Gli appunti verranno messi a disposizione sul portale elearning2.uniroma1.it

(entro domani aprirò una pagina del corso).

Riferimenti sull' $\int$ di Lebesgue:

- Royden: Real Analysis
- Fusco - Marcellini - Sbordone - Anal. Matem. II Liguori
- Giusti - A M. II Bollati Boringhieri

Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^N)$

Vorremmo associare ad ogni elemento $E \subset \mathbb{R}$ una "misura", cioè un numero $m(E) \in [0, +\infty]$ verificante le seguenti proprietà intuitive:

1) se E è un intervallo, allora $m(E)$ è l'ordinaria "lunghezza" dell'intervallo (cioè $m((a,b)) = b-a$).

2) Se $\{E_n\}$ è una successione di insiemi disgiunti, allora
$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$$

3) m è invariante per traslazione:
$$m(E) = m(E+y) \quad \forall y \in \mathbb{R}, \text{ dove } \quad E+y = \{x+y : x \in E\}.$$

Purtroppo si può dimostrare che una misura verificante 1), 2), 3) non può essere definita per tutti i possibili sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ L'obbiettivo è quello di definire una misura per una classe <u>molto ampia</u> $\mathcal{M}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.
Questa classe deve essere "chiusa" rispetto a molte operazioni insiemistiche, in particolare deve essere chiusa rispetto a:

- unioni e intersezioni numerabili di insiemi
- differenze di insiemi.

Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}$.

$I = (a,b)$ intervallo aperto $\Rightarrow$ poniamo $\ell(I) = b-a$

Misura esterna

Sia $E \subset \mathbb{R}$. Poniamo

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n \in \mathbb{N}} \ell(I_n) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,\ I_n \text{ intervalli aperti} \right\}.$$

OSS $m^*(\phi) = 0$

$m^*(\{x\}) = 0$ (ovvio!)

$m^*(E) = 0 \quad \forall\, E$ finito o numerabile (facile!).

In particolare $m^*(\mathbb{Q}) = 0$.

se $E \subset F$, allora $m^*(E) \leq m^*(F)$.

m^* è, al momento, definita $\forall E \subset \mathbb{R}$.

Si può dimostrare che:
1) è invariante per traslazione
2) $m^*(I) = \ell(I)$ se I è un intervallo (aperto, chiuso o semiaperto)

è un Teorema, non ovvio.

E numerabile $\qquad E = \{x_n\}$

$\forall x_n$ prendo un intervallo I_n centrato in x_n di lunghezza $\frac{\varepsilon}{2^n}$

$$\sum_n \ell(I_n) = \sum_{n \geq 1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$ Ma $\varepsilon > 0$ è arbitrario

$\Rightarrow \quad m^*(E) = 0$

TEOREMA m^* è subadditiva:

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(E_n).$$

Dim ovvia se uno degli E_n ha misura esterna ∞. se invece $m^*(E_n) < \infty$, allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ una successione $\{I_{n,i}\}_i$ di intervalli aperti t.c

$$E_n \subset \bigcup_i I_{n,i} \quad e \quad \sum_i \ell(I_{n,i}) < m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ora consideriamo la famiglia (numerabile) $\{I_{n,i} : i, n \in \mathbb{N}\}$
Questa ricopre $\bigcup_n E_n$. Quindi

$$m^*\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_{n,i} \ell(I_{n,i}) = \sum_n \sum_i \ell(I_{n,i}) < \sum_n \left(m^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) =$$

$$= \sum_n m^*(E_n) + \varepsilon$$

ε arbitrario $\Rightarrow$ la tesi $\blacksquare$

DEF E si dice misurabile secondo Lebesgue se $\forall F \subset \mathbb{R}$ si ha $m^*(F) = m^*(F \cap E) + m^*(F \cap E^c)$.

OSS Per la subadditività si ha sempre

$$m^*(F) \leq m^*(F \cap E) + m^*(F \cap E^c).$$

Quindi basta provare la dis "$\geq$".

PROP se $m^*(E) = 0 \Rightarrow E$ è misurabile.

