

Pagina web del corso:

elearning.uniroma1.it/course/view.php?id=1536

Libro di testo consigliato:

Bertsch - Dall'Aglia - Giacomelli - Epsilon 1 (McGraw-Hill)

oppure uno degli altri libri indicati sulla pagina web

Esercizi:

- Libri di testo

- esercizi dalla pag. web.

- Marcellini - Sbordone ($\rightarrow$ pg. web)

- + altri

Modalità d'esame:

- Prova scritta (pratica) 2^h 30'

-

- Prova di teoria (scrittura 50') } stesso giorno

- prova orale (10' - 20')

La prova orale si può saltare ma è obbligatoria se:

- lo studente vuole ottenere un voto > 26 .

- lo " " migliorare il voto assegnato finora.

- il docente lo richiede (per es. perché non è chiara la valutazione delle prove precedenti.)

Esercitazioni (facoltative ma molto consigliate)

Lunedì 17:00 $\rightarrow$ 19:00 Aula 6 (?) (Dott. Giacomo Basso)

Ricevimento studenti: mercoledì 11:00 $\rightarrow$ 13:00

Dip. di Matematica, Città Universitaria, Piano terra, stanza 4.

Consiglio di avvertirvi il giorno prima via email

(dallaglio@mat.uniroma1.it)

Numeri reali $\mathbb{R}$ ($\rightarrow$ Lab. Mat.).

Consideriamo sottoinsiemi di reali

$E \subseteq \mathbb{R}$ cioè: $\forall x \in E$ si ha $x \in \mathbb{R}$.
(red arrows: "per ogni" points to $\forall$, "appartiene a" points to $x \in E$, "appartiene a" points to $x \in \mathbb{R}$)

Esempi: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ $\mathbb{N}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_+ \right\}$
(red arrow: "t.c. (tali che)" points to the colon)

Intervallo

$(0, 1) =]0, 1[= \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$ *intervallo aperto*

$[0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$ *intervallo chiuso*

$(0, 1] =]0, 1] = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 1\}$



$(5, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$

(semirette)

$(-\infty, 3] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 3\}$

Altri insiemi

$$E = \left\{ x = \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$$

$$F = \left\{ x = \frac{5}{n^2} : n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ 5, \frac{5}{4}, \frac{5}{9}, \frac{5}{16}, \frac{5}{25}, \dots \right\}$$

$$G = \{ x = n^2 - 3n : n \in \mathbb{N} \} = \{ 0, -2, 4, \dots \}$$

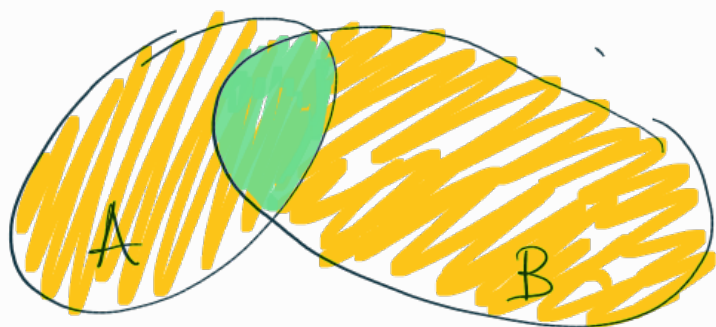
$$H = \{ x = t^4 - 5t^3 + t^2 : t \in \mathbb{R} \}$$

$$K = [0, 2] \cup [3, 5) = \{ x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } (0 \leq x \leq 2) \vee (3 \leq x < 5) \}$$



$$A, B \text{ insiemi} \Rightarrow A \cup B = \{ x : (x \in A) \vee (x \in B) \}$$

"oppure"
(basta che valga una delle due cond.ⁿⁱ)



$$A \cup B = \text{[shaded yellow box]}$$
$$A \cap B = \text{[shaded green box]}$$

$$A \cap B = \{ x : (x \in A) \wedge (x \in B) \}$$

"e"

DEFINIZIONE Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Sia $M \in \mathbb{R}$.

