

Calcolare $\inf$ e $\sup$ di

$$E = \left\{ x = (-1)^n \frac{6n^3 - 3}{n^3} \quad n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

$$(-1)^n \frac{6n^3 - 3}{n^3} = \begin{cases} 6 - \frac{3}{n^3} & \text{se } n \text{ pari} \\ -6 + \frac{3}{n^3} & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

Usiamo la seguente proprietà

$$\sup(E \cup F) = \max \{ \sup E, \sup F \}$$

$$\inf(E \cup F) = \min \{ \inf E, \inf F \}.$$

$$\text{Poniamo } E_1 = \left\{ -6 + \frac{3}{n^3} \quad , \quad n \in \mathbb{N}, \text{ dispari} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ 6 - \frac{3}{n^3} \quad , \quad n \in \mathbb{N}_+, \text{ pari} \right\}$$

$$E = E_1 \cup E_2.$$

Studiamo E_2

$a_n = 6 - \frac{3}{n^3}$ cresce quando n cresce, e si avvicina a 6 dal basso se n diventa grande.

$$\text{Quindi } \inf E_2 = \min E_2 = a_2 = 6 - \frac{3}{8} = \frac{45}{8}$$

$\sup E_2 = 6$ (congettura). Verifichiamolo.

$$1) \quad 6 \geq x \quad \forall x \in E_2. \quad ?$$

$$\cancel{6} \geq \cancel{6} - \frac{3}{n^3} \quad \forall n = 2, 4, 6, 8, \dots \quad ? \quad \underline{\underline{\text{Sì}}}$$

$$2) \forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E_2 \text{ t.c. } x > 6 - \varepsilon. ?$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{cerco } n \text{ pari t.c. } \cancel{6} - \frac{3}{n^3} > \cancel{6} - \varepsilon$$

$$\frac{3}{n^3} < \varepsilon$$

$$\frac{3}{\varepsilon} < n^3$$

$$n > \sqrt[3]{\frac{3}{\varepsilon}}$$

Quindi basta prendere n pari $> \sqrt[3]{\frac{3}{\varepsilon}}$.

Quindi $\sup E_2 = 6$ e non è max.

Per quanto riguarda E_1 , la cui sequenza decresce e si avvicina a -6 .