Dim $m^*(F) \overset{?}{\geq} \underbrace{m^*(F \cap E)}_{=0} + m^*(F \cap E^c)$ ok. per la monotonia. $\square$

PROP se E_1, E_2 sono misurabili, allora $E_1 \cup E_2$ è misurabile

Dim. sia F un qualunque insieme. Devo provare che

$$m^*(F \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*(F \cap [E_1 \cup E_2]^c) \leq m^*(F).$$

ora,

$$m^*(\underbrace{F \cap [E_1 \cup E_2]}_{=[F \cap E_1] \cup [F \cap (E_2 \cap E_1^c)]}) + m^*(\underbrace{F \cap [E_1 \cup E_2]^c}_{= F \cap E_1^c \cap E_2^c}) \leq$$

qui uso la subadditività

$$\leq m^*(F \cap E_1) + \underbrace{m^*(F \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(F \cap E_1^c \cap E_2^c)}_{} =$$

per la def. di misurabilità di E_2, con $F \cap E_1^c$ al posto di F è uguale a $m^*(F \cap E_1^c)$

$$= m^*(F \cap E_1) + m^*(F \cap E_1^c) = m^*(F)$$

per la misurabilità di E_1

$\blacksquare$

Quindi

PROP l'unione di un numero finito di insiemi misurabili è misurabile.

PROP L'intersezione di un numero finito di insiemi misurabili è misurabile.

Dim Basta osservare che

$$E_1 \cap E_2 = (E_1^c \cup E_2^c)^c \qquad \square$$

$\Rightarrow$ La famiglia degli insiemi misurabili è un'**algebra**, cioè è chiusa rispetto al passaggio al complementare e rispetto alle unioni/intersezioni finite.

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

In realtà si dimostra che la classe degli insiemi misurabili è una σ-algebra, cioè è chiusa anche rispetto alle unioni (e ovviamente intersezioni) numerabili

TEOREMA L'unione di una successione di insiemi misurabili è misurabile

$$E_n \subset \mathbb{R} \text{ misurabili}, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \text{ è misurabile}$$

DIM. (da fare).

Lemma Siano $E_1, \dots E_n$ misurabili e disgiunti a due a due, sia A un qualunque insieme. Allora

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i). \qquad (*)$$

OSS. Prendendo $A = \mathbb{R}$ si ottiene $m^*\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} m^*(E_i)$.
ossia l'additività finita.

Dim. per induzione. Ovviamente $(*)$ è vera per $n=1$.
Supponiamola vera per $n-1$. Allora, per def^{ne} di misurabilità di E_n, si ha

$$m^*\left(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = m^*\Big(\underbrace{\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) \cap E_n}_{= A \cap E_n}\Big) + m^*\Big(\underbrace{\Big(A \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i\Big) \setminus E_n}_{= A \cap \bigcup_{i=1}^{n-1} E_i}\Big)$$

perché gli E_i sono disgiunti

$$= m^*(A \cap E_n) + m^*\left(A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i\right)\right) = \text{per l'hyp. induttiva}$$

$$= m^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$$

ossia la $(*)$ $\square$

Ora dimostriamo il Teorema della pag. precedente

In primo luogo possiamo supporre che gli E_n siano a due a due disgiunti. A tal fine basta sostituire ciascun E_n con $\tilde{E}_n = E_n \setminus (E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_{n-1})$, che ovviamente sono misurabili, disgiunti tra loro, e la loro unione rimane la stessa.

Sia A un qualunque insieme, poniamo $F_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ (misurabili)

Allora $F_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i =: E$.

$$m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c)$$
$$\geq m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap E^c)$$

oss $F_n \subset E \Rightarrow F_n^c \supset E^c$

ma $A \cap F_n = A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i \right)$, quindi per il lemma

$$m^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$$

Abbiamo ottenuto

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \setminus E)$$

Facciamo $n \to +\infty$

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \setminus E)$$

D'altra parte, per la subadditività della m^*,

$$\sum_{i=1}^{\infty} m^*(A \cap E_i) \geq m^*\Big(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap E_i)}_{A \cap E} \Big) = m^*(A \cap E)$$

$\Rightarrow m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \setminus E)$, cioè $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ è misurabile.

$\square$

Ora si tratta di sapere <u>quali</u> insiemi sono misurabili.

PROP La semiretta (a, ∞) è misurabile.