Diremo che M è un **maggiorante**^m di E se **minorante**^m " "

$$M \geq x \quad \forall x \in E$$

$$m \leq x \quad \forall x \in E$$

Se $E = (0, 1)$, un maggiorante di E è 1
 $1 \geq x \quad \forall x \in (0, 1)$, ma anche 2 , anche $\pi \approx 3,14$
^{minorante} di E è 0 , ma anche -2

Oss. se esiste un maggiorante^M, ne esistono infiniti (tutti quelli più grandi di M.)

$M=0,95$ non è un maggiorante di $E=(0,1)$ perché non maggiore, per esempio $x=0,97 \in E$.

$$E = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

non ammette maggioranti. (invece ammette minoranti, per es. $m=-1$)

DEF $E \subseteq \mathbb{R}$ si dice **limitato superiormente** se ammette almeno un maggiorante
limitato inferiormente se ammette almeno un minorante.

E si dice **limitato** se è limitato sia superiormente che inferiormente, cioè se $\exists m, M$ t.c.

$$m \leq x \leq M \quad \forall x \in E.$$

↑
esiste
esistono

$$E = \left\{ x = \frac{2n-1}{n} : n \in \mathbb{N}_+ \right\} = \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \frac{9}{5}, \dots \right\}$$

E è limitato inferiormente, per es. $m=0$ è un minorante.

E è limitato superiormente, per es. $M=2$ è un maggiorante.

$$m \stackrel{?}{\leq} x \quad \forall x \in E \Leftrightarrow 0 \stackrel{?}{\leq} \frac{2n-1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+ \quad \text{vero!}$$

$$2=M \stackrel{?}{\geq} x \quad \forall x \in E \Leftrightarrow 2 \stackrel{?}{\geq} \frac{2n-1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}_+$$

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ 2n \geq 2n-1 \end{array} \quad \text{vero!}$$

$E = \{x = n^2 - 3n : n \in \mathbb{N}\}$ è limitato superiormente?

Sia $M \in \mathbb{R}$ arbitrario, voglio mostrare che non è maggiorante

Quindi voglio trovare $x \in E$ t.c. $x > M$

cioè " " $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n^2 - 3n > M$

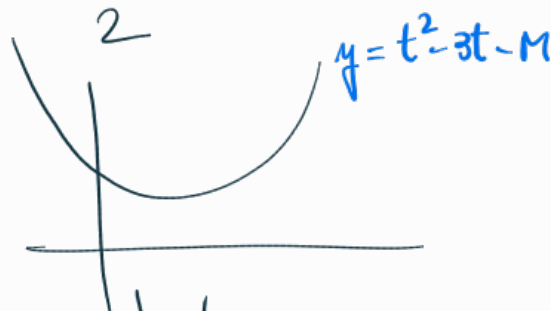
$$n^2 - 3n - M > 0$$

$$t^2 - 3t - M > 0$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 4M}}{2}$$

1° caso: $M < -\frac{9}{4}$

la diseq^{ne} è vera $\forall t \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ ogni n va bene



2° caso $M = -\frac{9}{4}$

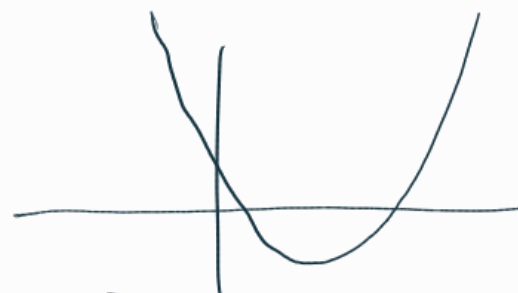
la diseq^{ne} è vera $\forall t \neq \frac{3}{2}$
 $\Rightarrow$ ogni n va bene.



