

Numeri razionali $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$

Un numero razionale può essere sempre scritto come uno sviluppo decimale finito o periodico.

D'altra parte, ogni sviluppo decimale finito o periodico si può far corrispondere a una frazione (numero razionale)

$$\begin{aligned} 0, \overline{2} &= 0,222222\dots = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{10^k} = 2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k}_{\text{"1/9"}} = \frac{2}{9} \end{aligned}$$

Dall'analisi matematica (teoria delle serie)

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots = \frac{1}{1-r} \quad \forall r \in (-1, 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} r^k &= \sum_{k=0}^{\infty} r^k - 1 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{1-1+r}{1-r} = \\ &= \frac{r}{1-r} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k = \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

$$3,82\overline{12} = \frac{382}{100} + 0,00\overline{12} =$$

$$= \frac{382}{100} + \frac{12}{\cancel{10^4}^{100^2}} + \frac{12}{\cancel{10^6}^{100^3}} + \frac{12}{\cancel{10^8}^{100^4}} + \frac{12}{\cancel{10^{10}}^{100^5}} + \dots =$$

$$= \frac{382}{100} + 12 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{100^k} =$$

$$= \frac{382}{100} + \frac{12}{10000} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{100^{k-2}} \quad k-2 = h$$

$$= \quad // \quad + \frac{12}{10000} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{100^h} =$$

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$$

$$= \frac{382}{100} + \frac{12}{\underbrace{100 \cdot 99}_{9900}}$$

$$\overset{\text{oss}}{0, \overline{9}} = \frac{9}{9} = 1$$

oss tutti gli sviluppi decimali finiti si possono anche scrivere come sviluppi decimali periodici con $\overline{9}$.

Per es $-5,32 = -5,31\overline{9}$

↑ Questa notazione non viene usata

I numeri razionali si possono quindi identificare con gli sviluppi decimali finiti o periodici.

Purtroppo i numeri razionali non permettono di risolvere alcuni problemi, anche molto naturali.

Per es, non esiste nessun numero razionale che, elevato al quadrato, dia 2.

Per assurdo supponiamo che esista una frazione $\frac{p}{q}$ di interi t.c. $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Supponiamo di aver semplificato la frazione $\Rightarrow$ p, q primi tra loro, in particolare non sono entrambi pari.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = \underbrace{2q^2}_{\text{pari}} \Rightarrow p^2 \text{ pari} \Rightarrow p \text{ pari}$$

$$\Rightarrow p = 2k, \quad k \text{ intero} \Rightarrow 4k^2 = 2q^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{2k^2}_{\text{pari}} = q^2 \Rightarrow q \text{ pari}$$

assurdo perché
avevamo supposto
 p, q primi tra loro

Quindi si "estendono" i razionali, considerando i numeri reali.

Questo si può fare, per esempio, considerando tutti gli sviluppi decimali finiti, periodici

oppure infiniti non periodici.

$$\mathbb{R} = \left\{ \pm \text{sviluppi decimali qualsiasi (finiti, periodici, non periodici)} \right. \\ \left. \text{che non finiscano con } \overline{9} \right\}$$

$\mathbb{R}$ contiene $\mathbb{Q}$, ma contiene anche tanti altri numeri irrazionali, di cui i più famosi sono

$$\pi = 3,1415926 \dots$$

$$= 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \dots =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135 \dots$$

$$e = 2,7182818284 \dots$$

$$3 \leq \pi < 4$$

$$3,1 \leq \pi < 3,2$$

$$3,14 \leq \pi < 3,15$$

Come si definiscono le operazioni?

$$\pi + \sqrt{2} = ?$$

$$\pi = 3,1415926 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1,4142135 \dots$$

$$3 + 1 = 4$$

$$3,1 + 1,4 = 4,5$$

$$3,14 + 1,41 = 4,55$$

$$3,141 + 1,414 = 4,555$$

$$3,1415 + 1,4142 = 4,5557$$

$$3,14159 + 1,41421 = 4,55580 \quad \text{alla fine le cifre si stabilizzano...}$$

e così via: si definiscono le operazioni

Concludendo:

I numeri reali godono di tutte le proprietà "algebriche" che abbiamo visto per i razionali, ma in più godono di una proprietà (completa) che possiamo esprimere in vari modi.

1) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ limitato superiormente ammette estremo superiore

oppure.

2) Dati due insiemi $A, B \subset \mathbb{R}$ t.c.

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B,$$

$$\text{esiste } c \text{ t.c.} \quad a \leq c \leq b$$

$$\forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

← elemento separatore.

Questo è falso se lavoro solo nei razionali

$$A = \{a \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } a > 0, \quad a^2 < 2\}$$

$$B = \{b \in \mathbb{Q} \text{ t.c. } b > 0, b^2 > 2\}$$

Allora $a \leq b \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$ ma
non esiste (nei razionali) un elemento separatore
(perché l'elemento separatore sarebbe $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).