Esercizio 1

Domanda a)

Lo spettro di H si calcola immediatamente.

Per due particelle di spin $1/2$, $S = 0, 1$.

Nel sottospazio $S=0$, $\bar{S}\cdot\bar{n} = 0$.

Nel sottospazio $S=1$, $\bar{S}\cdot\bar{n}$ ha autovalori $-\hbar, 0, +\hbar$.

Quindi

$$S=0 \quad S\cdot\hat{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = 0$$

$$S=1 \quad S\cdot\hat{n} = -\hbar \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\omega}{\hbar}\left(\frac{1}{2}2\hbar^2 - \hbar^2\right) = 0$$

$$S=1 \quad S\cdot\hat{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\omega}{\hbar}\left(\frac{1}{2}2\hbar^2\right) = \hbar\omega$$

$$S=1 \quad S\cdot\hat{n} = \hbar \quad \Rightarrow \quad E = \frac{\omega}{\hbar}\left(\frac{1}{2}2\hbar^2 + \hbar^2\right) = 2\hbar\omega$$

Quindi

S. fond $E=0$ $\begin{cases} S=0 & S\cdot\hat{n} = 0 \\ S=1 & S\cdot\hat{n} = -\hbar \end{cases}$ deg. 2

I ecc. $E=\hbar\omega$ $\quad S=1 \quad S\cdot\hat{n} = 0$ non deg

II ecc. $E=2\hbar\omega$ $\quad S=1 \quad S\cdot\hat{n} = \hbar$ non deg.

Per calcolare la base osserviamo che

$$|S=0 \; S\cdot\hat{n} = 0\rangle = |S=0 \; S_z = 0\rangle$$

Dobbiamo quindi solo riesprimere gli stati $|S=1 \; \bar{S}\cdot\hat{n}\rangle$ in termini degli stati $|S=1 \; S_z\rangle$.

Nel sottospazio $S=1$

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = S_+^+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \qquad S_y = \frac{1}{2i}(S_+ - S_-)$$

Quindi

$$\bar{S}\cdot\hat{n} = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)\cos\theta - \frac{i}{2}(S_+ - S_-)\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}S_+(\cos\theta - i\sin\theta) + \frac{1}{2}S_-(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \frac{1}{2}e^{-i\theta}S_+ + \frac{1}{2}e^{-i\theta}S_-$$

$$= \hbar\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\theta} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\theta} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}$$

Sappiamo A PRIORI che gli autovalori sono $-\hbar, 0, \hbar$

Calcoliamo gli autovettori

(a) autoval $\pm\hbar$

$$\hbar\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\theta} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\theta} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \pm\hbar\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\theta}b = \pm a \\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}a + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\theta}c = \pm b \\ \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}b = \pm c \end{cases}$$

Quindi $\lambda = -\hbar \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\theta}b \\ c = -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}b \end{cases}$

$$|s\cdot n = -\hbar\rangle \Rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-i\theta}b,\ b,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\theta}b\right) = v_{-1}$$

$$|v_{-1}|^2 = \frac{|b|^2}{2} + |b|^2 + \frac{|b|^2}{2} = 2|b|^2 \qquad b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$ [scelta arbitraria della fase]

$$v_{-1} = \left(\frac{e^{-i\theta}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{i\theta}}{2} \right)$$

Se $\lambda = +\hbar$ $\begin{cases} a = +\frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\theta} b \\ c = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} b \end{cases}$

cambia solo un segno e quindi

$$v_1 = \left(\frac{e^{-i\theta}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{e^{i\theta}}{2} \right)$$

(b) autoval $\lambda = 0$

$$\hbar \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\theta} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\theta} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\theta} b = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} (e^{i\theta} a + e^{-i\theta} c) = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\theta} b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} b = 0 \\ c = -e^{2i\theta} a \end{array}$$

$$v_0 = (a, 0, -e^{2i\theta} a)$$

$$|v_0|^2 = |a|^2 + |a|^2 = 2|a|^2$$

Prendiamo $a = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta}$ [scelta arbitraria della fase)

$$v_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} \right)$$

In modo formale

$$|1\ S\cdot\hat{n} = \hbar\rangle = \frac{e^{-i\theta}}{2} |1\ 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\ 0\rangle + \frac{e^{i\theta}}{2} |1\ -1\rangle$$

$$|1\ S\cdot\hat{n} = -\hbar\rangle = \frac{e^{-i\theta}}{2} |1\ 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\ 0\rangle + \frac{e^{i\theta}}{2} |1\ -1\rangle$$

$$|1\ S\cdot\hat{n} = 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} |1\ 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\theta} |1\ -1\rangle$$

