3.3. Solido seminfinito con variazione brusca o con oscillazione sinusoidale della temperatura superficiale.

a) Un caso analogo al precedente è quello di un solido seminfinito inizialmente alla temperatura t_i, la cui faccia limite viene, all'istante $\tau=0$, portata, e successivamente mantenuta alla temperatura t_0. In tal caso si ha, per le condizioni al contorno:

$$x \geqslant 0\,; \qquad \tau = 0\,; \qquad t = t_i = \text{cost}$$

$$x = 0\,; \qquad \tau \geqslant 0\,; \qquad t = t_0 = \text{cost}\,.$$

Con un procedimento analitico analogo a quello precedentemente svolto si trova:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \frac{t - t_i}{t_0 - t_i} = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2}\, dz \tag{3.9}$$

avendo posto $z^2 = \dfrac{x^2}{4\alpha\tau}$. I valori dell'integrale (chiamato integrale o « funzione errore » di Gauss) sono riportati in fig. 3.2 e permettono un rapido calcolo della t.

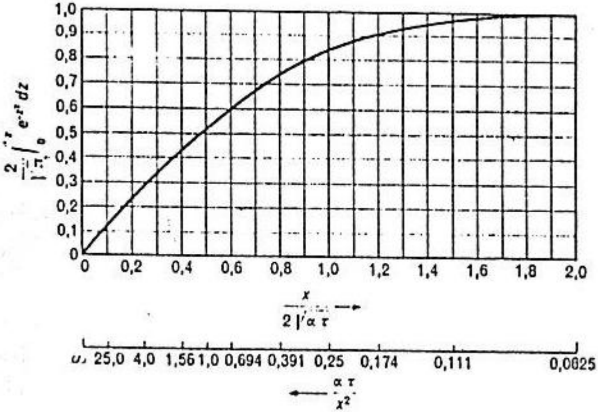

Fig. 3.2

L'analisi dimensionale darebbe in questo caso, considerando che ϑ è funzione di ϑ_i τ, α, x, un legame del tipo:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f\left(\frac{\alpha\tau}{x^2}\right),$$

quale esplicitamente espresso dalla [3.9].

b) Altro caso interessante è quello nel quale la superficie limite è assoggettata ad una variazione periodica di temperatura. Tale situazione ad esempio può fornire una rappresentazione di prima approssimazione di quanto avviene nelle pareti del cilindro e dello stantuffo di molte macchine alternative, se tali pareti sono piuttosto spesse, o di oggetti esposti alle alternanze diurne della temperatura dell'ambiente naturale esterno. Si ammetta dunque che sia:

$$t_s = t_{s,m} + \vartheta_a \sin \omega \tau = t_{s,m} + \vartheta_a \sin \frac{2\pi}{\tau_0} \tau$$

dove con τ_0 si intende il periodo dell'oscillazione di temperatura, con t_s il suo valore superficiale e $t_{s,m}$ il suo valore medio superficiale.

Si ammette che il fenomeno si sia prolungato per un tempo sufficientemente lungo perchè si sia raggiunto il cosiddetto regime periodico stabilizzato, in modo che in ogni punto all'interno del corpo vi sia una oscillazione di temperatura intorno al valore medio $t_{s,m}$, di periodo uguale a quello superficiale, sì che non sia necessario tener conto di quella che poteva essere la distribuzione iniziale della temperatura all'interno del corpo.

Le equazioni generali, con le condizioni ai limiti, forniscono per la temperatura in un punto di ascissa x al tempo τ la:

$$[3.10] \quad \frac{t - t_{s,m}}{\vartheta_a} = \exp\left(- x \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\, \tau_0}}\right) \cos\left(2\pi \frac{\tau}{\tau_0} - x \sqrt{\frac{\pi}{\alpha\, \tau_0}}\right).$$

L'esame della [3.10] mostra che effettivamente ad ogni profondità x la temperatura oscilla con pulsazione $\omega = \dfrac{2\pi}{\tau_0}$; l'ampiezza dell'oscillazione va però rapidamente decrescendo secondo il fattore di smorzamento $\exp\left(- x \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha\, \tau_0}}\right)$.

Lo smorzamento è tanto più grande quanto maggiore è il gruppo $x \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha\, \tau_0}}$ che risulta direttamente proporzionale alla profondità ed inversamente proporzionale alla radice quadrata del periodo dell'oscillazione ed alla diffusività termica. Dalla [3.10] si nota ancora che le oscillazioni alla profondità x non sono in fase con quella sulla faccia esterna, ma ritardate di $x \sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha\, \tau_0}}$.

Tutto avviene cioè come se l'oscillazione di temperatura, ed, in particolare, i massimi della perturbazione si propagassero, pur attenuandosi, con una velocità:

$$[3.11] \qquad v = \frac{\dfrac{2\pi}{\tau_0}}{\sqrt{\dfrac{\pi}{\alpha\,\tau_0}}} = \sqrt{\frac{4\pi\,\alpha}{\tau_0}}\,.$$

Il flusso termico attraverso la superficie A_0 nella sezione $x = 0$, è dato da:

$$[3.12] \quad q_0' = -\,k\left(\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}x}\right)A_0 = k\,\vartheta_a \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\,\tau_0}}\left(\cos\frac{2\pi\,\tau}{\tau_0} + \frac{\pi}{4}\right)\cdot A_0\,.$$

L'analisi dimensionale, poichè in questo caso e con le ipotesi poste la $\vartheta = t - t_{s,m}$ è funzione di $\vartheta_a, \tau, x, \tau_0, \alpha$, darebbe in questo caso:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_a} = f\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha\,\tau_0}}\,,\ \frac{\tau}{\tau_0}\right)$$

come effettivamente espresso nella [3.10].