

Nuclear Decays

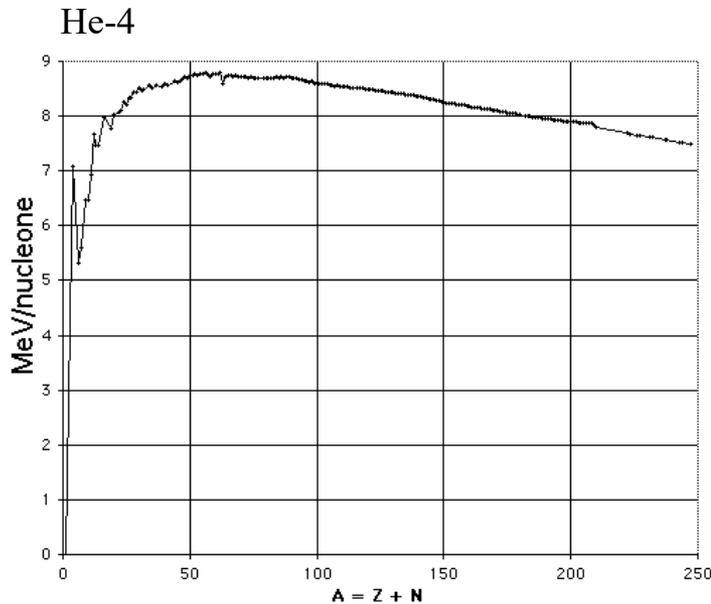
IL NUCLEO ATOMICO

Un **nucleo atomico** è caratterizzato da:

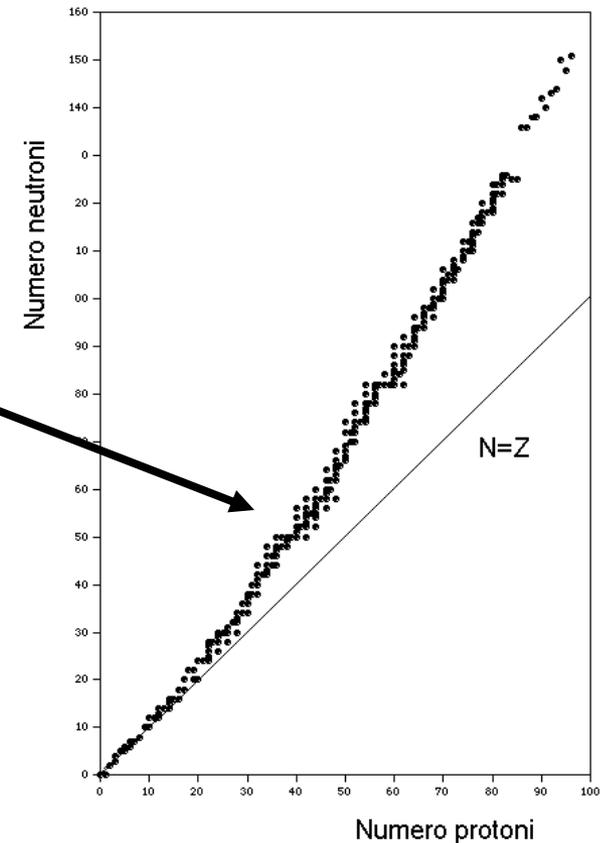
- un **numero atomico (Z)**, che indica il numero di **protoni**
- un **numero di massa (A)** che rappresenta il numero totale di nucleoni presenti nel nucleo atomico.

Se indichiamo con N il numero di **neutroni**, possiamo scrivere: $A=N+Z$.

Per nuclei leggeri la configurazione nucleare risulta stabile quando $Z = N$.
Al crescere di Z il numero di neutroni necessari a garantire la stabilità aumenta.
Tale andamento è ben descritto dalla così detta **curva di stabilità**



Energia di legame per nucleone in funzione della massa atomica A



Curva di stabilità dei nuclei atomici.

Ground State Properties

Nuclei with the same atomic number, but which differ in mass number, e.g., ^{15}O and ^{16}O are called **isotopes**.

If they have the same neutron number N , e.g., ^{13}C and ^{14}N they are called **isotones**.

Those with the same mass number, e.g., ^{14}C and ^{14}N are called **isobars**.

The neutrons and protons occupy separate sets of energy levels.



When both Z and N are even, the energy levels can be filled. The nucleus doesn't "want" to gain or lose nucleons by participating in nuclear reactions. The nucleus is stable.



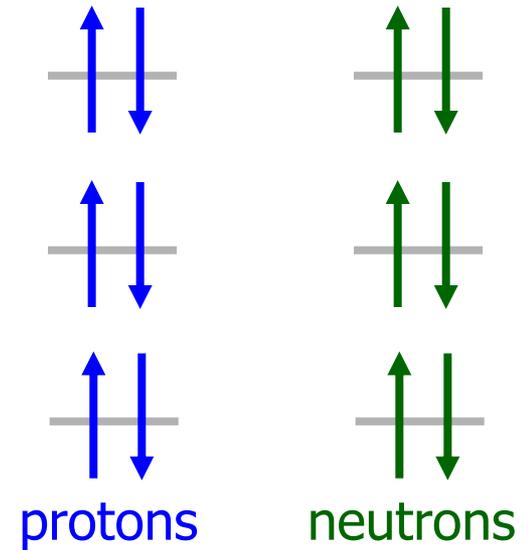
When both Z and N are odd, the nucleus is much more likely to "want" to participate in nuclear reactions or nuclear decay, because it has unfilled nuclear energy levels.



