

Esercizio 1

(1)

a) Per due particelle di spin $1/2$, $S=0, 1$. Dato che $[\bar{S}, H]=0$, possiamo calcolare lo spettro separatamente per $S=0$ e $S=1$

Nel CM $\left[\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{2m} = \frac{3}{2m}, \mu = \frac{2}{3}m \right]$ abbiamo

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \left(\frac{S^2}{2\hbar^2} + 1 \right) \frac{\alpha}{r}$$

e definiamo $a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu\alpha}$ $E_0 = -\frac{\alpha}{2a_0} = -\frac{\mu\alpha^2}{2\hbar^2}$

$S=0$ $H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{\alpha}{r}$

Raggio di Bohr $a_B^{(0)} = a_0$

$$E_n^{(0)} = -\frac{E_0}{n^2}$$

$S=1$ $H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{2\alpha}{r}$

Raggio di Bohr $a_B^{(1)} = \frac{\hbar^2}{\mu(2\alpha)} = \frac{a_0}{2}$

$$E_n^{(1)} = -\frac{\mu(2\alpha)^2}{2\hbar^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{4E_0}{n^2}$$

Dato che abbiamo due Hamiltoniane con potenziale $1/r$ e raggio di Bohr differenti definiamo

$$R_{ne}(r, a_B)$$

la funzione radiale (nl) con raggio di Bohr a_B e definiamo i ket

$$\langle \bar{r} | n l m a_B \rangle = R_{ne}(r, a_B) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Il raggio di Bohr indicato nel ket serve a chiarire di quale Hamiltoniana la funzione d'onda è autofunzione.

$$E_{SF} = -4E_0$$

base $|100 a_B^{(1)}\rangle |1 S_z\rangle$ deg. 3

I ECCITATO

$$E_I = -E_0$$

base $|100 a_B^{(0)}\rangle |00\rangle$ 1 stato
 $|200 a_B^{(1)}\rangle |1 S_z\rangle$ 3 stati
 $|21m a_B^{(1)}\rangle |1 S_z\rangle$ 3×3 stati

deg: $1+3+9=13$

NOTA: Le particelle sono NECESSARIAMENTE DISTINGUIBILI avendo masse diverse. Non si applica il principio di Pauli

b)

La scala di energia del problema è $E_0 \propto \frac{\mu \alpha^2}{\hbar^2} \sim \frac{m \alpha^2}{\hbar^2}$

La scala di lunghezza è $a_{\text{Bohr}} \sim \frac{\hbar^2}{\mu \alpha} \sim \frac{\hbar^2}{m \alpha}$

Quindi possiamo scrivere

$$V = \beta \frac{m \alpha^2}{\hbar^2} \frac{r^2}{\left(\frac{\hbar^2}{m \alpha}\right)^2} = \beta \frac{m \alpha^2}{\hbar^2} \frac{m^2 \alpha^2}{\hbar^4} r^2 = \beta \frac{m^3 \alpha^4}{\hbar^6} r^2$$

Calcolo diretto ($[\alpha] = [EL]$)

$$\begin{aligned} [m^a \alpha^b \hbar^c] &= [M]^a [EL]^b [E\hbar]^c \\ &= [ML^2 T^{-2} L^{-2} T^2]^a [EL]^b [ET]^c \\ &= [E]^a [L]^{-2a} [T]^{2a} [E]^b [L]^b [E]^c [T]^c \\ &= [E]^{a+b+c} [L]^{b-2a} [T]^{2a+c} \end{aligned}$$

Il prefattore deve avere dimensioni $[E][L]^{-2}$. Quindi ⁽³⁾

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b-2a=-2 \\ 2a+c=0 \end{cases} \begin{cases} c=-2a \\ b=2a-2 \\ a+2a-2-2a=1 \end{cases} \begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=-6 \end{cases}$$

Il potenziale ~~da~~ $-\frac{\alpha}{r} + V$ soddisfa a $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = +\infty$

