

Abbiamo parlato di

- numeri razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\} =$$

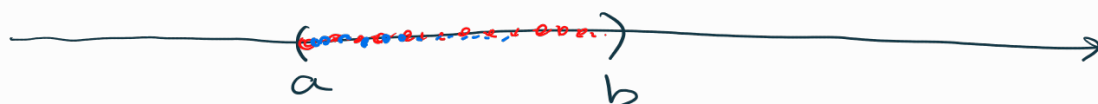
$$= \{ \text{sviluppi decimali finiti o periodici} \}$$

$$\mathbb{R} = \{ \text{sviluppi decimali qualsiasi (anche infiniti non periodici)} \}$$

Densità dei razionali e degli irrazionali.

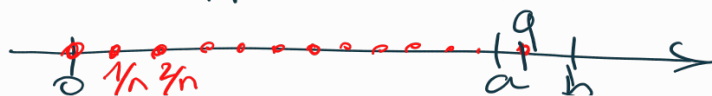
PROP

In ogni intervallo $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ ci sono infiniti numeri razionali e infiniti numeri irrazionali.



Cenno della dim.

Cominceremo a mostrare che in (a, b) c'è almeno un razionale. Supponiamo per semplicità $0 < a < b$



Prendo $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \frac{1}{b-a} \Rightarrow \frac{1}{n} < b-a$

e poi considero i numeri razionali

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots, \frac{k}{n}, \dots \quad (k \in \mathbb{N})$$

e ce n'è almeno uno che si trova tra a e b .
Una volta trovato un tale numero razionale q ,
ne esiste un altro tra a e q , e così via.

Per i numeri irrazionali, lavoro con i numeri della
forma $\frac{\sqrt{2} \cdot k}{n} \quad k=0, 1, 2, \dots \quad \square$

Una grossa differenza tra i razionali e gli irrazionali
è che

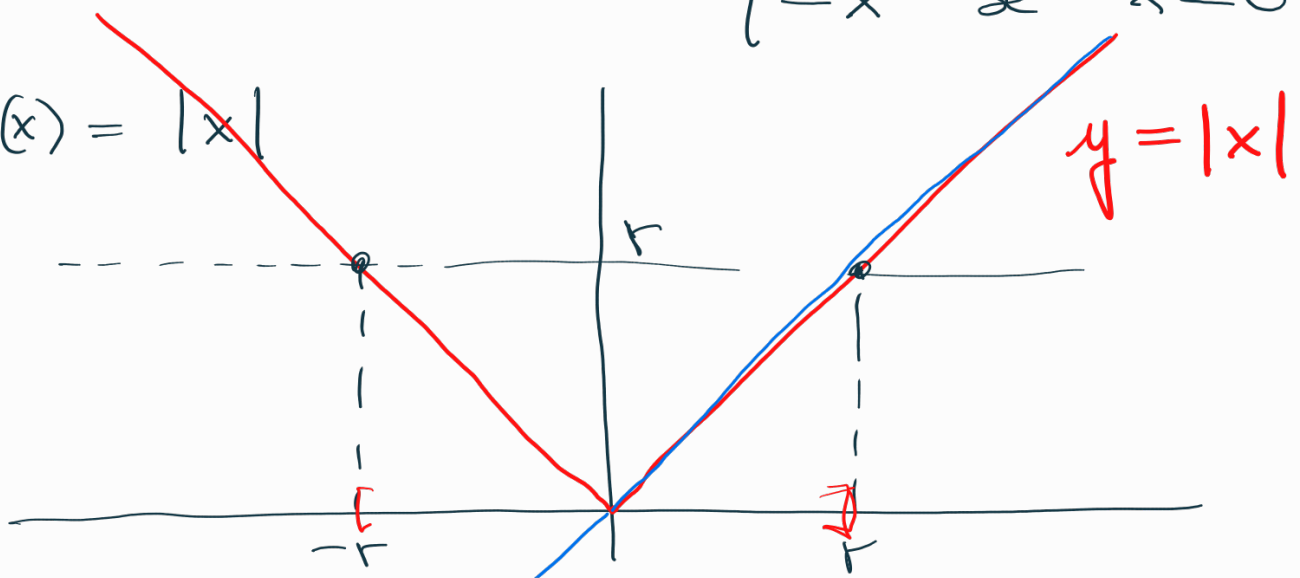
i razionali "si possono contare", cioè $\exists$ una
successione di numeri che contiene tutti i razionali.

Mentre gli irrazionali (e quindi i reali) non sono
numerabili (non si possono contare).

Valore assoluto

se $x \in \mathbb{R}$, allora $|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$

$$f(x) = |x|$$



$$\left| \frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4}, \quad |-\pi| = \pi$$

Proprietà del valore assoluto.

$$1) |x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$|x| = 0 \iff x = 0$$

$$2) \text{ Fissato } r > 0$$

$$|x| = r \iff x = \pm r.$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x = r \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ -x = r \end{cases}$$

$$(x = r > 0) \vee (x = -r < 0)$$

$$3) |xy| = |x| |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

dim. per casi.

$$a) x \geq 0, y \geq 0 \Rightarrow xy \geq 0$$

$$|xy| \stackrel{?}{=} |x| |y|$$

$$\begin{matrix} xy & & x & y \\ & \text{"} & & \text{"} \end{matrix}$$

OK.

$$b) x \geq 0, y < 0 \Rightarrow xy \leq 0$$

$$|xy| \stackrel{?}{=} |x| |y|$$

$$\begin{matrix} -xy & & x & (-y) \\ & \text{"} & & \text{"} \end{matrix}$$

OK.

$$c) \quad x < 0, \quad y \geq 0 \Rightarrow \text{idem.}$$

$$d) \quad x < 0, \quad y < 0 \Rightarrow xy > 0$$

$$\underset{\text{"}}{xy} \stackrel{?}{=} \underset{\text{"}}{|x|} \underset{\text{"}}{|y|} \\ \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ xy \quad (-x) \quad (-y)$$

□

$$4) \quad \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad y \neq 0$$

dim. simile.

5) Sia $r > 0$ fissato. Allora

$$|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r.$$

⇔

$$\underbrace{\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq r \end{cases}}_{0 \leq x \leq r} \vee \underbrace{\begin{cases} x < 0 \\ -x \leq r \iff x \geq -r \end{cases}}_{-r \leq x < 0}$$

⇔

$$-r \leq x \leq r$$



5') Sia $r > 0$ fissato.

$$\underset{>}{|x|} \geq r \iff (x \underset{<}{\leq} -r) \vee (x \underset{>}{\geq} r)$$

$$6) -|x| \leq x \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

si dimostra facilmente separando i due casi.

oppure, sinteticamente

$$|x| \leq \underbrace{|x|}_r \Leftrightarrow \begin{array}{ccc} -r & \leq x \leq & r \\ || & & || \\ -|x| & & |x| \end{array}$$

7) dis. triangolare.

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

dim. a) facendo tutti i vari casi.

$$\begin{array}{l} \text{b) sintetica.} \\ -|x| \leq x \leq |x| \\ -|y| \leq y \leq |y| \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{-(|x|+|y|)}_{-r} & \leq x+y \leq & \underbrace{|x|+|y|}_r \\ & \updownarrow (5) & \end{array}$$

$$|x+y| \leq r = |x| + |y|$$

7') dis. triangolare per la differenza

$$||x|-|y|| \leq |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$|x|$ si interpreta come la distanza di x dall'origine 0
 $|x-y|$ " " " di x da y