Domanda b)

Il primo e secondo livello eccitato sono nondegeneri

Quindi $\Delta E = \langle E | V | E \rangle$

• I ecc

$$\Delta E = \frac{a\omega}{\hbar} \langle 1 \; S\cdot\hat{n}=0 | S_z^2 | 1 \; S\cdot\hat{n}=0 \rangle$$

Usando la decomposizione di $|1 \; S\cdot\hat{n}=0\rangle$ in termini delle autof di S_z:

$$\Delta E = \frac{a\omega}{\hbar}\left[\hbar^2 \left|\frac{e^{-i\theta}}{\sqrt{2}}\right|^2 + (-\hbar)^2 \left| -\frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2}}\right|^2 \right] = \frac{a\omega}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{2} + \frac{\hbar^2}{2}\right) = a\hbar\omega$$

• II ecc.

$$\Delta E = \frac{a\omega}{\hbar} \langle 1 \; S\cdot\hat{n}=\hbar | S_z^2 | 1 \; S\cdot\hat{n}=\hbar \rangle$$

$$= \frac{a\omega}{\hbar}\left(\hbar^2 \left|\frac{e^{-i\theta}}{2}\right|^2 + (-\hbar)^2 \left|\frac{e^{i\theta}}{2}\right|^2 \right) = \frac{a\omega}{\hbar}\left(\frac{\hbar^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4}\right) = \frac{1}{2}a\hbar\omega$$

Lo stato fondamentale è degenere con base $\{|00\rangle, |1 \; S\cdot\hat{n}=-\hbar\rangle\}$

Dato che $S_z^2|00\rangle = 0$ l'unico elemento di matrice non nullo è $\langle 1 \; S\cdot\hat{n}=-\hbar | S_z^2 | 1 \; S\cdot\hat{n}=-\hbar \rangle = \frac{a\omega}{\hbar}\left(\hbar^2 \frac{1}{4} + \hbar^2\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}a\hbar\omega$

Quindi nella base $\{|00\rangle, |1 \; S\cdot\hat{n}=-\hbar\rangle\}$ la matrice della perturbazione è

$$\Delta V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}a\hbar\omega \end{pmatrix}$$

con autovalori $0, \frac{1}{2}a\hbar\omega$

Quindi il livello si separa

(5) Domanda c)

Nella base $|S\, S_z\rangle$ la condizione ii) implica

$$|\psi\rangle = a|0\,0\rangle + b|1\,0\rangle$$

La condizione i) dà $|a|^2 = \frac{1}{6}$

La condizione di normalizzazione dà

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \Longrightarrow |b|^2 = 1 - |a|^2 = \frac{5}{6}$$

Scegliamo b reale positivo

$$b = \sqrt{\frac{5}{6}} \qquad a = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\alpha} \qquad \alpha \text{ arbitrario}$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\alpha} |0\,0\rangle + \sqrt{\frac{5}{6}} |1\,0\rangle$$

Ora $|0\,0\rangle$ è autofunzione di H con autovalore nullo

Decomponiamo $|1\,0\rangle$

$$|1\,0\rangle = |1\ S\cdot\hat{n}=\hbar\rangle\langle 1\ S\cdot\hat{n}=\hbar|1\,0\rangle$$
$$+ |1\ S\cdot\hat{n}=0\rangle\langle 1\ S\cdot\hat{n}=0|1\,0\rangle$$
$$+ |1\ S\cdot\hat{n}=-\hbar\rangle\langle 1\cdot S\hat{n}=\hbar|1\,0\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|1\ S\cdot\hat{n}=\hbar\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\ S\cdot\hat{n}=-\hbar\rangle$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\alpha}|0\,0\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}|1\ S\cdot\hat{n}=\hbar\rangle - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}|1\ S\cdot\hat{n}=-\hbar\rangle$$

$$\text{Prob}(E=0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{3} = \frac{7}{12}$$

$$\text{Prob}(E=\hbar\omega) = 0$$

$$\text{Prob}(E=2\hbar\omega) = \frac{1}{4}\cdot\frac{5}{3} = \frac{5}{12}$$

Domanda d)

