

Sia $\{a_n\}$ una succ^{te} di numeri reali.

Sia $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = \mathbb{R}^*$.

Diremo che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \text{se}$$

$\forall U$ intorno di l si ha $a_n \in U$ def^{te}.

ossia

$\forall U$ intorno di $l \exists K$ t.c. $a_n \in U \forall n > K$.

1° caso: $l \in \mathbb{R}$

in questo caso $U = (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$.

Allora

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > K$$

Esempio Voglio dimostrare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\sqrt{4 - \frac{3}{n}}}_{a_n} = 2 \quad l = 2$$

Devo provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \text{ t.c. } \forall n > K \quad \left| \sqrt{4 - \frac{3}{n}} - 2 \right| < \varepsilon.$$

$$\left| \underbrace{\sqrt{4 - \frac{3}{n}} - 2}_{\substack{\uparrow \\ 0}} \right| < \varepsilon$$



$$2 - \sqrt{4 - \frac{3}{n}} < \varepsilon$$



$$\underbrace{\sqrt{4 - \frac{3}{n}}}_{\substack{\uparrow \\ 0}} > \underbrace{2 - \varepsilon}_{\substack{\uparrow \\ 0}}$$

Impongo $0 < \varepsilon \leq 2$ (lo posso fare, vedi discussione fatta ieri)



$$\cancel{4} - \frac{3}{n} > (2 - \varepsilon)^2 = \cancel{4} - 4\varepsilon + \varepsilon^2$$



$$\frac{3}{n} < 4\varepsilon - \varepsilon^2 = \underbrace{\varepsilon(4 - \varepsilon)}_{\substack{\uparrow \\ 0}}$$



$$n > \frac{3}{\varepsilon(4 - \varepsilon)} =: K$$

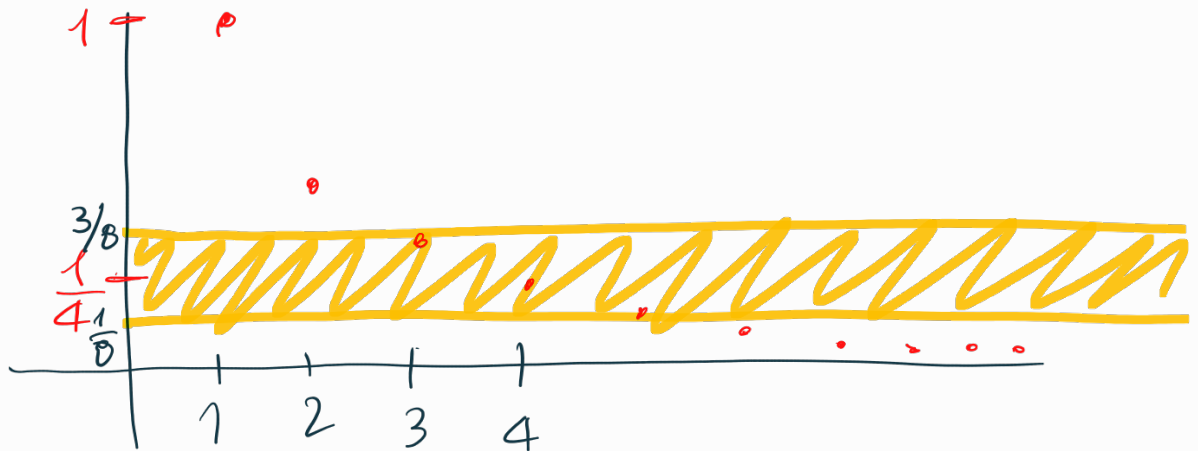
Così succede se proviamo a verificare un limite "sbagliato"?

Voglio provare a verificare che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{4} = l.$$

Vorrei provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \text{ t.c. } \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon \quad \forall n > K.$$



Se prendo $\varepsilon = \frac{1}{8}$, dovrei verificare che

$$\exists K \text{ t.c. } \forall n > K \quad \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow n > 4$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{n} < \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} > \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$n < 8$$

per questa scelta di $\varepsilon > 0$

Quindi $\nexists K$ t.c. $\forall n > K$ si abbia $\left| \frac{1}{n} - \frac{1}{4} \right| < \varepsilon$

e quindi è falso che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$.

$$\text{OSS} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - l| = 0$$

(1) (2)

$$(1) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \text{ t.c. } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > k.$$

$$(2) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \text{ t.c. } \underbrace{||a_n - l| - 0|}_{\text{"} |a_n - l| \text{"}} < \varepsilon \quad \forall n > k$$

Quindi sono uguali tra loro!

