

ESERCIZIO 1

①

(a)

Per il principio di Pauli χ_1 deve essere simmetrica per scambio degli spin e χ_2 deve essere antisimmetrica. Quindi $\chi_1(S_1, S_2)$ è una combinazione di stati $S=1$ e $\chi_2(S_1, S_2)$ è una combinazione di stati $S=0$.

Dato che ψ è autostato di S_z con autovalore nullo

$$\chi_1 = \begin{matrix} | & 1 & 0 > \\ & S & S_z \end{matrix} \quad \chi_2 = |00> = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right> - \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right> \right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right> + \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right> \right)$$

(b)

Possiamo scrivere

$$\psi = A \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \left(Y_1^0(\theta_1, \phi_1) Y_0^0(\theta_2, \phi_2) - Y_1^0(\theta_2, \phi_2) Y_0^0(\theta_1, \phi_1) \right) |10> + B 4\pi Y_0^0(\theta_1, \phi_1) Y_0^0(\theta_2, \phi_2) |00>$$

La condizione di normalizzazione è quindi

$$\frac{16\pi^2}{3} |A|^2 \cdot 2 + 16\pi^2 |B|^2 = 1$$

Per quanto riguarda L^2

$$Y_1^0(\theta_1, \phi_1) Y_0^0(\theta_2, \phi_2) \rightarrow L_1=1 \quad L_2=0 \rightarrow L=1$$

$$Y_1^0(\theta_2, \phi_2) Y_0^0(\theta_1, \phi_1) \rightarrow L_1=0 \quad L_2=1 \rightarrow L=1$$

$$Y_0^0(\theta_1, \phi_1) Y_0^0(\theta_2, \phi_2) \rightarrow L_1=0 \quad L_2=0 \rightarrow L=0$$

$$\text{Quindi } \text{Prob}(L^2=2\hbar^2) = \frac{16\pi^2}{3} |A|^2 \cdot 2 = \frac{32\pi^2}{3} |A|^2$$

$$\text{Prob}(L^2=0) = 16\pi^2 |B|^2$$

(2)

La condizione di normalizzazione può anche essere ottenuta per calcolo diretto. Per la ortogonalità delle funzioni di spin

$$\begin{aligned}
 \langle \psi | \psi \rangle &= |A|^2 \int d\Omega_1 d\Omega_2 (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2 \\
 &\quad + |B|^2 \int d\Omega_1 d\Omega_2 \\
 &= (4\pi)^2 |B|^2 + (2\pi)^2 |A|^2 \int d\cos\theta_1 d\cos\theta_2 (\cos\theta_1 - \cos\theta_2)^2 \\
 &= (4\pi)^2 |B|^2 + 4\pi^2 |A|^2 \int dx dy (x^2 + y^2 - 2xy) \quad \begin{cases} x = \cos\theta_1 \\ y = \cos\theta_2 \end{cases} \\
 &= (4\pi)^2 |B|^2 + 4\pi^2 |A|^2 \left[\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{2}{3} \cdot 2 - \cancel{2} \right] \\
 &= 16\pi^2 |B|^2 + 4\pi^2 |A|^2 \cdot \frac{8}{3} = 16\pi^2 |B|^2 + \frac{32\pi^2}{3} |A|^2 \rightarrow \boxed{= 1}
 \end{aligned}$$

c)

È necessario riscrivere $|0\ 0\rangle$ e $|1\ 0\rangle$ in termini di autofunzioni $|S\ S_y\rangle$ di S^2 e S_y .

Ovviamente $|0\ 0\rangle = |0\ 0\rangle_{S\ S_y}$. Per il secondo stato dobbiamo riscrivere gli stati $|1\ S_z\rangle$ in termini di $|1\ S_y\rangle$.