L'evoluto temporale è

$$|\psi\, t\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\alpha} |0\,0\rangle + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} e^{-2i\omega t} |1\ S\cdot\hat{n} = \hbar\rangle$$

$$- \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}} |1\ \vec{S}\cdot\hat{n} = -\hbar\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\alpha} |0\,0\rangle + |\omega\rangle \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

con $|\omega\rangle = e^{-2i\omega t} |1\ S\cdot\hat{n} = \hbar\rangle - |1\ S\cdot\hat{n} = -\hbar\rangle$

Nelle rappresentazione $|1\ S_z = \hbar\rangle = (1,0,0)$ $\quad |1\ S_z = 0\rangle = (0,1,0)$
$|1\ S_z = -\hbar\rangle = (0,0,1)$

$$\omega = \left(\frac{e^{-i\theta}}{2}(e^{-2i\omega t} - 1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-2i\omega t} + 1),\ \frac{e^{i\theta}}{2}(e^{-2i\omega t} - 1) \right)$$

Indichiamo gli stati $|S_{1z}\, S_{2z}\rangle$ con $|\uparrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle$.

Abbiamo
- $S_{1z} S_{2z} = \frac{\hbar^2}{4}$ per $|\uparrow\uparrow\rangle = |\overset{S}{1}\ \overset{S_z}{1}\rangle$
  $|\downarrow\downarrow\rangle = |\underset{S}{1}\ \underset{S_z}{-1}\rangle$

- $S_{1z} S_{2z} = -\frac{\hbar^2}{4}$ per $|\uparrow\downarrow\rangle$ e $|\downarrow\uparrow\rangle$

- o equivalentemente per

$$\left.\begin{array}{l} |\overset{S}{0}\ \overset{S_z}{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) \\ |\overset{S}{1}\ \overset{S_z}{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \end{array}\right\} \text{tutti stati con } S_z = 0$$

Quindi

$$\mathrm{Prob}\left(S_{1z} S_{2z} = \frac{\hbar^2}{4}\right) = \mathrm{Prob}(S_z = \hbar) + \mathrm{Prob}(S_z = -\hbar)$$

$$\mathrm{Prob}\left(S_{1z} S_{2z} = -\frac{\hbar^2}{4}\right) = \mathrm{Prob}(S_z = 0)$$

Avremmo potuto ottenere lo stesso risultato osservando che

$$S_{1z} S_{2z} = \frac{1}{2}(S_{1z} + S_{2z})^2 - \frac{1}{2} S_{1z}^2 - \frac{1}{2} S_{2z}^2$$

Per lo spin 1/2 $\quad S_{iz}^2 = \frac{\hbar^2}{4}$

quindi

$$S_{1z} S_{2z} = \frac{S_z^2}{2} - \frac{\hbar^2}{4} \qquad \begin{array}{l} S_{1z} S_{2z} = \frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow S_z^2 = \hbar^2 \\ S_{1z} S_{2z} = -\frac{\hbar^2}{4} \Rightarrow S_z^2 = 0 \end{array}$$

$$\text{Prob}\left(S_{1z} S_{2z} = \frac{\hbar^2}{4}\right) = \text{Prob}\left(S_z^2 = \hbar^2\right)$$

$$\text{Prob}\left(S_{1z} S_{2z} = -\frac{\hbar^2}{4}\right) = \text{Prob}\left(S_z^2 = 0\right)$$

che è equivalente al risultato precedente dato che

$$\text{Prob}(S_z^2 = \hbar^2) = \text{Prob}(S_z = \hbar) + \text{Prob}(S_z = -\hbar)$$

Ora

$$\text{Prob}(S_z = \hbar) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} \frac{1}{4} \left| e^{2i\omega t} - 1 \right|^2$$

$$= \frac{5}{48} (e^{-2i\omega t} - 1)(e^{2i\omega t} - 1) = \frac{5}{24} (1 - \cos 2\omega t)$$

$$\text{Prob}(S_z = -\hbar) = \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{4} \left| e^{-2i\omega t} - 1 \right|^2 = \frac{5}{24} (1 - \cos 2\omega t)$$

$$\text{Prob}(S_z = 0) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{2} \left| e^{-2i\omega t} + 1 \right|^2$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{5}{24} (e^{-2i\omega t} + 1)(e^{2i\omega t} + 1) = \frac{1}{6} + \frac{5}{12} (1 + \cos 2\omega t)$$