3° caso $M > -\frac{9}{4}$

La diseq^{ne} è vera $\forall t$ t.c. $t < \frac{3 - \sqrt{9 + 4M}}{2}$ ✓

$$t > \frac{3 + \sqrt{9 + 4M}}{2}$$



Basta prendere $n > \frac{3 + \sqrt{9 + 4M}}{2}$

Oppure, più semplicemente:

Fissato $M \in \mathbb{R}$, devo trovare $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$n^2 - 3n > M$$

$$n^2 - 3n = n(n-3) \geq n > M$$

se $n \geq 4$

se $n > M$

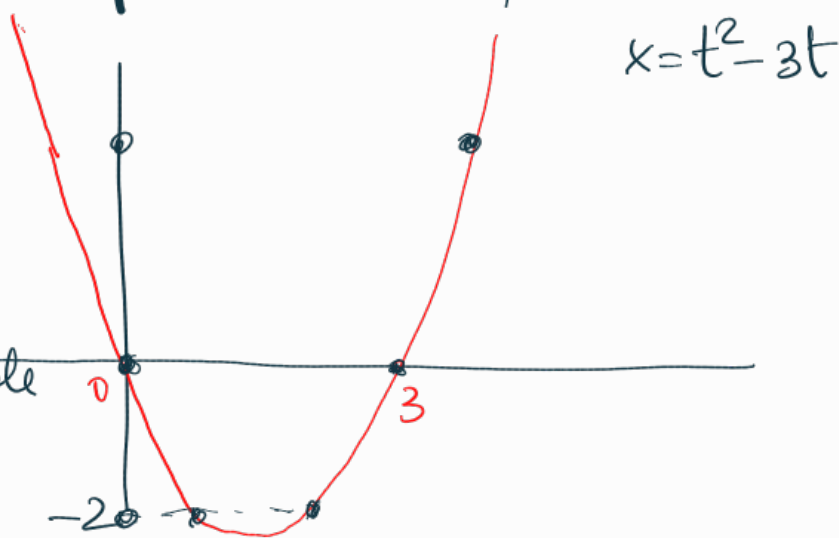
$\forall n \geq 4$

Basta prendere $n > \max \{4, M\}$

Il massimo verrà definito dopo. Qui è solo "il più grande tra 4 e M"

Come è fatto E ?

E è l'insieme delle ordinate dei punti della parabola con ascissa intera naturale



Si può vedere abbastanza facilmente che E è anche limitato inferiormente

Def. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Se un ^{minore} maggiorante di E appartiene ad E , lo chiameremo minimo massimo di E .

Quindi il massimo di E è un numero $x_1 \in E$.
t.c. $x_1 \geq x \quad \forall x \in E$

per es. $[0, 2]$ ammette massimo $x_1 = 2$

Prop. Il massimo di E , se esiste, è unico.

Dim Siano x_1, x_2 due massimi di E .

$$\begin{array}{llll} x_1 \in E, & x_1 \geq x & \forall x \in E & \text{Prendo } x = x_2 \Rightarrow x_1 \geq x_2 \\ x_2 \in E, & x_2 \geq x & \forall x \in E & \text{Prendo } x = x_1 \Rightarrow x_2 \geq x_1 \end{array}$$

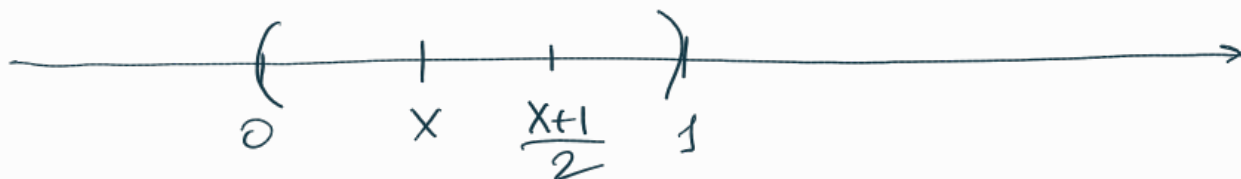
$$\underline{x_1 = x_2}$$



OSS Non tutti gli insiemi limitati superiormente ammettono massimo.

Per es. $E = (0, 1)$ è limitato superiormente ma non ammette massimo.

Voglio provare che ogni $x \in (0, 1)$ non è maggiorante di E .



Sia $x \in (0, 1)$: Prendo $\bar{x} = \frac{x+1}{2}$

$$\begin{array}{l} \frac{x+1}{2} > x > 0 \\ \frac{x+1}{2} < 1 \end{array} \quad \Bigg| \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{x+1}{2} \in E \\ \frac{x+1}{2} > x \end{array}$$

Se $E = (0, 1)$, allora $\{\text{maggioranti di } E\} = [1, +\infty)$