I METODO (diretto)

Dato che $S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$ abbiamo $S_y = \frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$

nella base $|S\ S_z\rangle$. Quindi

(a) Autostato con $S_y = +1$

$$\frac{\hbar}{2i} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}b = 2ia \\ -\sqrt{2}a + \sqrt{2}c = 2ib \rightarrow \\ -\sqrt{2}b = 2ic \end{cases} \quad \begin{aligned} a &= -i \frac{\sqrt{2}}{2} b \\ c &= i \frac{\sqrt{2}}{2} b \end{aligned}$$

$$V = \left(-i \frac{\sqrt{2}}{2} b, b, i \frac{\sqrt{2}}{2} b \right)$$

(3)

$$\langle V|V \rangle = \frac{|b|^2}{2} + |b|^2 + \frac{|b|^2}{2} = 2|b|^2 \quad |b|^2 = \frac{1}{2}$$

Scegliamo $b = \frac{i}{\sqrt{2}}$ $v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{i}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2} \right)$

~~(b) Autostato con S_y~~ $|1\ 1\rangle_y = \frac{1}{2} |1\ 1\rangle_z + \frac{i}{\sqrt{2}} |1\ 0\rangle_z - \frac{1}{2} |1\ -1\rangle_z$

II metodo

Possiamo lavorare nello spazio $|S_1 S_{1z}\rangle$

$$S_{1y} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

autostato con autovalore $\hbar/2$

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{cases} -ib = a \\ ia = b \end{cases}$$

$$V = (a, ia) \quad \langle V|V \rangle = 1 \Rightarrow |a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$V = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, i/\sqrt{2} \right) \quad \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_{S_1 S_{1y}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Quindi

$$|1\ 1\rangle_y = \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_{S_1 S_{1y}} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_{S_2 S_{2y}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_{S_1 S_{1z}} + i \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle_{S_1 S_{1z}} \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_{S_2 S_{2z}} + i \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle_{S_2 S_{2z}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_{S_{1z} S_{2z}} + i \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + i \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle - \left| -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(|1\ 1\rangle_{S S_z} + \sqrt{2} i \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle_{S S_z} - |1\ -1\rangle_{S S_z} \right)$$

Come prima

Quindi

$$\text{Prob}(S_y = \hbar) = \left| A \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \right|^2 \cdot 2 \cdot \left| y \langle 11 | 10 \rangle_2 \right|^2$$
$$= |A|^2 \frac{16\pi^2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{16\pi^2}{3} |A|^2$$

Quindi $|A|^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{16\pi^2}$ $|A| = \frac{\sqrt{3}}{8\pi}$

Dalla condizione di normalizzazione abbiamo

$$|B|^2 = \frac{1}{16\pi^2} - \frac{2}{3} |A|^2 = \frac{1}{16\pi^2} - \frac{1}{32\pi^2} = \frac{1}{32\pi^2}$$

Con opportuna scelta di fase

$$A = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \quad B = e^{i\alpha} \frac{1}{4\pi\sqrt{2}}$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left(|10\rangle_1 |00\rangle_2 - |00\rangle_1 |10\rangle_2 \right) |10\rangle_{S_1 S_2}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} |00\rangle_1 |00\rangle_2 |00\rangle_{S_1 S_2}$$

d)

Possiamo considerare una base $|L_1 L_2 L S J J_z\rangle$ di autofunzioni di H . Gli elementi di questa base non soddisfano in generale il principio di Pauli.

Cominceremo con il determinare il livello di energia più basso ignorando il principio di Pauli.

Dato che $\omega < \alpha$ cominciamo con l'individuare i valori di L_1, L_2, L, S, J per cui

$$H_\alpha = \frac{1}{\hbar^2} (2J^2 - L^2)$$

è minimo

Per $S=0$ abbiamo $J=L$ e quindi i valori possibili degli autovalori E_α di H_α sono

$$E_\alpha = 2L(L+1) = \begin{cases} 0 & L=0 \\ 2 & L=1 \\ \vdots & \end{cases}$$

Per $S=1$ abbiamo $J = \begin{cases} L+1 \\ L \\ L-1 \end{cases}$ (non c'è per $L=0$)

Quindi per $L=0$ lo stato più basso è $J=L=0$, $E_\alpha=0$

Per $L \geq 1$ lo stato più basso corrisponde a $J=L-1$

$$\begin{aligned} E_\alpha &= 2(L-1)L - L(L+1) \\ &= 2L^2 - 2L - L^2 - L = L(L-3) \end{aligned}$$

$$E_\alpha = -2 \quad \text{per } L=1$$

$$E_\alpha = -2 \quad \text{per } L=2$$

$$E_\alpha \geq 0 \quad \text{per } L \geq 3$$

Gli stati con $J=L$ danno $E_\alpha > 0$ per ogni $L \geq 1$.