$$\text{Prob}\left(S_{1z} S_{2z} = \frac{\hbar^2}{4}\right) = \frac{5}{12} (1 - \cos 2\omega t) = \frac{5}{6} \sin^2 \omega t$$

$$\text{Prob}\left(S_{1z} S_{2z} = -\frac{\hbar^2}{4}\right) = \frac{1}{6} + \frac{5}{12} (1 + \cos 2\omega t) = \frac{7}{12} + \frac{5}{12} \cos 2\omega t$$

$$= 1 - \frac{5}{12} (1 - \cos 2\omega t) = 1 - \frac{5}{6} \sin^2 \omega t$$

ESERCIZIO 2

a) La Hamiltoniana è separabile

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2y^2 \quad \Big\}\ \text{oscillatori con pulsazione } \omega$$

$$+ \frac{p_z^2}{2m} + \frac{1}{2}m(2\omega)^2z^2 \quad \text{oscillatore con pulsazione } 2\omega$$

$$E = \hbar\omega\left(n_x + \tfrac{1}{2} + n_y + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar 2\omega\left(n_z + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \hbar\omega(n_x + n_y + 2n_z + 2) = \hbar\omega(N+2) \qquad N = n_x + n_y + 2n_z$$

Spettro

$N=0$ $\quad E = 2\hbar\omega$ $\quad$ base $|000\rangle$ ($n_x\ n_y\ n_z$) $\quad$ non deg.

$N=1$ $\quad E = 3\hbar\omega$ $\quad$ base $|100\rangle, |010\rangle$ $\quad$ deg 2

$N=2$ $\quad E = 4\hbar\omega$ $\quad$ base $|200\rangle, |110\rangle, |020\rangle, |001\rangle$ $\quad$ deg. 4

$N=3$ $\quad E = 5\hbar\omega$ $\quad$ base $|300\rangle, |210\rangle, |120\rangle, |030\rangle$
$|101\rangle, |011\rangle$ $\quad$ deg. 6

In rappresentazione di Schrödinger, se
$\psi_n(x)$ sono le autof. con pulsazione ω
$\phi_n(x)$ sono le autof con pulsazione 2ω

$$\langle x\,y\,z | n_x\,n_y\,n_z\rangle = \psi_{n_x}(x)\,\psi_{n_y}(y)\,\phi_{n_z}(z)$$

Domanda (b)

Dal formulario

$$\psi_0^{(x)} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2\hbar} \qquad \psi_1^{(x)} = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x\, e^{-m\omega x^2/2\hbar}$$

$$\phi_0^{(x)} = \left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^2/\hbar}$$

Definiamo $K = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{-1/2}\left(\frac{2m\omega}{\pi\hbar}\right)^{-1/4}$

Abbiamo

$$\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, x\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+2z^2)} = K\,\psi_1(x)\psi_0(y)\phi_0(z)$$

$$\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\, y\, e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2+2z^2)} = K\,\psi_0(x)\psi_1(y)\phi_0(z)$$

$$e^{-m\omega/2\hbar(x^2+y^2+2z^2)} = K\,\psi_0(x)\psi_0(y)\phi_0(z)$$

Quindi

$$\psi(x,y,z) = N K\,(\psi_1(x)\psi_0(y) + i\psi_0(x)\psi_1(y) + \psi_0(x)\psi_0(y))\,\phi_0(z)$$

Imponendo che ψ sia normalizzata

$$(|N|K)^2(1+1+1) = 1 \qquad |N| = \frac{1}{\sqrt{3}K}$$

Scegliendo N reale positivo

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}(\psi_1(x)\psi_0(y) + i\psi_0(x)\psi_1(y) + \psi_0(x)\psi_0(y))\,\phi_0(z)$$

In notazione di Dirac

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1\,0\,0\rangle + i|0\,1\,0\rangle + |0\,0\,0\rangle\right)$$

L' evoluto temporale è

$$|\psi\rangle_t = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(e^{-3i\omega t}|100\rangle + i\, e^{-3i\omega t}|010\rangle + e^{-2i\omega t}|000\rangle \right.$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eliminabile}}}{e^{-3i\omega t}} \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|100\rangle + i|010\rangle + e^{i\omega t}|000\rangle\right)$$

Per un oscillatore unidimensionale abbiamo $\langle 1|p^2|0\rangle = 0$ (segue per esempio dalle proprietà di parità degli stati)