Quindi non ci sono moti classici illimitati e quindi non ci sono stati di scattering (spettro continuo)

c) La perturbazione è indipendente dallo spin. Quindi tutti gli stati che appartengono al livello fondamentale acquisiscono la stessa energia

$$\Delta E = \langle 100 a_B^{(1)} | V | 100 a_B^{(1)} \rangle$$

Dato che $R_{10}(r, a_B) = \frac{2}{a_B^{3/2}} e^{-r/a_B}$ abbiamo

$$\Delta E = \beta \frac{m^3 \alpha^4}{\hbar^6} \bar{r}^2 \quad \text{con}$$

$$\begin{aligned} \bar{r}^2 &= \int d^3r \, r^2 |R_{10}(r, a_B^{(1)})|^2 |Y_0^0|^2 \\ &= \int dr \, r^2 |R_{10}(r, a_B^{(1)})|^2 \int d\Omega |Y_0^0|^2 \\ &= \frac{4}{(a_B^{(1)})^3} \int_0^\infty dr \, r^4 e^{-2r/a_B^{(1)}} = (a_B^{(1)})^2 \frac{4}{2^5} 4! = 3 (a_B^{(1)})^2 \\ &= \frac{3}{4} a_0^2 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \Delta E &= \beta \frac{m^3 \alpha^4}{\hbar^6} \frac{3}{4} \frac{\hbar^4}{\mu^2 \alpha^2} = \frac{3}{4} \beta \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \frac{m \alpha^4}{\hbar^2} = \frac{3}{4} \beta \frac{9}{4} \frac{m \alpha^4}{\hbar^2} = \\ &= \frac{27}{16} \beta \frac{m \alpha^4}{\hbar^2} \end{aligned}$$

d) Si tratta di una combinazione di stati del 4^o I livello eccitato con $\bar{L}=0$ e $S_z=0$. Vi sono solo due stati possibili tra quelli delle base riportate al punto a)

$$|\psi\rangle = a |100\rangle a_B^{(0)} + b |200\rangle a_B^{(1)} + |10\rangle$$

Il punto iv) fornisce $|b|^2 = \frac{1}{3}$. Dato che $|a|^2 + |b|^2 = 1$ per normalizzazione abbiamo $|a|^2 = \frac{2}{3}$. Scegliendo a reale positivo abbiamo

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}} \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\alpha} \quad \alpha \text{ arbitrario}$$

Dato che ψ è autofunzione di H i valori medi non dipendono da t .

$$\langle \psi_t | H | \psi_t \rangle = -E_0$$

Per quel che riguarda $\bar{J}$, notiamo che $L^2|\psi\rangle = 0$ per ipotesi che implica $\bar{L}|\psi\rangle = 0$ per tutte le componenti. Quindi $\langle \psi_t | \bar{J} | \psi_t \rangle = \langle \psi | \bar{S} | \psi \rangle$

Ora

$$\langle \psi | S_z | \psi \rangle = 0 \quad \text{dato che } |\psi\rangle \text{ è autostato di } S_z \text{ con autovalore nullo}$$

$$\langle \psi | S_x | \psi \rangle = \langle \psi | S_y | \psi \rangle = 0 \quad \text{dato che } S_x \text{ e } S_y \text{ hanno elementi di matrice non nulli solo tra stati con } \Delta S_z = \pm 1 \text{ (regola di selezione)}$$

Esercizio 2)

(5)

a) La Hamiltoniana è diagonale nella base $|S_{1z}, S_{2z}\rangle$

$$H_0 \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \left[4A \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 2B \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = (A + 2B) \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$H_0 \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \left[4A \left(\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) + 2B \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = -A \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$H_0 \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = \left[4A \left(-\frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + 2B \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \right] \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle = -A \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$H_0 \left| -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \left[4A \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) + 2B \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \right] \left| -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = (A - 2B) \left| -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Vi sono quindi 3 livelli per valori generici di A e B .

$$E = A + 2B \quad \text{non deg.} \quad \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$E = -A \quad \text{deg} = 2 \quad \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle$$

$$E = A - 2B \quad \text{non deg.} \quad \left| -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

Se $-A = A - 2B$ ossia $A = B$, allora vi è uno stato con

$$E = -A \quad \text{degenerazione 3} \quad \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle, \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle, \left| -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

STATO FONDI:

Per $0 < B < A$ lo SF ha energia $E = -A$, deg. 2

Per $B = A$ lo SF ha energia $E = -A$, deg. 3

Per $B > A$ lo SF ha energia $E = A - 2B$, deg. 1

b) Lo stato è dato $|S_{1x} = \frac{1}{2}\rangle |S_{2x} = \frac{1}{2}\rangle$ dove abbiamo utilizzato la base in cui la componente x è diagonale