□

$$\text{OSS 2} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (c a_n) = c l$$

• se $c = 0$, il risultato è ovvio

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (0 \cdot a_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0 = 0 \cdot l.$$

• se $c \neq 0$ allora devo provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |c a_n - c l| < \varepsilon \quad \text{def}^{\text{te}}$$

"
 $|c| |a_n - l|$

$$\Leftrightarrow |a_n - l| < \left(\frac{\varepsilon}{|c|} \right) = \varepsilon' > 0 \quad \text{def}^{\text{te}}.$$

e questo è vero perché $a_n \rightarrow l$

2° caso $l = +\infty$

Gli intorno di $+\infty$ sono della forma

$$V = (M, +\infty) \quad \text{con } M \in \mathbb{R}.$$

La def^{ne} diventa:

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists k \quad \text{t.c.} \quad \forall n > k \quad a_n > M.$$

oss se verifico questa condizione per un certo M , automaticamente la condizione sarà vera per tutti gli M più piccoli (con la stessa scelta di k).

Quindi basta verificare la condizione $\forall M \geq M_0$ con M_0 fissato da noi a piacere.

Per esempio basta prendere $M > 0$.

La def^{ne} diventa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0 \quad \exists k \quad \text{t.c.} \quad \forall n > k \quad a_n > M.$$

Esempio: Verifichiamo che

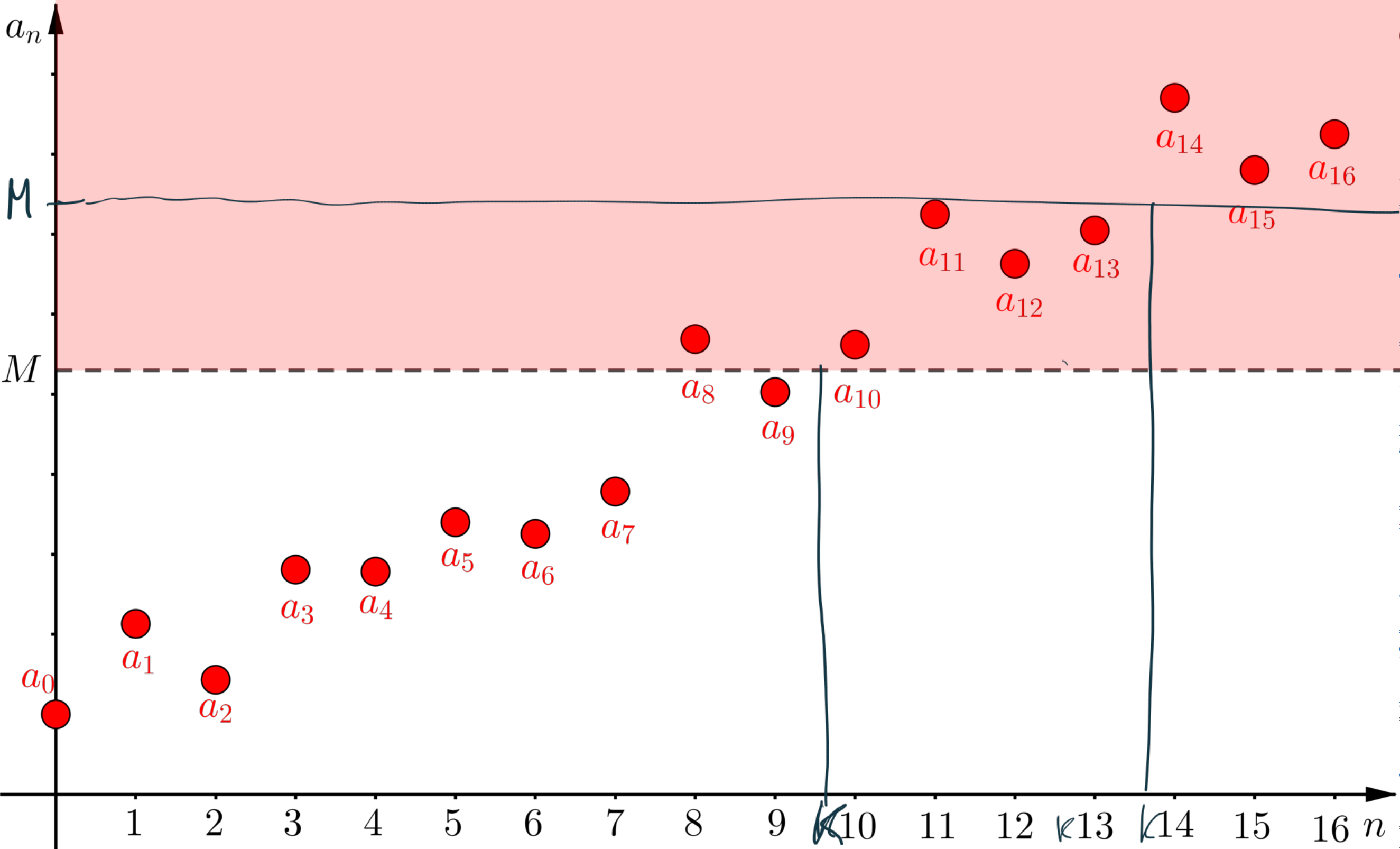
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 4) = +\infty$$