$$\sup E_1 = \max E_1 = a_1 = -6 + \frac{3}{1^3} = -3$$

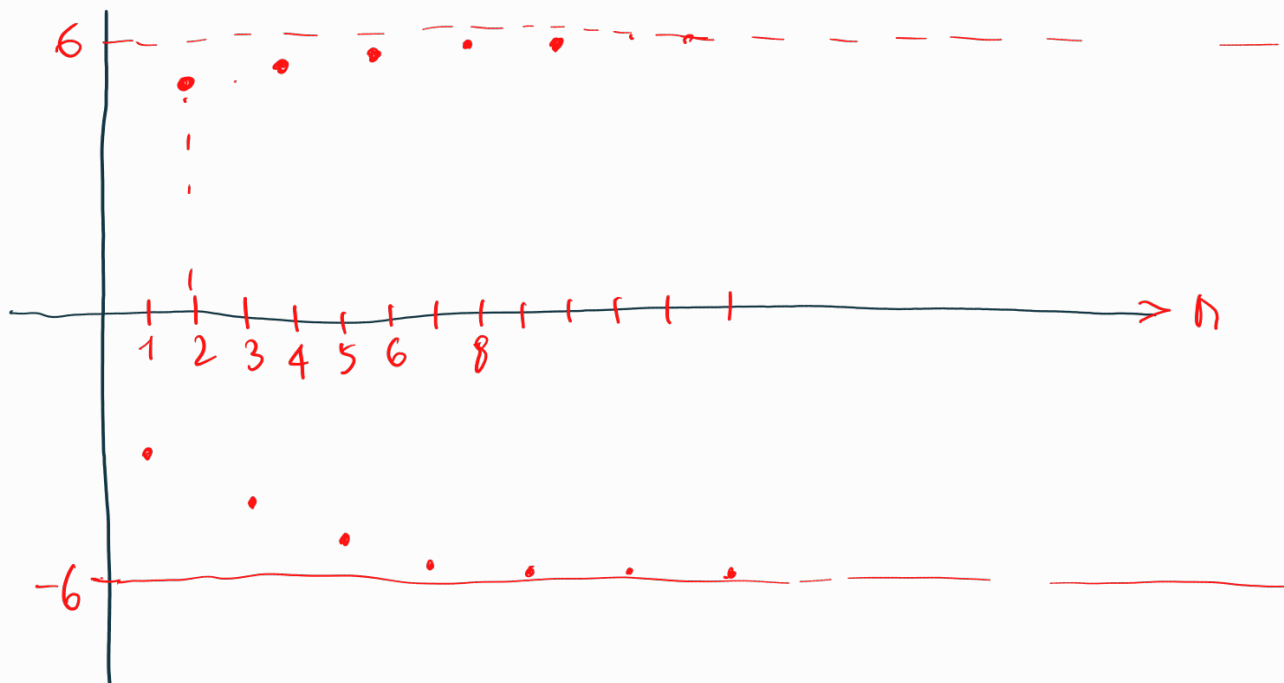
$$\inf E_1 = -6$$

E questo si verifica con i due passaggi della caratterizzazione dell'inf.

$$\sup E = \max \{-3, 6\} = 6$$

$$\inf E = \min \left\{-6, \frac{45}{8}\right\} = -6.$$

Il grafico della successione $a_n = (-1)^n \left(6 - \frac{3}{n^3}\right)$ è il seguente



Una funzione è una legge che associa ad ogni elemento di un insieme A , detto dominio, un unico elemento di un insieme B , detto codominio:

$$f: \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

$$f: \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \quad \text{oppure} \quad [0, +\infty)$$

$$x \longmapsto f(x) = x^2$$

$$f(-3) = 9$$

Una successione è una funzione il cui dominio è dato da $\mathbb{N}$ oppure $\mathbb{N}_+$

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ n & \longmapsto & \sqrt{3n+5} = \cancel{f(n)} = 2n \end{array}$$

L'obiettivo delle prossime ore è quello di dare un significato all'espressione

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{vuole descrivere:} \\ \text{quando } n \text{ diventa "molto grande",} \\ \frac{1}{n} \text{ "si avvicina" a } 0 \end{array} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 - 5) = +\infty \quad \left(\begin{array}{l} \text{vuole descrivere:} \\ \text{quando diventa "molto grande",} \\ \text{anche } n^2 - 5 \text{ diventa "molto grande"} \end{array} \right)$$

Poi in generale lavoreremo anche con funzioni, e faremo limiti più generali del tipo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5+x}{x^2} = +\infty$$

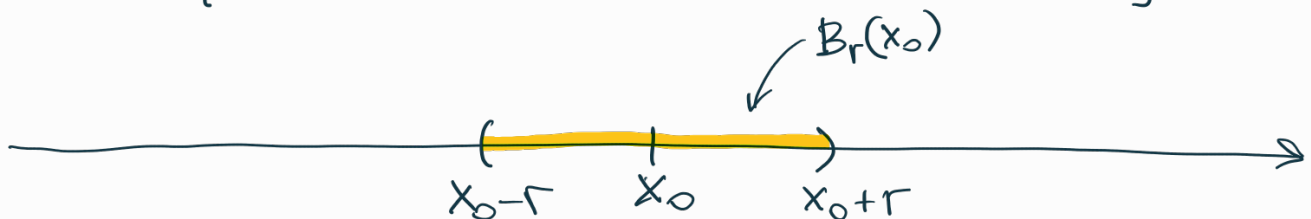
Per ora lavoreremo sui limiti di successioni (per $n \rightarrow +\infty$).

DEF Intorno (sferico) di un numero reale.

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$, dato $r > 0$ ($r \in \mathbb{R}_+$),

si dice intorno sferico di centro x_0 e raggio r l'intervallo

$$\begin{aligned} B_r(x_0) &= (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \\ &= \{x \in \mathbb{R} \text{ che distano da } x_0 \text{ meno di } r\} \end{aligned}$$



$$|t| = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ -t & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

$$|x - x_0| = \begin{cases} x - x_0 & \text{se } x \geq x_0 \\ x_0 - x & \text{se } x < x_0 \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Si interpreta} \\ \text{come la distanza} \\ \text{di } x \text{ da } x_0 \end{array} \right.$$

Oss Nel piano cartesiano.