Vogliamo ora esprimere $|S_{1x} = \frac{1}{2}\rangle$ in termini di $|S_{1z}\rangle$, autofunzioni di S_{1z} . In questa base ⑥

$$S_{1x} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi, se $|S_{1x} = \frac{1}{2}\rangle$ è rappresentato da $(a, b) = v$

$$\frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \begin{cases} b = a \\ a = b \end{cases} \quad v = (a, a)$$

Per normalizzazione $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi

$$|S_{1x} = \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\left| \frac{1}{2} \right\rangle_1}_{\text{autofunzioni di } S_{1z}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{\left| -\frac{1}{2} \right\rangle_1}_{\text{autofunzioni di } S_{1z}}$$

Analogamente

$$|S_{2x} = \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{1}{2} \right\rangle_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| -\frac{1}{2} \right\rangle_2$$

Quindi

$$|S_{1x} = \frac{1}{2}\rangle |S_{2x} = \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{2} \overset{S_{1z}}{\downarrow} \overset{S_{2z}}{\downarrow} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2} \left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2} \left| -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i(A+2B)t/\hbar} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2} e^{iAt/\hbar} \left(\left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right) + \frac{1}{2} e^{-i(A-2B)t/\hbar} \left| -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle = \left[\text{mult. per } e^{-iAt/\hbar} \right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-2i(A+B)t/\hbar} \left| \frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2} e^{-2i(A-B)t/\hbar} \left| -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \frac{1}{2} \left(\left| \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \right\rangle + \left| -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right\rangle \right)$$

NOTA sui punti (a) e (b)

(7)

Era anche possibile risolvere il problema nella base in cui S^2 e S_z ($\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$) sono diagonali.

Infatti possiamo scrivere

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{2A}{\hbar^2} \left[(S_{1z} + S_{2z})^2 - S_{1z}^2 - S_{2z}^2 \right] + \frac{2B}{\hbar} (S_{1z} + S_{2z}) \\ &= \frac{2A}{\hbar^2} \left[S_z^2 - \frac{\hbar^2}{4} - \frac{\hbar^2}{4} \right] + \frac{2B}{\hbar} S_z \\ &= \frac{2A}{\hbar^2} S_z^2 + \frac{2B}{\hbar} S_z - A \end{aligned}$$

Base

$$E = A + 2B \quad \begin{array}{cc} S_z & S_{2z} \\ |1 & 1\rangle = \left| \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \end{array}$$

$$E = A - 2B \quad |1 - 1\rangle = \left| -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2} \right\rangle$$

$$E = -A \quad \begin{cases} |10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle + \left| -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \right) \\ |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right\rangle - \left| -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \right) \end{cases}$$

Per rispondere alla domanda b) in questa rappresentazione è necessario esprimere l'operatore S_x in termini di $|1 S_z\rangle_z$. ~~Il vettore~~

$S^2 S_x$

nella base $|1 S_z\rangle_z$ è dato da

$$S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

L' autovettore (a, b, c) con autovalore $\hbar$ soddisfa a (8)

$$\hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} b = a \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (a+c) = b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b = c \end{cases}$$

$$v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} b, b, \frac{\sqrt{2}}{2} b \right) \quad \langle v | v \rangle = \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} \right) |b|^2 = 1 \quad |b| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Scegliamo $b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow v = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$

$$|11\rangle_x = \frac{1}{2} |11\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle_z + \frac{1}{2} |1-1\rangle_z$$

Procedendo come prima otteniamo

$$\frac{1}{2} e^{-2i(A+B)t/\hbar} |11\rangle + \frac{1}{2} e^{-2i(A-B)t/\hbar} |1-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |10\rangle$$

c)

È necessario che $\psi(T) = e^{iC} \psi(0)$ con $C \in \mathbb{R}$

Dato che il termine è proporzionale a

$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{2} \frac{1}{2} \right)$ (oppure $|10\rangle_z$ se viene usata la base $|S^2 S_z\rangle$) è indipendente da t , abbiamo $C=0$.