Fissato $M > 0$, cerco k t.c. se $n > k$ si ha

$$n^2 - 4 > M.$$



$$n^2 > M + 4 > 0$$



$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ n > \sqrt{M+4} =: k \end{array}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^4 - 5n^2} = +\infty$$

Fisso $M > 0$, cerco k t.c. $\forall n > k \quad \sqrt[3]{n^4 - 5n^2} > M$.

$$a < b \Leftrightarrow a^3 < b^3$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ n^4 - 5n^2 > M^3 \end{array}$$

$$n^4 - 5n^2 = n^2 \cdot \underbrace{(n^2 - 5)}_{\substack{\forall \text{ se } n \geq 3 \\ 4}} \geq 4n^2 > M^3 \quad n > \frac{\sqrt{M^3}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{M^3}}{2}$$

Prendo $k = \max \left\{ 3, \frac{M^{3/2}}{2} \right\}$

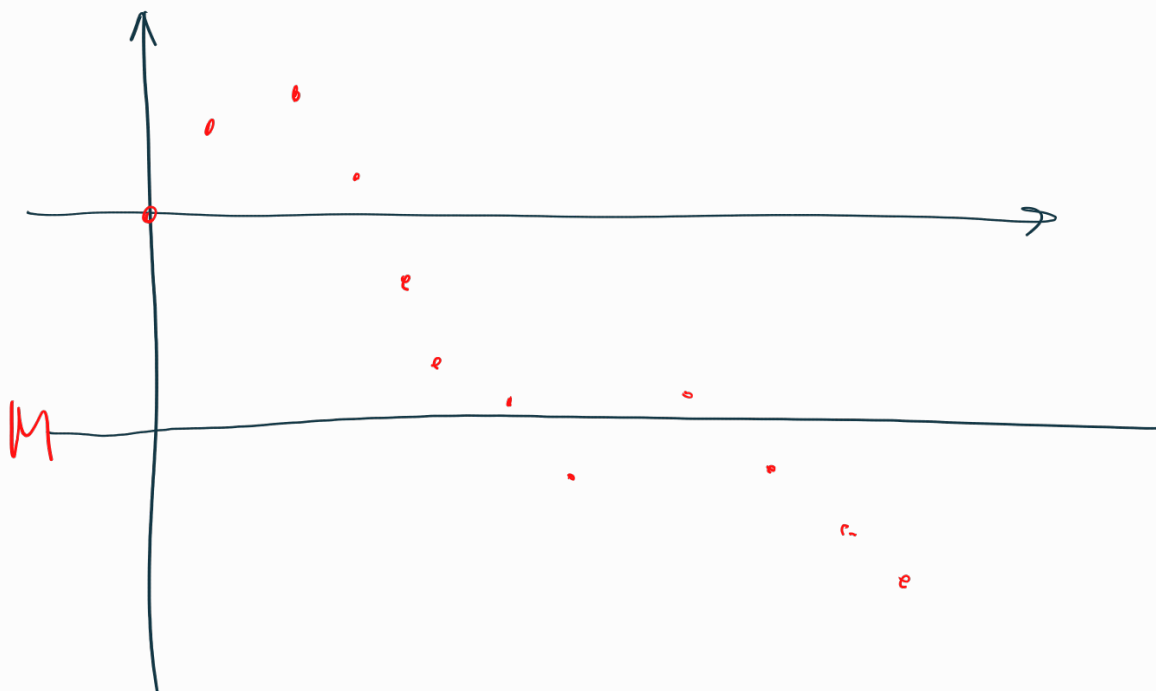
se $n > k$, allora $n > 3$ e $n > \frac{M^{3/2}}{2}$, quindi tutti i passaggi sopra sono giustificati.

