

Esame di Meccanica Quantistica 07/05/2026

Esercizio 1. Si considerino due particelle distinguibili di spin $1/2$ che interagiscono con Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{\hbar} \left(\frac{1}{2} S^2 + \hbar \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} \right),$$

dove $\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ e $\mathbf{n} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$.

a) Si calcoli lo spettro della Hamiltoniana H . Si calcoli una base di autofunzioni, scrivendole come combinazioni lineari degli stati $|SS_z\rangle$.

b) Si supponga ora di aggiungere una perturbazione $V = a \frac{\omega}{\hbar} S_z^2$. Si calcoli lo spettro di $H + V$ al primo ordine perturbativo nel parametro a ($0 < |a| \ll 1$).

c) Si determinino tutti gli stati $|\psi\rangle$ tali che (i) la probabilità di misurare $S^2 = 0$ è $\frac{1}{6}$; (ii) una misura di S_z fornisce sempre 0. Per tutti gli stati così determinati, si determinino i possibili valori osservabili dell'energia H con le relative probabilità.

d) Viene fatta una misura di $S_{1z}S_{2z}$ sullo stato $|\psi\rangle$ al tempo t . Quali sono i valori ottenibili e quali sono le rispettive probabilità?

Esercizio 2. Si consideri una particella di spin 0 e massa m la cui dinamica è governata dalla seguente Hamiltoniana:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + 4\hat{z}^2). \quad (1)$$

a) Si determinino tutti i livelli energetici con energia $E \leq 5\hbar\omega$, indicando le degenerazioni e una base di autoket per ogni livello.

b) Si consideri lo stato normalizzato al tempo $t = 0$:

$$\langle x, y, z | \psi \rangle = \psi(x, y, z) = \mathcal{N} \left[\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}} (x + iy) + 1 \right] e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} (x^2 + y^2 + 2z^2)}, \quad (2)$$

dove \mathcal{N} è la costante di normalizzazione. Si calcoli il valore medio di \hat{p}^2 al variare del tempo.

c) Per lo stato del punto precedente si calcoli il valore medio di \hat{L}_z al variare del tempo.

d) Si consideri la perturbazione $\hat{V}_{xy} = \epsilon \hbar^\alpha m^\beta \omega^\gamma \hat{x} \hat{y}$ con $0 < \epsilon \ll 1$. Si determinino gli esponenti α , β e γ tramite analisi dimensionale e si calcolino le correzioni al primo ordine per i primi due livelli energetici.