Quindi

$$_t\langle\psi|p^2|\psi\rangle_t = \frac{1}{3}\langle 100|p^2|100\rangle + \frac{1}{3}\langle 010|p^2|010\rangle + \frac{1}{3}\langle 000|p^2|000\rangle$$

Ora $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$ per cui

$$_t\langle\psi|p^2|\psi\rangle_t = \frac{1}{3}\langle 1|p_x^2|1\rangle_\omega + \frac{1}{3}\langle 0|p_x^2|0\rangle_\omega + \frac{1}{3}\langle 0|p_x^2|0\rangle_\omega$$
$$+ \frac{1}{3}\langle 0|p_y^2|0\rangle_\omega + \frac{1}{3}\langle 1|p_y^2|1\rangle_\omega + \frac{1}{3}\langle 0|p_y^2|0\rangle_\omega$$
$$+ \frac{1}{3}\langle 0|p_z^2|0\rangle_{2\omega} + \frac{1}{3}\langle 0|p_z^2|0\rangle_{2\omega} + \frac{1}{3}\langle 0|p_z^2|0\rangle_{2\omega}$$

<u>NOTA</u>:
- Nei precedenti valori medi è indicato p_x^2, p_y^2, p_z^2. Il pedice è presente <u>SOLO</u> per ricordare l'origine del termine. In tutti i casi si tratta di valori medi 1D
- È necessario distinguere le componenti x, y (oscillatore di pulsazione ω) dalla componente z (oscillatore di pulsazione 2ω)

Mettendo assieme

$$ {}_t\langle\psi|p^2|\psi\rangle_t = \frac{4}{3}\langle 0|p^2|0\rangle_\omega + \frac{2}{3}\langle 1|p^2|1\rangle_\omega + \langle 0|p^2|0\rangle_{2\omega} $$

Per un oscillatore 1D con pulsazione ω

$$ a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega q + ip) \qquad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega q - ip) $$

$$ p = \frac{1}{2i}\sqrt{2m\hbar\omega}\,(a - a^+) $$

$$ \langle 0|p^2|0\rangle_\omega = |\,p|0\rangle|^2 = \frac{2m\hbar\omega}{4}\,|\,(a-a^+)|0\rangle|^2 $$

$$ = \frac{1}{2}m\hbar\omega\,|\,|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}m\hbar\omega $$

$$ \langle 1|p^2|1\rangle_\omega = |\,p|1\rangle|^2 = \frac{1}{2}m\hbar\omega\,|\,(a-a^+)|1\rangle|^2 $$

$$ = \frac{1}{2}m\hbar\omega\,|\,|0\rangle - \sqrt{2}|2\rangle|^2 = \frac{1}{2}m\hbar\omega(1+2) = \frac{3}{2}m\hbar\omega $$

<u>NOTA</u>: si poteva pure utilizzare il teorema del viriale

$$ \langle n|T|n\rangle = \langle n|V|n\rangle = \frac{E_n}{2} \qquad \begin{pmatrix} T \text{ energia cinetica} \\ V \text{ energia potenziale} \end{pmatrix} $$

$$ \frac{1}{2m}\langle n|p^2|n\rangle = \frac{\hbar\omega}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right) $$

$$ \langle n|p^2|n\rangle = m\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right) $$

Infine $\langle 0|p^2|0\rangle_{2\omega} = \frac{1}{2}m\hbar(2\omega) = m\hbar\omega$

Quindi

$$ {}_t\langle\psi|p^2|\psi\rangle_t = \frac{4}{3}\,\frac{1}{2}m\hbar\omega + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}m\hbar\omega + m\hbar\omega $$

$$ = \left(\frac{2}{3}+1+1\right)m\hbar\omega = \frac{8}{3}m\hbar\omega $$

Domanda c) 2.5

La Hamiltoniana ha simmetria cilindrica: è invariante per rotazioni intorno all'asse z. Quindi $[L_z, H] = 0$ Pertanto il valor medio non dipende dal tempo.
Per calcolare il valor medio passiamo in coordinate cilindriche

- $\psi_1(x)\psi_0(y) + i\psi_0(x)\psi_1(y) =$

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,(x+iy)\,e^{-m(x^2+y^2)/2\hbar} =$$

$$\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,\rho e^{i\varphi}\,e^{-m\rho^2/2\hbar}$$