Quindi è necessario che esistano $n, m \in \mathbb{Z}$ tali che

$$\begin{cases} 2(A+B)T/\hbar = 2n\pi \\ 2(A-B)T/\hbar = 2m\pi \end{cases} \quad \frac{A-B}{A+B} = \frac{m}{n}$$

$$(A-B) = \left(\frac{m}{n} \right) (A+B) \quad A \left(1 - \frac{m}{n} \right) = B \left(1 + \frac{m}{n} \right)$$

$$\frac{A}{B} = \frac{n+m}{n-m} \Rightarrow \text{È necessario che } \frac{A}{B} \in \mathbb{Q} \text{ (numero razionale)}$$

d) Si può risolvere il problema nelle due diverse basi.

(9)

d1) Soluzione nella base $|S_{1z} S_{2z}\rangle$.

In questo caso $V = \frac{\epsilon}{\hbar} (S_{1x} + S_{2x})$.

Per una particelle di spin $\frac{1}{2}$
$$\begin{cases} S_x |\frac{1}{2}\rangle = \frac{\hbar}{2} |-\frac{1}{2}\rangle \\ S_x |-\frac{1}{2}\rangle = -\frac{\hbar}{2} |\frac{1}{2}\rangle \end{cases}$$

Quindi

$$V |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = \frac{\epsilon}{2} \left(|-\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle \right)$$

$$V |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle = \frac{\epsilon}{2} \left(|-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \right)$$

$$V |-\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = \frac{\epsilon}{2} \left(|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle \right)$$

$$V |-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle = \frac{\epsilon}{2} \left(|\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle + |-\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \right)$$

Nel caso generico ($A \neq B$) la correzione è nulla per tutti i livelli. Infatti

$$\bullet |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \quad \langle \frac{1}{2} \frac{1}{2} | V | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = 0$$

$$\bullet |-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle \quad \langle -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} | V | -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = 0$$

$$\bullet \begin{cases} |\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle \\ |-\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle \end{cases} \quad \begin{cases} \langle \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | V | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = 0 \\ \langle -\frac{1}{2} \frac{1}{2} | V | -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\langle \frac{1}{2} -\frac{1}{2} | V | -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = 0$$

Consideriamo ora il caso $A = B$

Ordiniamo i tre stati del livello degenerare come

$|\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle, |-\frac{1}{2} -\frac{1}{2}\rangle$. Sono non nulli

$$\langle -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} | V | \frac{1}{2} -\frac{1}{2} \rangle = \frac{\epsilon}{2}$$

e trasposti

$$\langle -\frac{1}{2} -\frac{1}{2} | V | -\frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle = \frac{\epsilon}{2}$$

Quindi

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \epsilon/2 \\ 0 & 0 & \epsilon/2 \\ \epsilon/2 & \epsilon/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(V - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \epsilon/2 \\ 0 & -\lambda & \epsilon/2 \\ \epsilon/2 & \epsilon/2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & \epsilon/2 \\ \epsilon/2 & -\lambda \end{vmatrix} + \frac{\epsilon}{2} \begin{vmatrix} 0 & -\lambda \\ \epsilon/2 & \epsilon/2 \end{vmatrix} = -\lambda \left(\lambda^2 - \frac{\epsilon^2}{4} \right) + \frac{\epsilon^2}{4} \lambda = \lambda \left(-\lambda^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \det(V - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = \pm \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$$

Il livello si separa in 3 livelli $\Delta E = \begin{matrix} \epsilon/\sqrt{2} \\ 0 \\ -\epsilon/\sqrt{2} \end{matrix}$

d2) Soluzione nella base $|S S_z\rangle$, $V = \frac{\epsilon}{\hbar} S_x$

Abbiamo

$$\frac{1}{\hbar} S_x |0 0\rangle = 0$$

$$\frac{1}{\hbar} S_x |1 0\rangle = \frac{1}{2} (S_+ + S_-) |1 0\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} |1 1\rangle + \frac{\sqrt{2}}{2} |1 -1\rangle$$

$$\frac{1}{\hbar} S_x |1 -1\rangle = \frac{1}{2} (S_+ + S_-) |1 -1\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2} |1 0\rangle$$

Discutiamo solo il caso $A=B$ (per $A \neq B$ non ci sono correzioni).
Ordiniamo gli stati del livello $|1 0\rangle, |1 -1\rangle, |0 0\rangle$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(V - \lambda I) = \lambda \left(\lambda^2 - \frac{\epsilon^2}{2} \right) \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = \pm \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \text{ come prima}$$

d) Ricordiamo $E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|\langle m | V | n \rangle|^2}{E_n - E_m}$