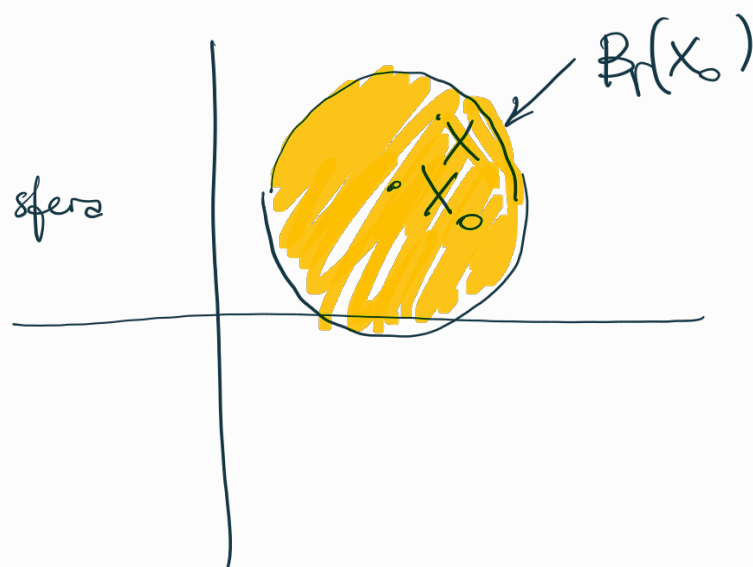
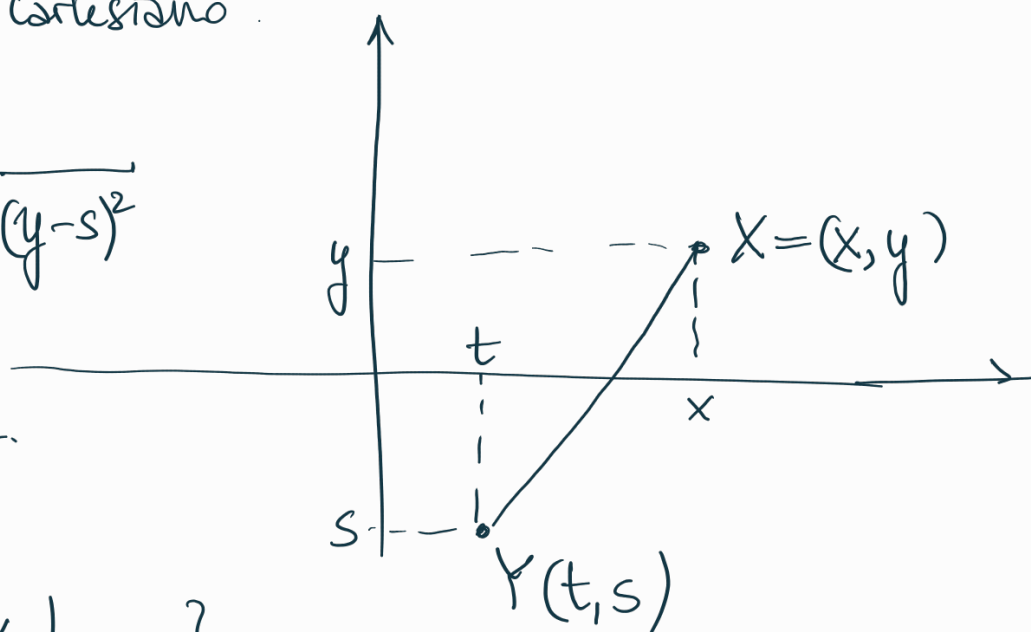
$$|X - Y| = \sqrt{(x-t)^2 + (y-s)^2}$$

(x, y) (t, s)

L'intorno sferico sarà.

$$B_r(X_0) = \{X \in \mathbb{R}^2 : |X - X_0| < r\}$$

e in dim. 3 sarà proprio una sfera (o meglio, una palla).



Intorni di $\pm\infty$

Si dice intorno di $+\infty$ una semiretta della forma $(a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$



si dice intorno di $-\infty$ una semiretta della forma
 $(-\infty, a)$ con $a \in \mathbb{R}$



Secondo concetto: proprietà vere definitivamente.

Sia $P(n)$ una proprietà dipendente da $n \in \mathbb{N}$.

Diremo che $P(n)$ è vera definitivamente.

se $\exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ t.c. $P(n)$ è vera $\forall n \geq \bar{n}$

ossia, equivalentemente,

se $\exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $P(n)$ è vera $\forall n > k$.

Per esempio

$$n^2 > 100$$

$$P(n)$$

è vera definitivamente perché è vera per $n \geq 11$
 $n > 10$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{1000}$$

$$P(n)$$

è vera definitivamente? sì perché è vera $\forall n > 1000$.

gli angoli interni di un poligono regolare
di n lati sono ottusi.

falso per $n=3, n=4$, vero per $n \geq 5$.