DIM. Sia $F \subset \mathbb{R}$ un qualsiasi insieme

Poniamo $F_1 = F \cap (a, +\infty)$; $F_2 = F \cap (-\infty, a]$

Dobbiamo provare $m^*(F_1) + m^*(F_2) \leq m^*(F)$.

se $m^*(F) = \infty$, non c'è nulla da provare

se $m^*(F) < \infty$, allora $\forall \varepsilon$ $\exists$ una successione $\{I_n\}$ di intervalli aperti che ricoprono F e t.c.

$$\sum_n \ell(I_n) \leq m^*(F) + \varepsilon.$$

Poniamo $I_n' = I_n \cap (a, +\infty)$, $I_n'' = I_m \cap (-\infty, a]$.

Allora I_n', I_n'' sono intervalli (oppure vuoti), quindi

$$\ell(I_n) = \ell(I_n') + \ell(I_n'') = m^*(I_n') + m^*(I_n'')$$

perché per gli intervalli abbiamo già provato che la m^* è la lunghezza.

D'altra parte,

$$F_1 \subset \bigcup_n I_n' \underset{\substack{\text{subadditività} \\ \text{della } m^*}}{\Longrightarrow} m^*(F_1) \leq m^*\left(\bigcup_n I_n'\right) \leq \sum_n m^*(I_n')$$

$$F_2 \subset \bigcup_n I_n'' \Longrightarrow m^*(F_2) \leq \sum_n m^*(I_n'')$$

Sommando

$$m^*(F_1) + m^*(F_2) \leq \sum_n \left(m^*(I_n') + m^*(I_n'')\right) \leq$$

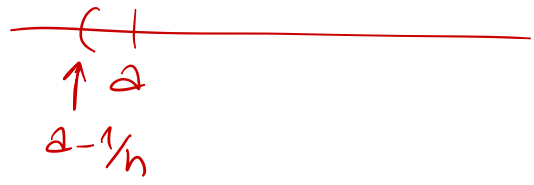
$$\leq \sum_n \ell(I_n) \leq m^*(F) + \varepsilon$$

Ma ε è arbitrario $\Longrightarrow$ la tesi $\blacksquare$

$(a, +\infty)$ misurabile $\Rightarrow$ $(-\infty, a]$ misurabile

$\Rightarrow$ $[a, +\infty) = \bigcap_n \left(a - \frac{1}{n}, +\infty\right)$ misurabile

$\Rightarrow$ $(-\infty, a)$ misurabile.



$(a, b) = (a, +\infty) \cap (-\infty, b)$ misurabile.

D'altra parte ogni aperto è unione di una famiglia numerabile di intervalli

$\Rightarrow$ ogni aperto è misurabile

$\Rightarrow$ ogni chiuso è misurabile

Quindi la classe degli insiemi misurabili è una σ-algebra contenente gli aperti (e i chiusi).

DEF. (misura di Lebesgue)

Se $E \subset \mathbb{R}$ è un insieme misurabile, poniamo

$$m(E) = m^*(E)$$

misura di Lebesgue di E.

TEOREMA (σ-additività della misura di Lebesgue).

Sia $\{E_n\}$ una successione di insiemi misurabili. Allora

$$m\left(\bigcup_n E_n\right) \leq \sum_n m(E_n).$$

Se gli E_n sono a due a due disgiunti, vale l'uguaglianza.

$$\underset{\forall n,k \text{ con } n \neq k}{E_n \cap E_k = \emptyset} \implies m\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n m(E_n).$$

PROP Sia $\{E_n\}$ una successione "decrescente" di insiemi misurabili, ossia $E_n \supset E_{n+1}$. Se $m(E_1) < \infty$, allora

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \to +\infty} m(E_n).$$

DIM (da fare)

OSS L'ipotesi $m(E_1) < \infty$ è fondamentale.
Infatti, se $E_n = (n, +\infty)$ allora $E_n \downarrow$,
$m(E_n) = +\infty \quad \forall n$, ma

$$m\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m(\emptyset) = 0.$$

PROPOSIZIONE (Measurable sets are "near" to nice sets).
Sia $E \subset \mathbb{R}$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti.

i) E è misurabile;

ii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ aperto $A \supset E$, con $m^*(A \setminus E) < \varepsilon$

iii) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ chiuso $C \subset E$ t.c. $m^*(E \setminus C) < \varepsilon$.