Consideriamo il livello corrispondente a $|\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle = |1, 1\rangle$

Nella base $|S_{1z} S_{2z}\rangle$

$$\Delta E = \frac{1}{(A+2B)-(-A)} \left[\left| \langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | V | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \right|^2 + \left| \langle -\frac{1}{2} \frac{1}{2} | V | \frac{1}{2} \frac{1}{2} \rangle \right|^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2A+2B} 2 \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^2 = \frac{1}{A+B} \frac{\epsilon^2}{4} \stackrel{(A=2B)}{=} \frac{\epsilon^2}{12B}$$

Nella base $|S S_z\rangle$

$$\Delta E = \frac{1}{A-2B-(-A)} \left[\left| \langle 1 0 | V | 1 1 \rangle \right|^2 \right] = \frac{1}{2A-2B} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon \right)^2 = \frac{\epsilon^2}{12B}$$

Consideriamo il livello corrispondente a $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = |1, -1\rangle$

Nella base $|S_{1z} S_{2z}\rangle$

$$\Delta E = \frac{1}{A-2B+A} \left[\left| \langle \frac{1}{2} - \frac{1}{2} | V | -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle \right|^2 + \left| \langle -\frac{1}{2} \frac{1}{2} | V | -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \rangle \right|^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2A-2B} 2 \left(\frac{\epsilon^2}{4} \right) = \frac{1}{A-B} \frac{\epsilon^2}{4} \stackrel{(A=2B)}{=} \frac{\epsilon^2}{4B}$$

Nella base $|S S_z\rangle$

$$\Delta E = \frac{1}{A-2B+A} \left| \langle 1 0 | V | 1 -1 \rangle \right|^2 = \frac{1}{2A-2B} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \epsilon \right)^2 = \frac{\epsilon^2}{4B}$$

ADDENDUM: la correzione a $|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\rangle = |1, -1\rangle$ diverge per $A \rightarrow B$. Ciò è dovuto al fatto che questo stato diventa degenero con $|1 0\rangle, |0 0\rangle$ per $A \rightarrow B$ e la correzione allo spettro diventa lineare in ϵ . Questo significa che per $|A-B| \ll 1$ la teoria standard delle perturbazioni non funziona.

In questo caso si procede con la diagonalizzazione ESATTA DI $H+V$ nel sottospazio quasi degenere con base $|10\rangle, |1-1\rangle, |00\rangle$

$$H_T = H+V = \begin{pmatrix} -A & \epsilon/\sqrt{2} & 0 \\ \epsilon/\sqrt{2} & A-2B & 0 \\ 0 & 0 & -A \end{pmatrix}$$

$$\det(H_T - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -A-\lambda & \epsilon/\sqrt{2} & 0 \\ \epsilon/\sqrt{2} & A-2B-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -A-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \left[(-A-\lambda)(A-2B-\lambda) - \frac{\epsilon^2}{2} \right] (-A-\lambda)$$

Quindi un autovalore è uguale a $-A$. Gli altri due soddisfano l'equazione

$$\lambda^2 + \lambda(A-A+2B) - A(A-2B) - \frac{\epsilon^2}{2} = 0$$

$$\lambda^2 + 2B\lambda - A(A-2B) - \frac{\epsilon^2}{2} = 0$$

$$\Delta/4 = B^2 + A^2 - 2AB + \frac{\epsilon^2}{2} = (A-B)^2 + \frac{\epsilon^2}{2}$$

$$\lambda = -B \pm \sqrt{(B-A)^2 + \frac{\epsilon^2}{2}}$$

Quindi vi sono tre livelli con

$$E_1 = -A \quad E_2 = -B + \sqrt{(B-A)^2 + \frac{\epsilon^2}{2}} \quad E_3 = -B - \sqrt{(B-A)^2 + \frac{\epsilon^2}{2}}$$

Queste espressioni valgono per ϵ piccolo, per ogni A, B

Il comportamento angolare della teoria perturbativa si riflette nel comportamento angolare delle radici per $\epsilon \rightarrow 0$

$$\sqrt{(A-B)^2 + \frac{\epsilon^2}{2}} = \begin{cases} |A-B| \left(1 + \frac{\epsilon^2}{4(A-B)^2} \right) & \text{per } A \neq B \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \epsilon & \text{per } A = B \end{cases}$$