

Esame di Meccanica Quantistica 15/07/2026

Si considerino due particelle identiche di spin $1/2$ e massa m vincolate a muoversi su una sfera di raggio $R = 1$. Siano $\mathbf{S}_1$ e $\mathbf{S}_2$ gli spin delle due particelle, $\mathbf{L}_1$ e $\mathbf{L}_2$ i loro momenti angolari e $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$, $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$.

La funzione d'onda normalizzata del sistema è data da

$$\psi = A(\cos \theta_1 - \cos \theta_2)\chi_1(S_1, S_2) + B\chi_2(S_1, S_2),$$

dove $\chi_1(S_1, S_2)$ e $\chi_2(S_1, S_2)$ sono funzioni normalizzate che dipendono dallo spin delle due particelle; A e B sono costanti complesse.

a) Sapendo che lo stato è un'autofunzione di S_z con autovalore nullo, si esprimano le funzioni di spin in termini dei ket $|s_{1z}s_{2z}\rangle$, autovettori degli operatori S_{1z} e S_{2z} con autovalore $\hbar s_{1z}$, $\hbar s_{2z}$.

b) Quale relazione devono soddisfare A e B per garantire che lo stato ψ sia normalizzato? Si effettua una misura di L^2 ; quali valori possono essere ottenuti e con quale probabilità?

c) Sapendo che la probabilità di misurare $S_y = \hbar$ sullo stato è $1/4$, si determinino tutti i valori possibili per A e B .

d) L'Hamiltoniana del sistema è

$$H = \frac{\alpha}{\hbar} (2J^2 - L^2) + \frac{\omega}{\hbar} (L_1^2 + L_2^2)$$

con $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ e $0 < \omega < \alpha$. Si determini l'energia del livello fondamentale, se ne determini l'eventuale degenerazione ed una base di autofunzioni.

e) In una misura di energia sugli stati ψ identificati al punto c), quali valori possono essere ottenuti e con quale probabilità?

Esercizio 2. Una particella di spin 0 e massa μ è confinata su un cilindro di raggio R e altezza infinita. Si descriva la sua posizione sul cilindro con le coordinate θ e z , dove θ è l'angolo relativo ad una rotazione lungo l'asse $\hat{z}$ del cilindro e z è la coordinata verticale ($z \in (-\infty, +\infty)$). La dinamica della particella è descritta dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{p_z^2}{2\mu} + \frac{L_z^2}{2\mu R^2} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 \left(\frac{L_z}{\hbar} + \frac{1}{2} \right)^2 z^2,$$

con $\omega = \hbar/(\mu R^2)$.

a) Si scriva una base di autofunzioni di H e si determini lo spettro dei livelli energetici. Si identifichino i primi tre livelli energetici e se ne calcoli la degenerazione.

b) Si consideri lo stato descritto dalla funzione d'onda normalizzata:

$$\psi(\theta, z) = N (\cos \theta + 1) e^{-z^2 \mu \omega / 4 \hbar}$$

Si calcoli la costante di normalizzazione N .

Si calcolino le probabilità P_0 , P_1 che una misura di energia dia come risultato rispettivamente il valore del livello fondamentale e quello del primo livello eccitato.

c) Si determini quali risultati può dare una misura di L_z su ψ e con quali probabilità.

d) Come cambiano i livelli energetici e le autofunzioni di H calcolate al punto a) se la particella può muoversi unicamente nel semispazio $z > 0$?