

Pagina web del corso:

elearning.uniroma1.it/course/view.php?id=4572

Libri "di testo".

- Libri del liceo
- Primi capitoli di un testo di analisi
- Appunti sulla pag-web.

Ricevimento studenti:

mercoledì 11:00 → 13:00, con email per
avvertirmi (dallaglio@mat.uniroma1.it)

Dip. Matematica, Città Universitaria, piano terra, stanza 4.

Numeri, insiemi numerici.

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \quad \text{interi naturali.}$$

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\} \quad \text{interi relativi}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : \begin{array}{l} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} = \mathbb{N}_+ \end{array} \right\} \quad \text{numeri razionali}$$

$$= \left\{ \pm \frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$$

OSS

In realtà bisogna identificare frazioni diverse che corrispondono allo stesso numero.

$$\frac{1}{3} \text{ e } \frac{2}{6} \text{ sono due frazioni diverse,}$$

ma sono lo stesso numero.

Identifico tra loro due frazioni

$$\frac{m}{n} \sim \frac{p}{q} \text{ se } mq = np$$

Su $\mathbb{Q} = \{\text{frazioni, identificando frazioni equivalenti}\}$

si possono definire delle operazioni

$$\text{Se } x = \frac{m}{n}, \quad y = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow x + y = \frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}$$

Osservazione Se io prendo differenti frazioni corrispondenti allo stesso numero, il risultato non deve cambiare

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \quad ,$$

$$\frac{2}{6} + \frac{5}{10} = \frac{20+30}{60} = \frac{50}{60}$$

E' possibile mostrare che i numeri razionali verificano le proprietà indicate nelle successive slide, e che sono alla base di tutte le manipolazioni algebriche ben note dalla scuola.

2. Gli assiomi dei numeri ~~reali~~ razionali

Assiomi relativi alle operazioni. Sono definite le operazioni di *addizione* (+) e *moltiplicazione* (·) tra coppie di numeri reali, con le seguenti proprietà (a, b, c indicano numeri ~~reali~~ razionali generici):

- (2.1) *Proprietà associativa:*
 $(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$
- (2.2) *Proprietà commutativa:* $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$
- (2.3) *Proprietà distributiva:* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$
- (2.4) *Esistenza degli elementi neutri:* esistono in $\mathbf{R}$ due numeri distinti 0, 1, tali che $a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a.$
- (2.5) *Esistenza degli opposti:* per ogni numero ~~reale~~ ^{raz} a esiste un numero ~~reale~~, indicato con $-a$, tale che $a + (-a) = 0.$
- (2.6) *Esistenza degli inversi:* per ogni numero ~~reale~~ a $\neq 0$ esiste un numero, indicato con a^{-1} , tale che $a \cdot (a^{-1}) = 1.$

Assiomi relativi all'ordinamento. È definita la relazione di *minore o uguale* ($\leq$) tra coppie di numeri ~~reali~~ razionali con le seguenti proprietà:

- (2.7) *Dicotomia:* per ogni coppia di numeri ~~reali~~ a, b si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a.$
- (2.8) *Proprietà asimmetrica:* se valgono contemporaneamente le relazioni $a \leq b, b \leq a$, allora $a = b.$
- (2.9) *Se $a \leq b$ allora vale anche $a + c \leq b + c.$*
- (2.10) *Se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ allora valgono anche $0 \leq a + b, 0 \leq a \cdot b.$*

~~Assioma di completezza~~

- (2.11) ~~Siano A e B due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che $a \leq b$, comunque si scelgano a elemento di A e b elemento di B. Allora esiste almeno un numero reale c tale che $a \leq c \leq b$, qualunque siano a in A e b in B.~~

Ad ogni numero razionale si può far corrispondere uno sviluppo decimale

$\frac{5}{4} = 1,25$, si ottiene con l'ordinaria divisione con il resto;

$$\begin{array}{r} 5, \\ 10 \\ 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \hline 1,25 \end{array}$$

$$\frac{1}{3} = 0,333333\dots = 0,\overline{3}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 10 \\ 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \hline 0,333333\dots \end{array}$$

$$\frac{9}{7} = 1,\overline{285714}$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ 20 \\ 60 \\ 40 \\ 50 \\ 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \\ \hline 1,285714285714285714\dots \end{array}$$

30
20

Questo è vero sempre: se considero lo sviluppo decimale di un numero razionale, questo è sempre finito oppure periodico.

$$\begin{array}{r}
 13285 \\
 \underline{717} \\
 6115 \\
 \underline{5736} \\
 = 3790
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 717 \\
 \hline
 18,5\dots
 \end{array}$$

A un certo punto (se il procedimento non si arresta perché il resto viene zero) cominciamo ad "abbassare" zeri, e ogni volta otteniamo un resto intero che può andare da 1 al divisore abbassato di 1 (in questo caso $717-1=716$). Quindi a un certo punto un numero si deve ripetere e a questo punto la sequenza continua identica)

In questo caso viene

$$\frac{13285}{717} = 18, \overline{5285913}$$

Quindi un numero razionale corrisponde sempre a uno sviluppo decimale finito o periodico,

È vero il viceversa?

Ogni sviluppo decimale finito o periodico corrisponde sempre a una frazione (a un razionale)?

Nel caso di uno sviluppo decimale finito, ciò è ovvio, per esempio

$$792,147 = \frac{792147}{1000}$$

Nel caso di uno sviluppo decimale periodico, il discorso è un po' più complicato:

$$0,222222\dots = 0,\overline{2}.$$

$$0,\overline{2} = \frac{2}{10} + \frac{2}{100} + \frac{2}{1000} + \dots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{10^k}$$

... da continuare...