

Riassunto Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.

$M \in \mathbb{R}$ è un " $M \geq x \quad \forall x \in E$ " **maggiorante**
" $M \leq x$ " **minorante**

E è **limitato superiormente** se ammette un maggiorante
limitato inferiormente " " **minorante**
limitato se è limitato super. e infer.

È **massimo** di E , se esiste, è un $x_1 \in E$ che è anche un maggiorante di E .
 $(x_1 \geq x \quad \forall x \in E)$

È **minimo** di E , se esiste, è un $x_2 \in E$ che è anche un minorante di E .
 $(x_2 \leq x \quad \forall x \in E)$

Non tutti gli insiemi limitati superiormente ammettono massimo

Per esempio $E = (0, 1)$ non ha massimo.

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$$

in quanto $\{\text{maggioranti di } E\} = [1, +\infty)$.

DEF Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ insieme limitato **superiormente** **inferiormente**.

Chiamiamo **estremo superiore** di E il **minimo** (il più piccolo) **inferiore** **massimo** (il più grande) dei **maggioranti** di E .
minoranti

$$\sup E = \min \{\text{maggioranti di } E\}.$$

$$\inf E = \max \{\text{minoranti di } E\}.$$

Esempio $E = (0, 1)$ limitato superiormente

$$\sup E = \min \{ \text{maggioranti di } E \} = \min [1, +\infty) = 1.$$

$$\inf E = \max \{ \text{minoranti di } E \} = \max (-\infty, 0] = 0$$



OSS Se E ammette massimo, esso è anche l'estremo superiore di E .

Sia $x_1 = \max E$. Ogni $M < x_1$ non è maggiorante di E ,
perché M non maggiore $x_1 \in E$. $\square$

TEOREMA Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente.
inferiormente

Allora $\exists!$ $\sup E = \min \{ \text{maggioranti di } E \}$
 $\inf E = \max \{ \text{minoranti di } E \}$.
esiste ed è unico

(senza dm.)

Caratterizzazione di $\sup E$.

Sia $E \subset \mathbb{R}$ limitato superiormente. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$.

Allora $\lambda = \sup E$ se e solo se verifica le seguenti due condizioni:

1) λ è un maggiorante di E , cioè

$$\lambda \geq x \quad \forall x \in E$$

2) Ogni numero più piccolo di λ non è maggiorante di E ,
cioè

$\forall \varepsilon > 0$ $\lambda - \varepsilon$ non è un maggiorante di E , cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x = x(\varepsilon) \in E \quad \text{t.c.} \quad x > \lambda - \varepsilon$$

Esempio:

$$E = \left\{ x = \frac{2n-1}{n}, n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \dots \right\}$$

Congettura: $\sup E = 2$. Verifichiamolo con la caratterizzazione

1) $2 \stackrel{?}{\geq} x \quad \forall x \in E$

~~$2 \stackrel{?}{\geq} 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$~~

~~$0 \stackrel{?}{\geq} -\frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$~~

~~$0 \stackrel{?}{\leq} \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ \quad \underline{\text{vero!}}$~~

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x \in E \text{ t.c. } x > 2 - \varepsilon \quad ?$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}_+ \text{ t.c. } \cancel{2 - \frac{1}{n}} > \cancel{2 - \varepsilon} \quad ?$

" " " $\frac{1}{n} < \varepsilon \quad ?$

$\Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$

Quindi basta prendere un intero $> \frac{1}{\varepsilon}$.

Quindi $\sup E = 2$. Non è un massimo.

Cosa sarebbe successo se mi fossi convinto (erroneamente) che (per esempio) $\sup E = 2,01$?

1) $2,01 \geq x \quad \forall x \in E$? sì.

2) $\forall \varepsilon > 0$, $2,01 - \varepsilon$ non è un maggiorante? (NO)
perché se prendo $\varepsilon = 0,01 > 0$

$$2,01 - \varepsilon = 2,01 - 0,01 = 2 \text{ è ancora maggiorante}$$

E se mi fossi convinto che $\sup E = 1,99$?

1) $1,99 \geq x \quad \forall x \in E$?

$$1,99 \geq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ ?$$



$$\frac{1}{n} \geq 2 - 1,99 = 0,01 = \frac{1}{100}$$



$$n \leq 100$$

$$\forall n \in \mathbb{N}_+$$

(FALSO!)

CARATTERIZZAZIONE DELL'INF.

