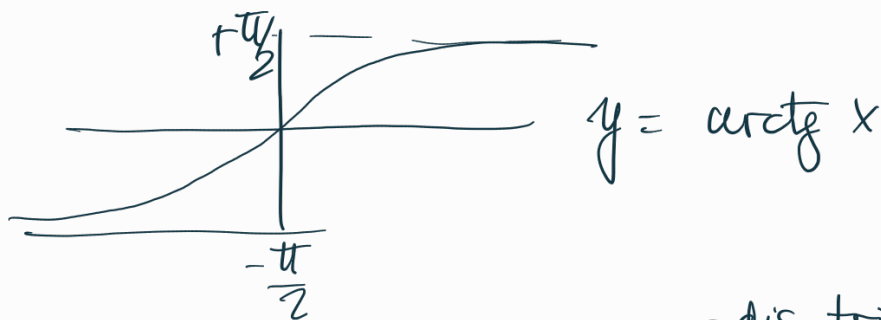
Dim

$$0 \leq |a_n b_n| = |a_n| \cdot \underbrace{|b_n|}_{\leq L} \leq L \underbrace{|a_n|}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3 \sin^4(n^2) - 5 \arctg n}{n^2 + 2} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} (3 \sin^4 n^2 - 5 \arctg n) \cdot \underbrace{\frac{1}{n^2 + 2}}_{\rightarrow 0} = 0$$

Vediamo se  $3 \sin^4(n^2) - 5 \arctg n$  è limitato.



$$\begin{aligned}
 |3 \sin^4(n^2) - 5 \arctg n| &\stackrel{\text{dis. triang}}{\leq} \underbrace{|3 \sin^4(n^2)|}_{\leq 3} + \underbrace{|5 \arctg n|}_{\leq \frac{5\pi}{2}} \leq \\
 &\leq 3 + \frac{5\pi}{2} \\
 &\text{limitata}
 \end{aligned}$$

OSS

$$\frac{1}{n^2+2} \rightarrow 0$$

$$0 < \frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

Limiti di potenze

Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = \begin{cases} +\infty \\ 1 \\ 0 \end{cases}$$

se  $\alpha > 0$

se  $\alpha = 0$

se  $\alpha < 0$

Dim se  $\alpha = 0$  ovvio, perché  $n^0 = 1 \rightarrow 1$

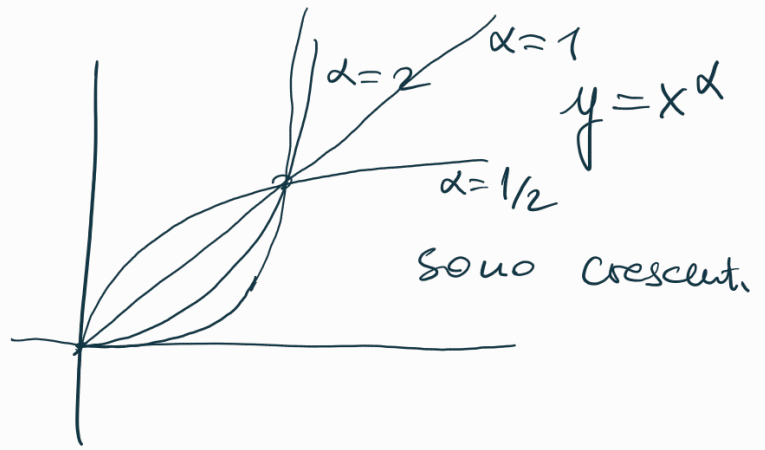
se  $\alpha > 0$ .

$$n^\alpha \xrightarrow{?} +\infty$$

Fisso  $M > 0$ , cerca  $k$  t.c.  $\forall n > k \quad n^\alpha > M$ .

$$n^\alpha > M \Leftrightarrow n > M^{1/\alpha} =: k$$

elevo alla  $\frac{1}{\alpha} > 0$



Caso  $\alpha < 0$ .  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$

Fisso  $\varepsilon > 0$ , cerco  $K$  t.c.  $\forall n > K \quad |n^\alpha| < \varepsilon$

$$|n^\alpha| < \varepsilon \Leftrightarrow n^\alpha < \varepsilon \Leftrightarrow n > \varepsilon^{1/\alpha}$$

elevo alla  $\frac{1}{\alpha} < 0$

$f(x) = x^\alpha$  è strett. decres  
 per  $\alpha < 0$