Funzioni misurabili.

Sia $E \subset \mathbb{R}$ misurabile, sia

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

PROP. Le seguenti affermazioni sono equivalenti

i) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in E : f(x) > \alpha\}$ è misurabile

ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ " $\{ \quad \geq \}$ "

iii) " " $\{ \quad < \}$ "

iv) " " $\{ \quad \leq \}$ "

v) $\forall A$ aperto $\subset \mathbb{R}$, l'insieme $\{x \in E : f(x) \in A\}$ è misurabile

vi) $\forall C$ chiuso $\subset \mathbb{R}$, " $\{$ " $f(x) \in C\}$ " "

e tutte implicano

vii) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in E : f(x) = \alpha\}$ è misurabile.

Dim.

i) $\Rightarrow$ ii) $\quad \{f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_n \{f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\}$

e così via.

DEF. $f : E \longrightarrow \mathbb{R}^*$ si dice misurabile secondo Lebesgue se vale una delle precedenti i) - vi).

Esempio Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ la funzione di Dirichlet

è misurabile.

Ogni funzione $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua è misurabile.

PROP Sia $E \subset \mathbb{R}$ misurabile.

Siano $f, g : E \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

Allora le funzioni $f+c$, cf, $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$

sono misurabili (quest'ultima sull'insieme $E \cap \{g \neq 0\}$)

PROP Se $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$ sono misurabili, allora

$\sup_n f_n(x)$, $\inf_n f_n(x)$, $\lim_n f_n(x)$, $\limsup_n f_n(x)$, $\liminf_n f_n(x)$

sono tutte funzioni misurabili.

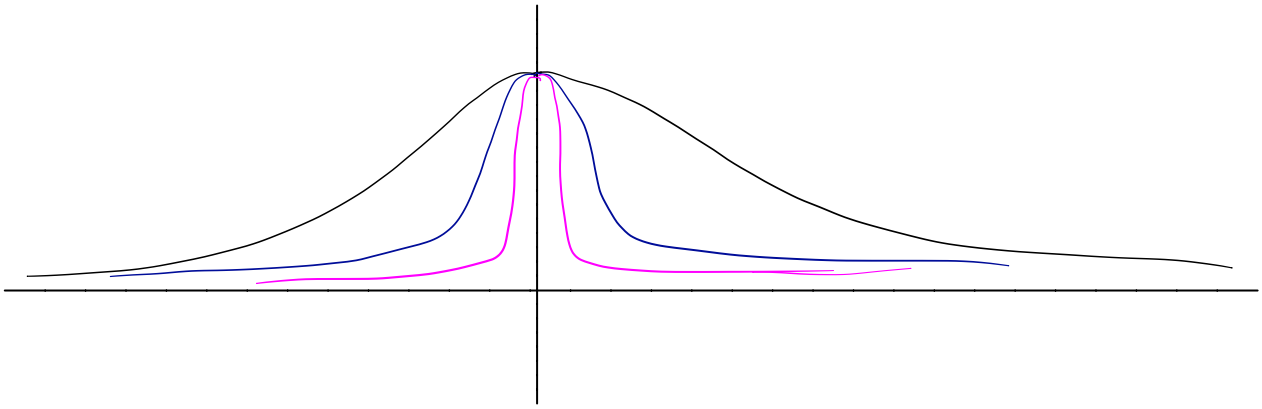
DEF Diremo che una proprietà è vera quasi ovunque (q.o.) (a.e.) se i punti in cui è falsa costituiscono un insieme di misura nulla.

ESEMPIO Sia $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ la funzione di Dirichlet

Allora $f(x) = 0$ q.o.

ESEMPIO La successione $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + n^2 x^2}$

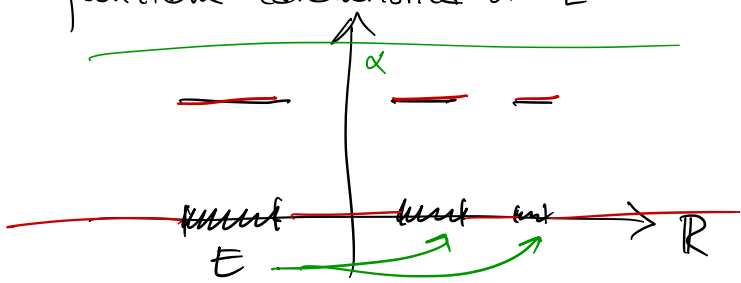
converge a zero q.o.