3° caso: $l = -\infty$.

Gli intorno di $-\infty$ sono del tipo $(-\infty, M)$ con $M \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists k \text{ t.c. } \forall n > k \text{ si ha } a_n < M$$

Come in precedenza, è facile convincersi che basta verificarlo per tutti gli $M < 0$ (oppure, per tutti i $(-M)$, con $M > 0$)



La def^{te} diventa

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 \quad \exists K \text{ t.c. } \forall n > K \text{ si ha } a_n < -M$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - 3n^2) = -\infty.$$

$\forall M > 0$, cerco K t.c. $\forall n > K$.

$$\sqrt{n} - 3n^2 < -M.$$

$$3n^2 - \sqrt{n} > M.$$

$$3n^2 - \sqrt{n} = \sqrt{n} (3n\sqrt{n} - 1) \underset{\substack{n \geq 1 \\ \text{VI} \\ 2}}{\geq} 2\sqrt{n} > M \quad \text{con } n > \frac{M^2}{4}$$

Scelgo $K = \max \left\{ 1, \frac{M^2}{4} \right\}$, se $n > K$ tutti i passaggi sono veri.

OSS $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-a_n) = +\infty$

OSS L'ordine dei quantificatori $(\forall, \exists)$ è importante:

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \text{ t.c. } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > k$ corretta

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k \text{ t.c. } \forall n > k \quad |a_n - l| < \varepsilon$ corretta

$\Leftrightarrow \exists k \text{ t.c. } \forall n > k \quad |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ SBAGLIATA!

$|a_n - l| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$
 significa $|a_n - l| = 0$
 cioè $a_n = l$

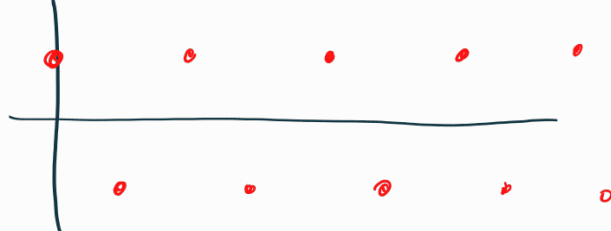
Una successione $\{a_n\}$ si dice:

- convergente se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}$
- divergente se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm \infty$
- irregolare se $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$

Esempi di successioni irregolari.

$a_n = (-1)^n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$

7



Procediamo a escludere i possibili limiti.

- Il limite non può essere $+\infty$ perché $(-1)^n \leq 1$
 $-\infty$ $(-1)^n \geq -1$

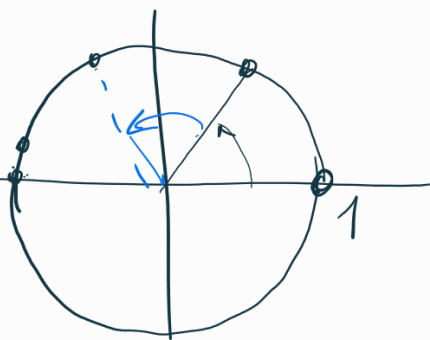
Pseudo $\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{def}^{\text{te}} \quad a_n \in \left(l - \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2} \right)$

Intervallo
di ampiezza 1

Ma questo è impossibile perché su continuo ad assumere infinite volte i valori $+1$ e -1 , che distano tra loro 2.

$$a_n = \sin n$$

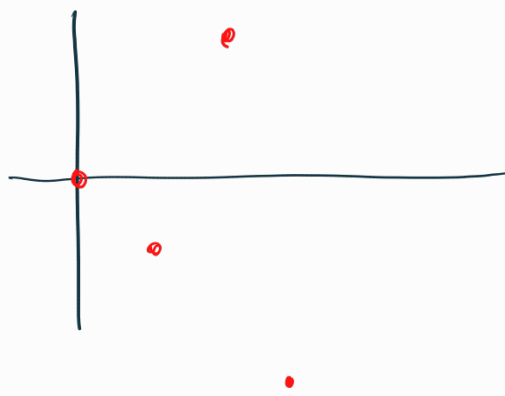
prende infinite volte valori $\geq \frac{1}{2}$
e infinite volte valori $\leq -\frac{1}{2}$
(Vedi figura in fondo)