Sia $E \subset \mathbb{R}$ limitato inferiormente, $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$\lambda = \inf E$ se e solo se

1) $\lambda \leq x \quad \forall x \in E$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x = x(\varepsilon) \in E \text{ t.c. } x < \lambda + \varepsilon$

Vediamo chi è $\inf \left\{ 2 - \frac{1}{n} ; n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \inf E$.

Congettura: $\inf E = 1$.

$$1) \quad 1 \leq 2 - \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ ?$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{n} \leq 1$$

$\Leftrightarrow$

$$n \geq 1$$

"

$$\forall n \in \mathbb{N}_+ ? \quad \text{vero.}$$

Oss $1 \in E$ ed è minorante $\Rightarrow$ quindi $1 = \min E = \inf E$.
Completiamo la caratterizzazione, comunque.

$$2) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ cerco } x \in E \text{ t.c. } x < 1 + \varepsilon.$$

$$\text{Basta prendere } x = 1 \in E \Rightarrow 1 < 1 + \varepsilon \quad \text{OK!}$$

$$\text{Sia } E = \left\{ x = \frac{5}{n^2} : n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ 5, \frac{5}{4}, \frac{5}{9}, \frac{5}{16}, \frac{5}{25}, \dots \right\}$$

$$\sup E = \max E = 5$$

$$5 \in E, \text{ devo controllare che } \cancel{5}^1 \geq \frac{\cancel{5}^1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

$\Leftrightarrow$

$$n^2 \geq 1$$

"

vero.

$\inf E = 0$ (congettura), non sarebbe minimo

Usiamo la caratterizzazione.

$$1) \quad 0 \leq \frac{5}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ ? \quad \text{OK.}$$

$$2) \text{ Fissato arbitrariamente } \varepsilon > 0, \text{ cerco } n \in \mathbb{N}_+ \text{ t.c.}$$

$$\frac{5}{n^2} < 0 + \varepsilon = \varepsilon$$

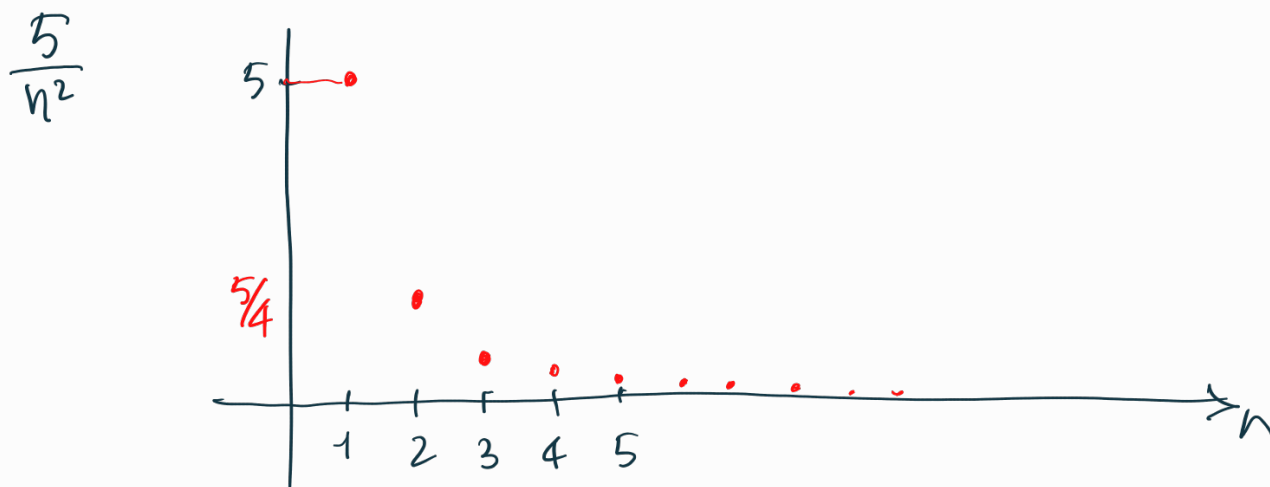


$$n^2 > \frac{5}{\varepsilon}$$

$$\Updownarrow \quad n \in \mathbb{N}$$

$$n > \sqrt{\frac{5}{\varepsilon}} \quad \text{e questo esiste.}$$

Quello che stiamo calcolando è l'inf e il sup della successione



DEF Se $E \stackrel{CR}{\text{è}}$ illimitato superiormente, cioè non ha maggioranti inferiormente, minori

poniamo $\sup E = +\infty$

$$\inf E = -\infty$$

In questo modo ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ ammette inf e sup, che appartengono a $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