PROP Se f è misurabile, e $f = g$ q.o., allora g è misurabile.

DEF Se $E \subset \mathbb{R}$, definiamo la funzione caratteristica di E

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & x \in E \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus E \end{cases}$$



OSS χ_E misurabile $\iff$ E misurabile

DEF Una funzione φ si dice semplice se è misurabile e assume un numero finito di valori, in altre parole se

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$$

dove E_i sono disgiunti e $E_i = \{x : \varphi(x) = \alpha_i\}$.

Integrale di Lebesgue

1) <u>Per funzioni semplici</u> :

Sia $\varphi(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \chi_{E_i}(x)$ con $\begin{cases} E_i \text{ misurabili.} \\ m(E_i) < \infty \end{cases}$

Definiamo
$$\int \varphi(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \, m(E_i)$$

Se $E \subset \mathbb{R}$, poniamo

$$\int_E \varphi(x)\,dx = \int \varphi \cdot \chi_E \, dx$$

2) <u>Per funzioni positive</u>:

Se $f : E \longrightarrow [0, +\infty]$ $\quad$ E misurabile, f misurabile.

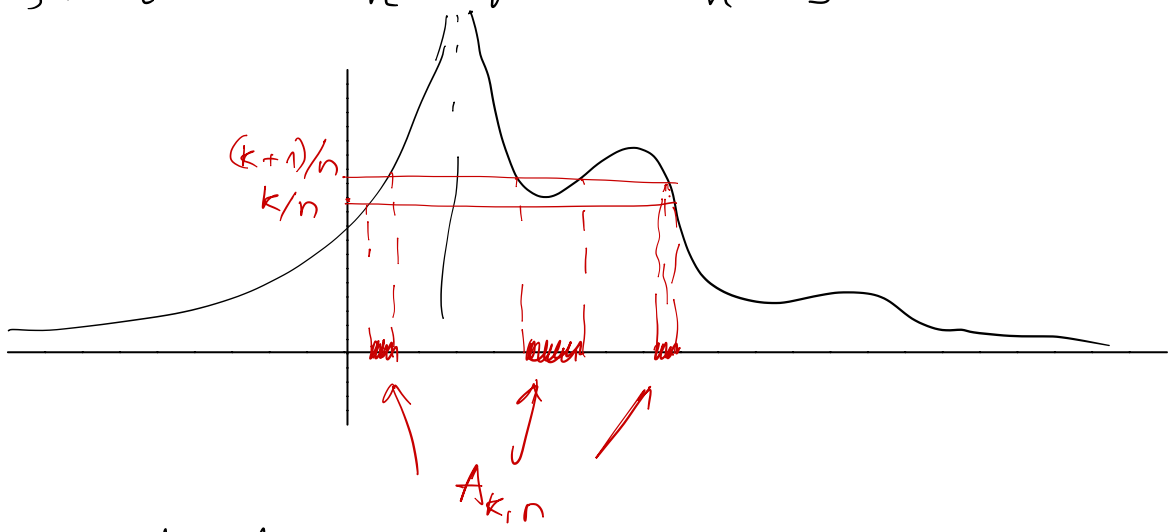
Allora definiamo

$$\int_E f(x)\,dx = \sup\left\{ \int_E \varphi(x)\,dx \,;\ \varphi \text{ funzione semplice t.c. } 0 \le \varphi(x) \le f(x) \quad \forall x \in E \right\}.$$

Come avviene in concreto questa approssimazione con funzioni semplici?