Quindi gli stati con E_α minimo corrispondono a

$$S=1 \quad L=1 \quad J=0$$

$$S=1 \quad L=2 \quad J=1$$

$$E_\alpha = -2$$

Il livello successivo ha $E_\alpha=0$

Per determinare il contributo del termine proporzionale a ω dobbiamo determinare le coppie (L_1, L_2) le cui "somma" dà i valori $L=1$ e $L=2$. Siamo ovviamente interessati alla coppia con

$$L_1(L_1+1) + L_2(L_2+1) \quad \text{minimo}$$

per $L=1$ consideriamo $(L_1, L_2) = (0, 1), (1, 0)$

$$L=2 \quad (L_1, L_2) = (1, 1)$$

Quindi consideriamo

⑥

$$\begin{cases} |0 \overset{L_1}{1} \overset{L_2}{1} \overset{L}{1} \overset{S}{1} \overset{J}{0} \overset{J_2}{0} \rangle \\ |1 \overset{L_1}{0} \overset{L_2}{1} \overset{L}{1} \overset{S}{1} \overset{J}{0} \overset{J_2}{0} \rangle \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E &= -\hbar\alpha \cdot 2 + 2\hbar\omega \\ &= 2\hbar(-\alpha + \omega) \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} |1 \overset{L_1}{1} \overset{L_2}{2} \overset{L}{1} \overset{S}{1} \overset{J}{1} \overset{J_2}{2} \rangle \quad E &= -\hbar\alpha \cdot 2 + 4\hbar\omega \\ &= 2\hbar(-\alpha + 2\omega) \end{aligned} \quad (b)$$

Vediamo quindi che i due stati (a) hanno energia minore dello stato (b). Inoltre per $\omega < \alpha$, la loro energia è sempre negativa.

Quindi in assenza del principio di Pauli lo stato fondamentale ha degenerazione 2 ed energia $E = 2\hbar(-\alpha + \omega)$

NOTA: Quando abbiamo parlato di "SOMMA" intendevamo somma nel senso di momento angolare.

Fissato L_1 , si può prendere $L_2 = \begin{cases} L_1 + 1 \\ L_1 \\ L_1 - 1 \end{cases}$ ottenendo sempre $L = 1$.

Vogliamo ora imporre l'antisimmetria della funzione.

Utilizzando le tavole dei Clebsch-Gordan 1×1 abbiamo

$$\begin{aligned} |0 \overset{L_1}{1} \overset{L_2}{1} \overset{L}{1} \overset{S}{1} \overset{J}{0} \overset{J_2}{0} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} |0 \overset{L_1}{1} \overset{L_2}{1} \overset{L}{1} \overset{S}{1} \overset{J}{1} \overset{J_2}{1} \rangle |1 \overset{S}{1} \overset{S_2}{-1} \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{3}} |0 \overset{L_1}{1} \overset{L_2}{1} \overset{L}{1} \overset{S}{1} \overset{J}{1} \overset{J_2}{0} \rangle |1 \overset{S}{1} \overset{S_2}{0} \rangle \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{3}} |0 \overset{L_1}{1} \overset{L_2}{1} \overset{L}{1} \overset{S}{1} \overset{J}{1} \overset{J_2}{-1} \rangle |1 \overset{S}{1} \overset{S_2}{1} \rangle \end{aligned}$$

