

Esame di Meccanica Quantistica 01/07/2026

Esercizio 1. Si considerino due particelle di spin $1/2$, rispettivamente di massa m e $2m$, che interagiscono con Hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{4m} - \frac{\alpha}{r} \left(\frac{S^2}{2\hbar^2} + 1 \right),$$

dove $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ e $\alpha > 0$. Si consideri il sistema nel centro di massa.

a) Si determinino gli intervalli di energia in cui lo spettro è solo discreto (sono presenti solo stati legati) ed esclusivamente continuo (sono presenti solo stati di scattering).

Si determini inoltre l'energia del livello fondamentale e del primo eccitato, la loro degenerazione ed una base di autofunzioni per i due livelli.

b) Si supponga ora di aggiungere una perturbazione $V = \beta m^a \alpha^b \hbar^c r^2$, dove β è una costante adimensionale. Si utilizzi l'analisi dimensionale per determinare gli esponenti a , b , c .

Si consideri ora l'Hamiltoniana $H + V$ con $\beta > 0$. Esiste un intervallo di energia in cui lo spettro è continuo (stati di scattering)?

c) Si calcoli l'energia dello stato fondamentale di $H + V$ al primo ordine perturbativo per $0 < \beta \ll 1$.

d) Si considerino ora tutti gli stati $|\psi\rangle$ con le seguenti proprietà: i) sono autofunzioni di L^2 con autovalore zero, dove $\mathbf{L}$ è il momento angolare orbitale del sistema; ii) una misura di energia H fornisce solo il valore corrispondente al primo stato eccitato; iii) la probabilità di misurare $S_z \neq 0$ è nulla; iv) la probabilità di misurare $S^2 = 2\hbar^2$ è $\frac{1}{3}$. Si calcolino $\langle \psi_t | H | \psi_t \rangle$, $\langle \psi_t | J_x | \psi_t \rangle$, $\langle \psi_t | J_y | \psi_t \rangle$, $\langle \psi_t | J_z | \psi_t \rangle$, dove $|\psi_t\rangle$ è l'evoluto al tempo t di $|\psi\rangle$ e $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$.

Esercizio 2. Si consideri un sistema composto da due particelle distinguibili di spin $1/2$. L'Hamiltoniana imperturbata del sistema è la seguente:

$$H_0 = \frac{4A}{\hbar^2} S_{1z} S_{2z} + \frac{2B}{\hbar} (S_{1z} + S_{2z})$$

dove S_{1z} e S_{2z} sono le componenti z degli operatori di spin delle singole particelle, mentre A e B sono due costanti reali positive con le dimensioni di un'energia ($A > 0$, $B > 0$).

a) Si determinino gli autovalori e una base di autoket di H_0 . Successivamente, si calcolino il valore dell'energia del livello fondamentale e la sua degenerazione al variare dei parametri A e B .

b) Si assuma che al tempo $t = 0$ il sistema si trovi nell'autostato della componente x dell'operatore di spin totale, ovvero di $S_x = S_{1x} + S_{2x}$, corrispondente all'autovalore massimo. Si determini lo stato del sistema $|\psi(t)\rangle$ a un generico istante di tempo $t > 0$.

c) Sulla base dell'evoluzione temporale calcolata al punto precedente, si ricavi la relazione matematica che devono soddisfare le costanti A e B per garantire con certezza l'esistenza di un tempo $T > 0$ per cui il sistema ritorni nello stato iniziale: $|\psi(T)\rangle \propto |\psi(0)\rangle$.

d) Alla Hamiltoniana imperturbata H_0 viene aggiunta una perturbazione

$$V = \frac{\epsilon}{\hbar} S_x,$$

dove ϵ è un parametro perturbativo piccolo ($0 < \epsilon \ll A, B$). Si calcolino, al primo ordine perturbativo, le correzioni energetiche per tutti i livelli del sistema.

e) Si assuma ora che tra le costanti dell'Hamiltoniana valga la relazione specifica $A = 2B$. Utilizzando la medesima perturbazione $V = \frac{\epsilon}{\hbar} S_x$ introdotta al punto precedente, si calcoli la correzione al secondo ordine della teoria delle perturbazioni per i soli livelli non degeneri di H_0 .