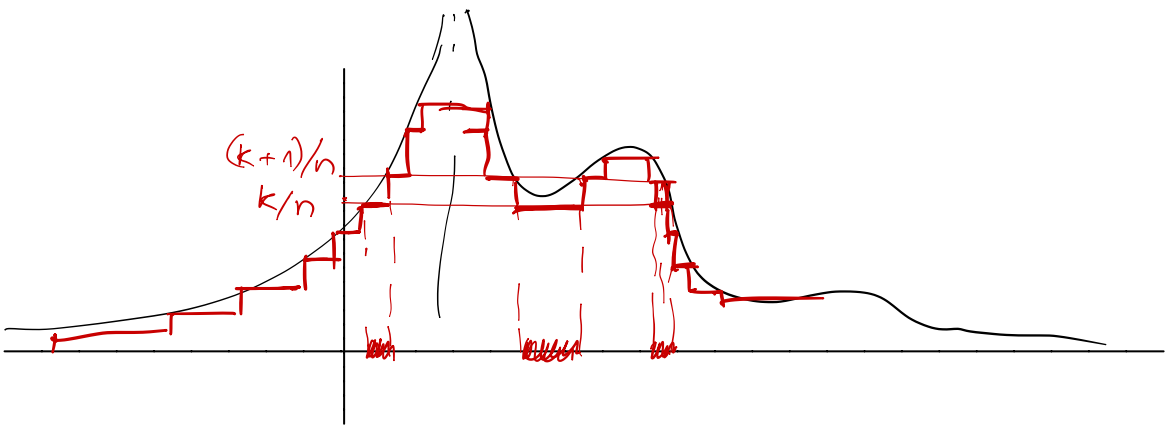
Si divide il <u>range</u> di f in intervallini sempre più piccoli.
In altre parole, si fissa $n \in \mathbb{N}$ e si considerano gli insiemi

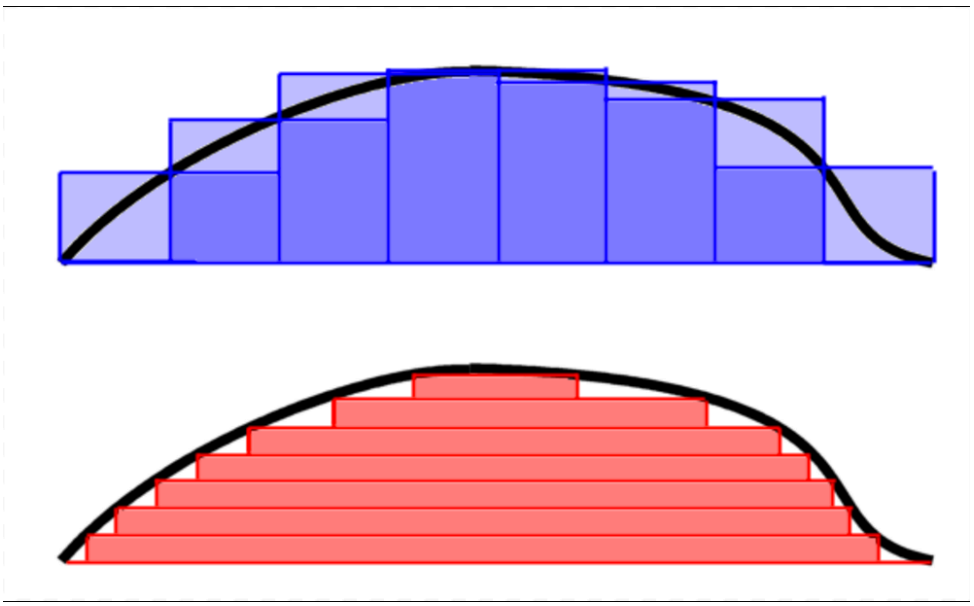
$$A_{n,k} = \left\{ x \in E : \frac{k}{n} \le f(x) < \frac{k+1}{n} \right\} \qquad k \in \mathbb{N}.$$