In rappr. di Schrödinger la funzione spaziale $|011m\rangle$ è data da

$$Y_0^0(\theta_1, \varphi_1) Y_1^m(\theta_2, \phi_2)$$

Se avessimo considerato $|101100\rangle$ avremmo ottenuto come parti spaziali $|101m\rangle$, ossia

$$Y_1^m(\theta_1, \varphi_1) Y_0^0(\theta_2, \varphi_2)$$

Dato che $|S S_z\rangle$ per $S=1$ è simmetrico per scambio le parte spaziale deve essere antisimmetrica. Quindi lo stato che soddisfa al principio di Pauli è

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|011100\rangle - |101100\rangle)$$

che in rappr. di Schrödinger corrisponde a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{6}} (Y_0^0(1) Y_1^1(2) - Y_1^1(1) Y_0^0(2)) |1-1\rangle \\ & - \frac{1}{\sqrt{6}} (Y_0^0(1) Y_1^0(2) - Y_1^0(1) Y_0^0(2)) |10\rangle \\ & + \frac{1}{\sqrt{6}} (Y_0^0(1) Y_1^{-1}(2) - Y_1^{-1}(1) Y_0^0(2)) |11\rangle \end{aligned}$$

Lo stato fondamentale è quindi NON degenerare

e) Dobbiamo decomporre lo stato in termini di autofunzioni di J^2 .

$$\begin{aligned} |\psi\rangle = & \frac{1}{2} \left(|10\rangle_1 |00\rangle_2 - |00\rangle_1 |10\rangle_2 \right) |10\rangle^{S S_z} \\ & + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} |00\rangle_1 |00\rangle_2 |00\rangle^{S S_z} \end{aligned}$$

È immediato passare alla base $(L_1 L_{1z} L_2 L_{2z}) \rightarrow (L_1 L_2 L L_z)$

(8)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left(\overset{L_1 L_2 L L_2}{|11010\rangle} - \overset{S S_z}{|0110\rangle} \right) \overset{S S_z}{|10\rangle} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \overset{L_1 L_2 L L_2}{|0000\rangle} \overset{S S_z}{|00\rangle}$$

Utilizzando le tabelle CG (1x1) per i primi due termini

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \overset{L_1 L_2 L S J J_z}{|101120\rangle} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} \overset{L_1 L_2 L S J J_z}{|101100\rangle} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \overset{L_1 L_2 L S J J_z}{|011120\rangle} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{3}} \overset{L_1 L_2 L S J J_z}{|011100\rangle} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\alpha} \overset{L_1 L_2 L S J J_z}{|000000\rangle}$$

Energia di $\begin{cases} |101120\rangle \\ |011120\rangle \end{cases} \quad E = \hbar\alpha(2 \cdot 6 - 2) + 2\hbar\omega = 10\hbar\alpha + 2\hbar\omega$

Energia di $\begin{cases} |101100\rangle \\ |011100\rangle \end{cases} \quad E = \hbar\alpha(0 - 2) + 2\hbar\omega = -2\hbar\alpha + 2\hbar\omega$

Energia di $|000000\rangle \quad E = 0$

Quindi

$$\text{Prob}(E = 10\hbar\alpha + 2\hbar\omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Prob}(E = -2\hbar\alpha + 2\hbar\omega) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{6}$$

$$\text{Prob}(E = 0) = \frac{1}{2}$$

Esercizio 2

(9)

(a) La Hamiltoniana commuta con L_z e quindi possiamo considerare una base

$$\psi = \hat{R}(z) f_m(\theta) \text{ con } f_m(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta}$$

Le funzioni $f_m(\theta)$ soddisfano

$$L_z f_m = \hbar m f_m \quad m \in \mathbb{Z}$$

Quindi $H\psi = E\psi$ implica

$$\left[\frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{\hbar^2 m^2}{2\mu R^2} + \frac{1}{2} \mu \omega^2 \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 \right] \hat{R} = E \hat{R}$$

$$\left(\frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{1}{2} \mu \Omega_m^2 \right) \hat{R} = E \hat{R}$$

con $\Omega_m = \omega \left| m + \frac{1}{2} \right|$ (da notare il valore assoluto)

$$E = E - \frac{\hbar^2 m^2}{2\mu R^2} = E - \hbar \omega \frac{m^2}{2}$$

$\hat{R}(z)$ soddisfa l'equazione di un oscillatore armonico di pulsazione Ω_m .