(vero definitivamente).

$$P(n) \quad (n \geq 3)$$



$a_n = n^3 - 21n$ è definitivamente crescente.

$$a_{n+1} \geq a_n$$

$P(n)$

leri abbiamo visto che $P(n)$ è vero $\forall n \geq 3$.

$$(-1)^n \geq 0. \quad P(n)$$

non è vero definitivamente, perché è falsa $\forall n$ dispari.

$$1 \stackrel{\textcircled{A}}{<} \frac{n^2}{n^2-5} \stackrel{\textcircled{B}}{<} \frac{11}{10} \quad P(n).$$

È vero definitivamente?

$$\textcircled{A} \quad 1 < \frac{n^2}{n^2-5} \quad \text{vero } \forall n > \sqrt{5}$$

$$\textcircled{B} \quad \frac{n^2}{n^2-5} < \frac{11}{10} \quad \text{se } n > \sqrt{5} \text{ posso moltiplicare}$$

$$\begin{array}{c} \nearrow n > \sqrt{5} \\ 10n^2 < 11n^2 - 55 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ n^2 > 55 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ n > \sqrt{55} \end{array}$$

$$\textcircled{B} \text{ è vero per } n > \sqrt{55}.$$

Quindi se $n > \sqrt{55}$ entrambe sono vere

$\Rightarrow P(n)$ è vera definitivamente.

OSS se $P(n)$ è vera definitivamente
e $Q(n)$ è vera definitivamente,

allora $P(n) \wedge Q(n)$ è vera definitivamente

DEF Limite di successioni.

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali.

Sia $l \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

Diremo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$

(oppure che $a_n \xrightarrow[\text{per}]{} l$ quando $n \rightarrow +\infty$) se

$\forall U$ intorno di l si ha $a_n \in U$ definitivamente,

cioè:

$\forall U$ intorno di $l \exists k \in \mathbb{R}$ t.c. $a_n \in U \quad \forall n > k$.

Questa def^{ne} prende diverse forme a seconda che

1) $l \in \mathbb{R}$, 2) $l = +\infty$, 3) $l = -\infty$.

1° caso: $l \in \mathbb{R}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \in \mathbb{R}.$

In questo caso gli intorno di l sono del tipo

$$V = B_\varepsilon(l) = (l - \varepsilon, l + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R} : |y - l| < \varepsilon\}$$

(con $\varepsilon > 0$)

Quindi se $l \in \mathbb{R}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l$ significa:

$$(V = B_\varepsilon(l))$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } |a_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > k.$$

Esempio: Verifichiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)}_{a_n} = \underbrace{0}_l$

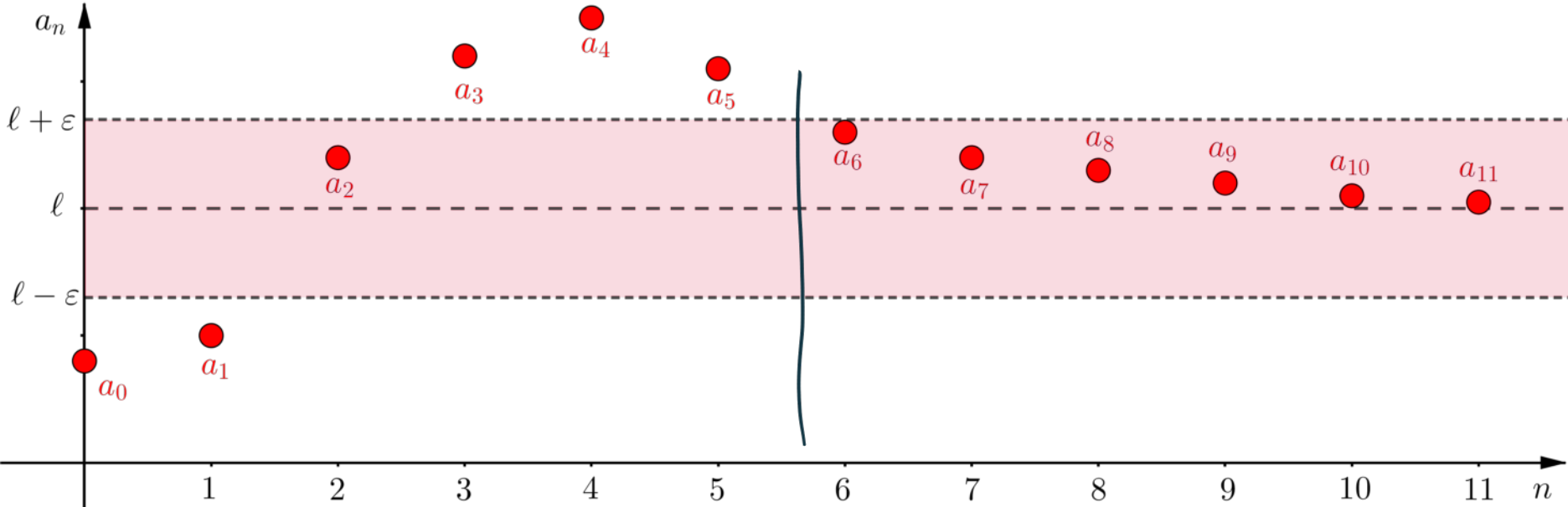
Dobbiamo verificare che.