poi si prende

$$\sum_{k=0}^{n^2} \frac{k}{n}\, m(A_{k,n})$$





Riemann

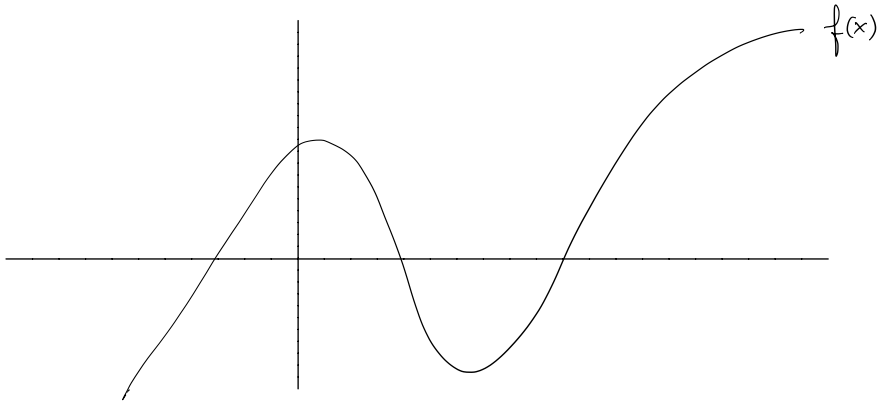
Lebesgue

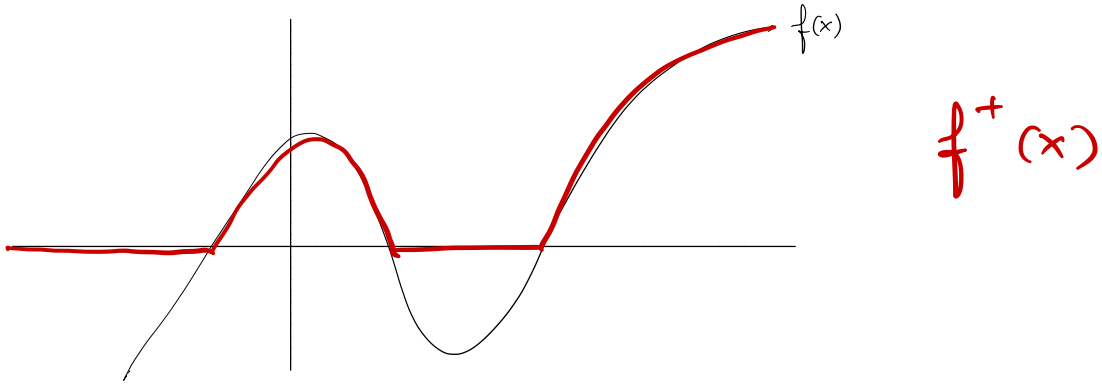
3) <u>Per funzioni misurabili a segno qualsiasi:</u>

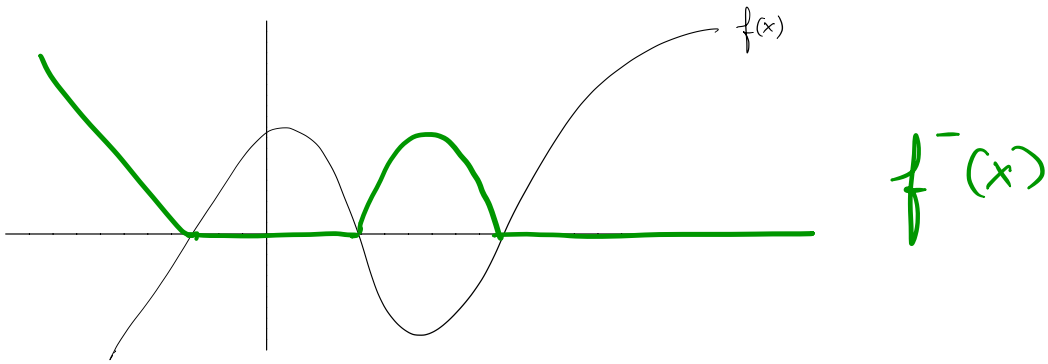
$f : E \to \mathbb{R}^*$ $\qquad$ E misurabile, f misurabile

Definiamo $\quad f^+(x) = \max\{0, f(x)\}$

$$f^-(x) = \max\{0, -f(x)\}$$







Allora $\quad f(x) = f^+(x) - f^-(x)$

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

<u>PROP</u> $\quad f$ misurabile $\iff f^+, f^-$ misurabili.

Poniamo
$$\int_E f(x)\,dx = \int_E f^+(x)\,dx - \int_E f^-(x)\,dx$$

purché non dia luogo ad una f.i. $+\infty - \infty$, cioè se almeno uno dei due integrali a destra è finito.

Diremo che f è integrabile secondo Lebesgue su E se entrambi gli integrali a destra sono finiti, ossia se
$$\int_E |f(x)|\,dx < \infty.$$

In tal caso scriveremo brevemente $f \in L^1(E)$.

<u>OSS</u> se $f \in L^1(E)$, allora

$\{x \in E : f(x) = \pm\infty\}$ ha misura nulla