Quindi lo spettro è dato da

$$\begin{aligned} E_{mn} &= \hbar \omega \frac{m^2}{2} + \hbar \omega \left| m + \frac{1}{2} \right| \left(n + \frac{1}{2} \right) & m \in \mathbb{Z} \\ &= \frac{\hbar \omega}{4} \left[2m^2 + |2m+1| (2n+1) \right] & n: 0, 1, \dots \end{aligned}$$

$$\text{BASE: } \psi_{mn} = R_n(z, \Omega_m) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\theta}$$

dove $R_n(z, \omega)$ è l'autofunzione (livello n) dell'oscillatore armonico di pulsazione ω

I livelli più bassi si ottengono prendendo i valori più bassi di $|m|$ e n

• $m=0 \quad n=0 \quad E = \frac{\hbar\omega}{4}$

$m=0 \quad n=1 \quad E = \frac{3\hbar\omega}{4} \quad E_{0n} = \frac{\hbar\omega}{4} (2n+1)$

$m=0 \quad n=2 \quad E = \frac{5\hbar\omega}{4} \quad \text{STATI } n \geq 3 \text{ hanno } E > \frac{5\hbar\omega}{4}$

• $m=1 \quad E = \frac{\hbar\omega}{4} (2 + 3(2n+1)) = \frac{\hbar\omega}{4} (5 + 6n)$

$m=1 \quad n=0 \quad E = \frac{5\hbar\omega}{4} \quad \text{STATI } n \geq 1 \text{ hanno } E > \frac{5\hbar\omega}{4}$

• $m=-1 \quad E = \frac{\hbar\omega}{4} (2 + 2n+1) = \frac{\hbar\omega}{4} (3 + 2n)$

$m=-1 \quad n=0 \quad E = \frac{3\hbar\omega}{4}$

$m=-1 \quad n=1 \quad E = \frac{5\hbar\omega}{4} \quad \text{STATI } n \geq 2 \text{ hanno } E > \frac{5\hbar\omega}{4}$

• $m=2 \quad E = \frac{\hbar\omega}{4} (8 + 5(2n+1)) \quad \text{TUTTI GLI STATI hanno } E > \frac{5\hbar\omega}{4}$

$m=-2 \quad E = \frac{\hbar\omega}{4} (8 + 3(2n+1)) \quad \text{TUTTI GLI STATI hanno } E > \frac{5\hbar\omega}{4}$

Quindi

STATO FOND $E = \frac{\hbar\omega}{4} \quad m=0 \quad n=0 \quad \text{NON DEG.}$

I ecc. $E = \frac{3\hbar\omega}{4} \quad \begin{cases} m=0 \quad n=1 \\ m=-1 \quad n=0 \end{cases} \quad \text{DEG 2}$

II ecc. $E = \frac{5\hbar\omega}{4} \quad \begin{cases} m=0 \quad n=2 \\ m=-1 \quad n=1 \\ m=1 \quad n=0 \end{cases} \quad \text{DEG 3}$

(b)

Normalizziamo innanzitutto la parte radiale della funzione d'onda

Per evitare calcoli possiamo notare che il termine esponenziale è quello che appare in un oscillatore di pulsazione $\omega/2$.

Definiamo quindi la funzione normalizzata

$$R_0(z, \frac{\omega}{2}) = \left(\frac{m\omega}{2\hbar\pi} \right)^{1/4} e^{-\mu\omega x^2/4}$$

Quindi

$$\psi = N' (\cos\theta + 1) R_0(z, \frac{\omega}{2}) \quad N' = N \left(\frac{2\hbar\pi}{m\omega} \right)^{1/4}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \cos\theta + 1 &= \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta} + 2) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2} (f_1(\theta) + f_{-1}(\theta) + 2f_0(\theta)) \end{aligned}$$

Quindi

$$\psi = N' \sqrt{\frac{\pi}{2}} (f_1 + f_{-1} + 2f_0) R_0(z, \frac{\omega}{2})$$