Altri esempi:

Example:

$$a_n = (-1)^n n = \begin{cases} n & \text{se } n \text{ pari} \\ -n & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$



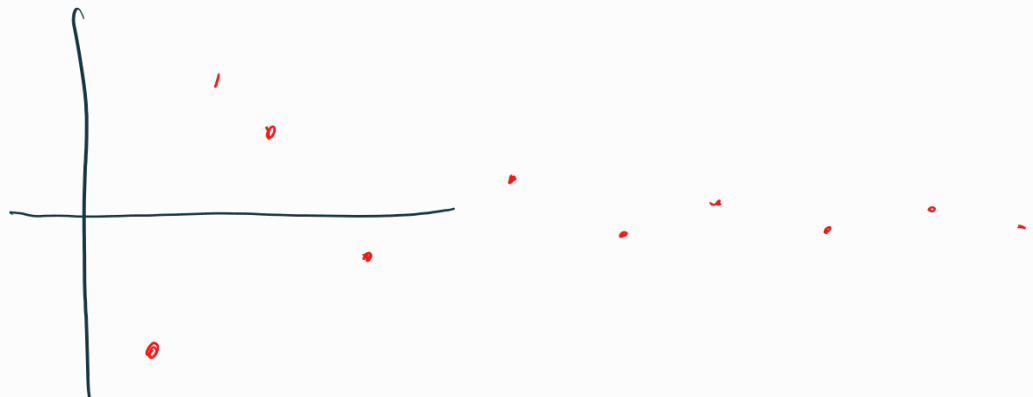
$$a_n = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \{1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots\}$$

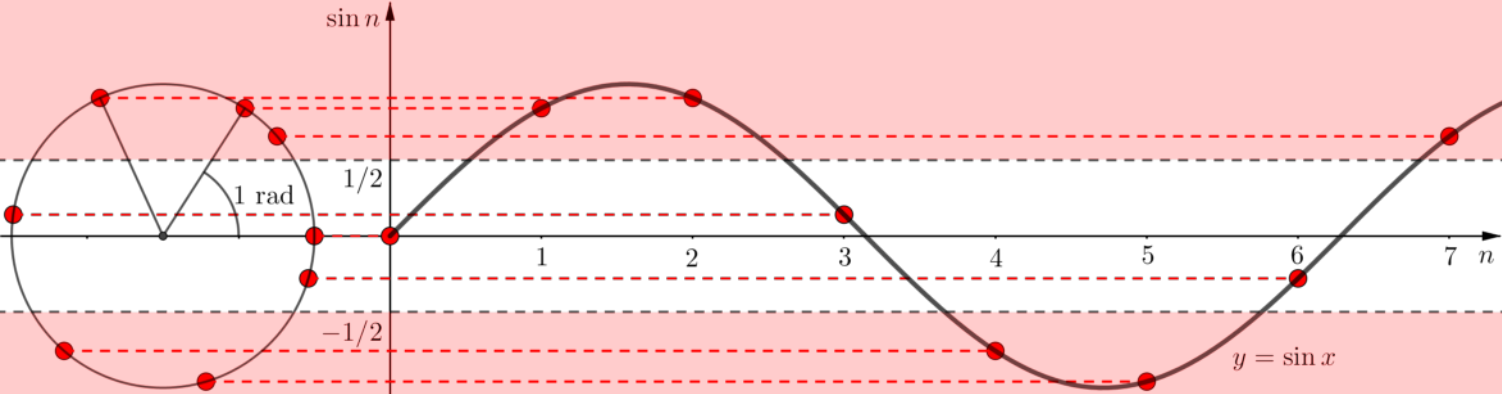
$$a_n = \frac{(-1)^n}{n} = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ pari} \\ -\frac{1}{n} & \text{se } n \text{ dispari.} \end{cases}$$

Converge!

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0, \text{ infatti}$$

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$





N.B. La successione assume infinite volte valori $\geq \frac{1}{2}$ e infinite volte valori $\leq -\frac{1}{2}$