Ora $L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi}$ per cui

$$L_z\left(\psi_1(x)\psi_0(y) + i\psi_0(x)\psi_1(y)\right)$$

$$= -i\hbar\cdot i\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}\,\rho e^{i\varphi}\,e^{-m\rho^2/2\hbar}$$

$$= \hbar\left(\psi_1(x)\psi_0(y) + i\psi_0(x)\psi_1(y)\right)$$

- $\psi_0(x)\psi_0(y) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/2} e^{-m(x^2+y^2)/2\hbar} = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/2} e^{-m\rho^2/2\hbar}$

$$L_z\left(\psi_0(x)\psi_0(y)\right) = 0$$

Quindi

$$L_z|\psi\rangle = L_z\,\frac{1}{\sqrt{3}}\left(|100\rangle + i|010\rangle + |000\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{3}}\left(|100\rangle + i|010\rangle\right)$$

Quindi

$$\langle\psi|L_z|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\hbar}{\sqrt{3}}(1+1) = \frac{2\hbar}{3}$$

Domanda d)

- Stato fondamentale.

È non degenere con base $|000\rangle$

$$\Delta E = \epsilon m\omega^2 \langle 000|xy|000\rangle$$
$$= \epsilon m\omega^2 \left(\langle 0|x|0\rangle_{1\omega}\langle 0|y|0\rangle_{1\omega}\right)$$
$$= \epsilon m\omega^2 |\langle 0|x|0\rangle_{1\omega}|^2$$

Ma $\langle n|x|n\rangle = 0$ per tutti i livelli $\Rightarrow$ $\Delta E = 0$

- Primo eccitato: Degenere con base $\{|100\rangle, |010\rangle\}$

Abbiamo

$$\langle 100|xy|100\rangle = \langle 1|x|1\rangle_\omega \langle 0|y|0\rangle_\omega = 0$$
$$\langle 010|xy|010\rangle = \langle 0|x|0\rangle_\omega \langle 1|y|1\rangle_\omega = 0$$
$$\langle 100|xy|010\rangle = \langle 1|x|0\rangle_\omega \langle 0|y|1\rangle_\omega = |\langle 1|x|0\rangle_\omega|^2$$
$$\langle 010|xy|100\rangle = \langle 100|xy|010\rangle^* = |\langle 1|x|0\rangle_\omega|^2$$

Ora $q = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^+)$

$$\langle 1|x|0\rangle_\omega = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|a+a^+|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|1\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

Quindi

$$|\langle 1|x|0\rangle|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

La matrice associata alla perturbazione è

$$V = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \frac{\hbar\omega}{2} \\ \frac{\epsilon\hbar\omega}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalori

$$\det(V - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & \epsilon\hbar\omega/2 \\ \frac{\epsilon\hbar\omega}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \left(\frac{\epsilon\hbar\omega}{2}\right)^2 \Rightarrow \lambda = \pm \frac{\epsilon}{2}\hbar\omega$$

Il livello si separa in due livelli di energia $3\hbar\omega \pm \frac{\epsilon}{2}\hbar\omega$

Facciamo infine vedere che $V = \epsilon m\omega^2 xy$

Per un oscillatore armonico $\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ è la scala di lunghezza e $\hbar\omega$ è la scala di energia.

Quindi $V = \epsilon\, \hbar\omega \frac{x}{\xi}\frac{y}{\xi} = \epsilon \frac{\hbar\omega}{\xi^2} xy = \epsilon m\omega^2 xy$

Segue $\alpha = 0 \quad \beta = 1 \quad \gamma = 2$

Nota alla domanda c)

$[\psi_1(x)\psi_0(y) + i\psi_0(x)\psi_1(y)]\phi_0$ è autofunzione di L_z con autovalore $\hbar$ MA NON È AUTOFUNZIONE DI L^2. In coordinate sferiche

$$[\psi_1(x)\psi_0(y) + i\psi_0(x)\psi_1(y)]\phi_0(z) \propto r\sin\theta\, e^{i\varphi} \times \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(\sin^2\theta + 2\cos^2\theta)\, r^2\right)$$

che NON SI PUÒ RISCRIVERE COME $Y_1^1 \times$(funzione di r) (rimane una dipendenza da θ nell'esponenziale)

ANALOGAMENTE $\psi_0(x)\psi_0(y)\phi_0(z)$ è autofunzione di L_z con autovalore 0, MA NON È AUTOFUNZIONE DI L^2.