Sia $E = \{x = \underbrace{n^3 - 21n}_{a_n}, n \in \mathbb{N}\}$

Calcoliamo i primi valori

$$a_0 = 0, \quad a_1 = -20, \quad a_2 = -34, \quad a_3 = -36, \quad a_4 = -20$$

Perchiamo di capire se la successione $a_n = n^3 - 21n$ cresce o decresce.

$$a_{n+1} \stackrel{?}{\geq} a_n \quad ?$$

$$(n+1)^3 - 21(n+1) \stackrel{?}{\geq} n^3 - 21n$$

$$\cancel{n^3} + 3n^2 + 3n + 1 - \cancel{21n} - 21 \stackrel{?}{\geq} \cancel{n^3} - \cancel{21n}$$

$$3n^2 + 3n - 20 \stackrel{?}{\geq} 0$$



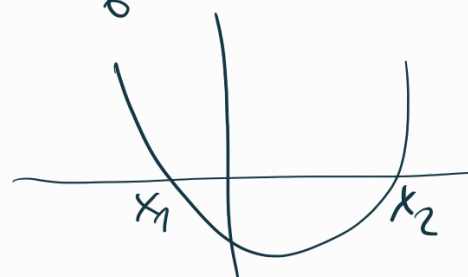
$$\cancel{n \leq \frac{-3 - \sqrt{249}}{6}} \vee n \geq \frac{-3 + \sqrt{249}}{6}$$



$$n \geq 3$$

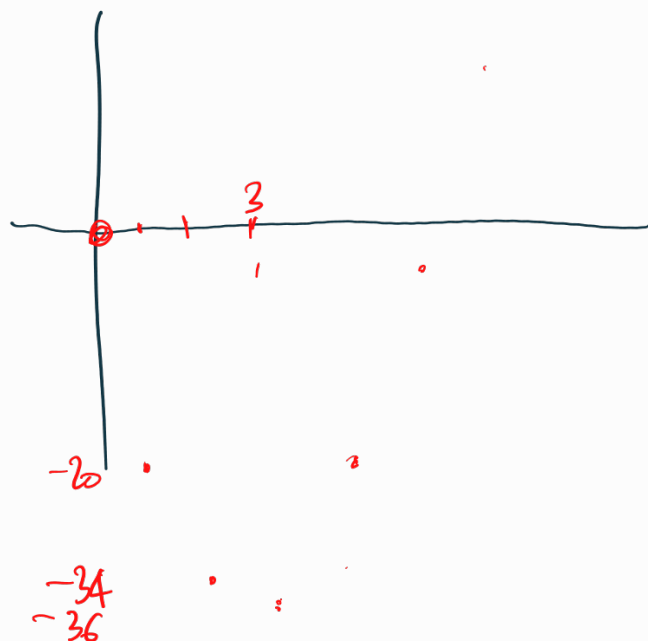
$$3x^2 + 3x - 20 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 240}}{6}$$



$$a_{n+1} \geq a_n \iff n \geq 3$$

a_n scende da a_0 fino ad a_3 , poi risale.



$$\text{Quindi } \inf a_n = \min a_n = a_3 = -36$$

$$\sup a_n = +\infty \quad (\text{congettura})$$

Per provarlo, devo mostrare che a_n non ammette maggioranti

Fissiamo arbitrariamente $M \in \mathbb{R}$ e mostriamo che non è un maggiorante, cioè che $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > M$

Cioè cerco $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n^3 - 21n > M$.

$$a_n = n^3 - 21n = n \underbrace{(n^2 - 21)}_{\substack{\forall n \geq 5 \\ 4}} \geq 4n > M \quad \begin{array}{l} \text{se } n > \frac{M}{4} \end{array}$$

OK, Basta prendere $n > \max \left\{ \frac{M}{4}, 5 \right\}$.

Esercizio per casa: fare la stessa cosa con

$$a_n = \frac{n}{n^2 + 50} \quad n \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$\Rightarrow$ calcolare $\sup a_n, \inf a_n$

OSS se $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}$

che relazione c'è tra $\sup E$ e $\sup F$?

$$\begin{array}{l} \text{si ha} \\ e \end{array} \quad \begin{array}{l} \sup F \geq \sup E \\ \inf F \leq \inf E \end{array}$$

Infatti $\{\text{maggioranti di } F\} \subseteq \{\text{maggioranti di } E\}$

Quindi $\min_{\text{sup } F} \{\text{magg. di } F\} \geq \min_{\text{sup } E} \{\text{magg. di } E\}$

Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$.

$$\sup (E \cup F) = \max \{\sup E, \sup F\}$$

$$\inf (E \cup F) = \min \{\inf E, \inf F\}$$