Deve quindi valere

$$\left| N' \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right|^2 (1 + 1 + 4) = 1$$

$$|N'|^2 = \frac{1}{3\pi}$$

Con una opportuna scelta di fase

$$N = \left(\frac{m\omega}{2\pi\hbar} \right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{3\pi}}$$

Segue

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{6}} (f_1(\theta) + f_{-1}(\theta) + 2f_0(\theta)) R_0(z, \frac{\omega}{2})$$

Per calcolare le probabilità abbiamo che; (12)

base per il livello fond. $f_0(\theta) R_0(z, \frac{\omega}{2}) \Rightarrow |0\ 0\rangle$
 $[\Omega_0 = \frac{\omega}{2}]$

base per il livello eccitato

$f_0(\theta) R_1(z, \frac{\omega}{2}) \Rightarrow |0\ 1\rangle$ $[\Omega_0 = \Omega_{-1} = \frac{\omega}{2}]$

$f_{-1}(\theta) R_0(z, \frac{\omega}{2}) \Rightarrow |-1\ 0\rangle$

Quindi

$$P_0 = |\langle 0\ 0 | \psi \rangle|^2$$

$$\langle 0\ 0 | \psi \rangle = \int d\theta dz f_0^*(\theta) R_0^*(z, \frac{\omega}{2}) \times \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (f_1 + f_{-1} + 2f_0) R_0(z, \frac{\omega}{2})$$

Per l'ortonormalità delle autofunzioni di θ

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \int d\theta |f_0|^2 \int dz |R_0(z, \frac{\omega}{2})|^2 = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$P_0 = 2/3$$

Si ha poi

$$P_1 = |\langle -1\ 0 | \psi \rangle|^2 + |\langle 0\ 1 | \psi \rangle|^2$$

$$\langle -1\ 0 | \psi \rangle = \int d\theta dz f_{-1}^*(\theta) R_0^*(z, \frac{\omega}{2}) \times \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (f_1 + f_{-1} + 2f_0) R_0(z, \frac{\omega}{2}) \\ = \frac{1}{\sqrt{6}} \int d\theta |f_{-1}(\theta)|^2 \int dz |R_0(z, \frac{\omega}{2})|^2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\langle 0\ 1 | \psi \rangle = \int d\theta dz f_0^*(\theta) R_1^*(z, \frac{\omega}{2}) \\ \frac{1}{\sqrt{6}} (f_1 + f_{-1} + 2f_0) R_0(z, \frac{\omega}{2}) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{6}} \int d\theta |f_0(\theta)|^2 \int dz R_1^*(z, \frac{\omega}{2}) R_0(z, \frac{\omega}{2}) = 0$$

Quindi

$$P_1 = \frac{1}{6}$$

NOTA: La funzione ψ non è somma di autofunzioni di H .

Infatti: $f_{-1}(\theta) R_0(z, \frac{\omega}{2})$ e $f_0(\theta) R_0(z, \frac{\omega}{2})$ sono autofunzioni

Invece $f_1(\theta) R_0(z, \frac{\omega}{2})$ non è autofunzione dato che $\Omega_1 = \frac{3}{2}\omega$

Lo stato ψ ha quindi elemento di matrice non nullo con tutti gli stati $m=1$ ed n pari (lo stato deve essere pari per $z \rightarrow -z$) ossia con gli stati

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\theta} R_n(z, \frac{3\omega}{2}) \quad n \text{ pari}$$

c)

$$\text{Abbiamo } P(L_z = \pm \hbar) = \frac{1}{6} \quad P(L_z = 0) = \frac{2}{3}$$

d) Sono possibili solo gli stati dispari in z .
Lo spettro è quindi

$$E_{mn} = \frac{\hbar\omega}{4} (2m^2 + |2m+1|(2n+1)) \quad n \text{ disp.}$$

$$\text{Se } n = 2k+1 \quad k: 0, \dots$$

$$E_{mk} = \frac{\hbar\omega}{4} (2m^2 + |2m+1|(4k+3))$$

Lo stato fond. ha energia $E = \frac{3\hbar\omega}{4}$ e non è degenero