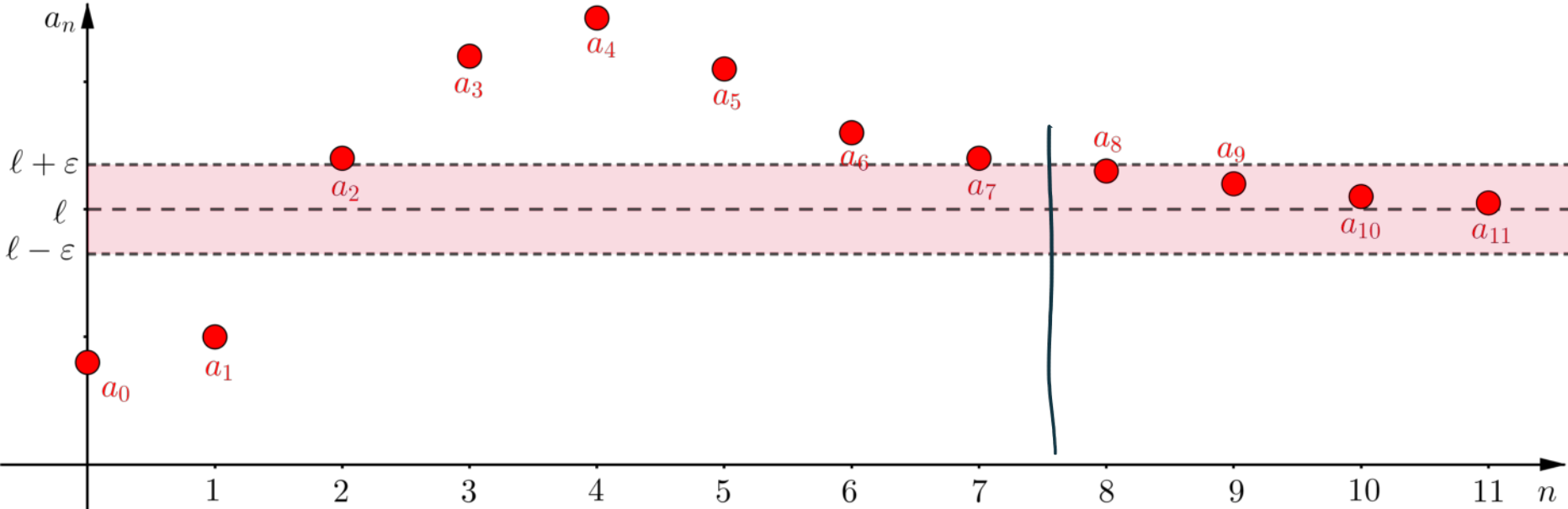
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{R} \text{ t.c. } \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \quad \forall n > k.$$

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{1}{\varepsilon} =: k$$

OSS Una volta verificata la def^{ne} di limite per un certo $\varepsilon_0 > 0$, automaticamente essa risulta verificata $\forall \varepsilon > \varepsilon_0$ (con la stessa scelta) (si vedano le figure più basso).
Quindi basta verificare la cond^{ne} $\forall \varepsilon$ t.c.
 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, con ε_0 scelto da noi a piacere.

In altre parole basta verificarla "ps ε piccolo".





Come si vede dalle precedenti figure,
se passo da un ε più grande a un ε più piccolo,
devo in generale cambiare il K t.c. $\forall n > K$ si ha
 $|a_n - l| < \varepsilon$.

Invece per passare da un ε più piccolo a uno
più grande lo stesso K va bene.