Example: $^{12}_6\text{C}$

All of its neutrons and protons in filled energy levels—very stable.

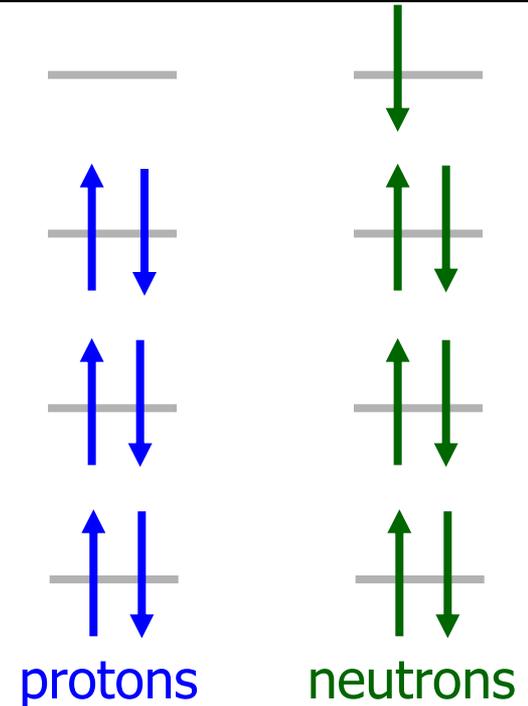
Energy level diagrams illustrative only; not quantitatively accurate!



Example: $^{12}_5\text{B}$

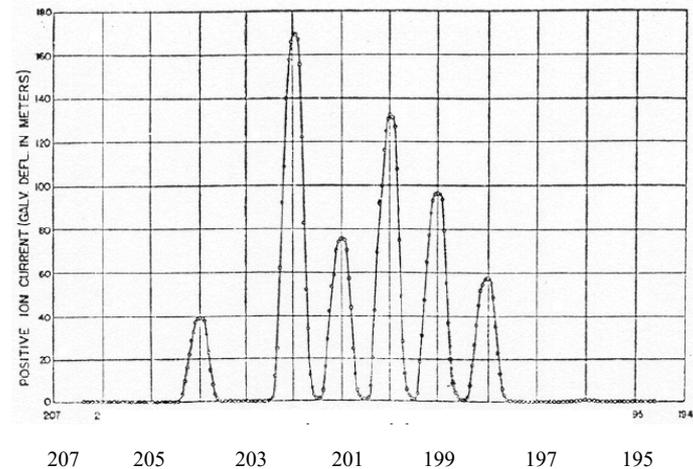
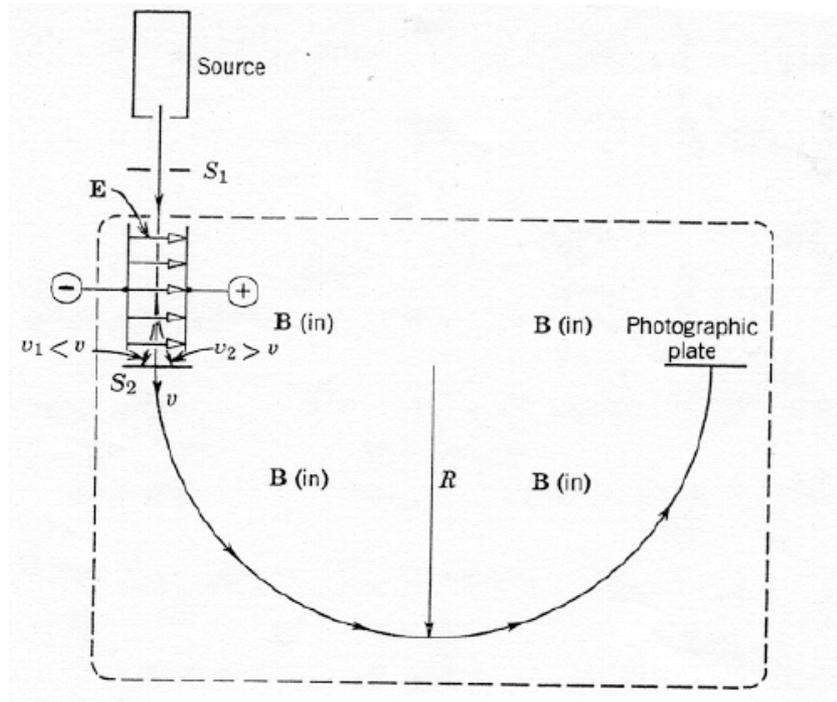
“Extra” neutron in higher energy level; therefore unstable.

Decays via β decay into $^{12}_6\text{C}$.



Mass spectrometer

Measurement of mass via E and B fields



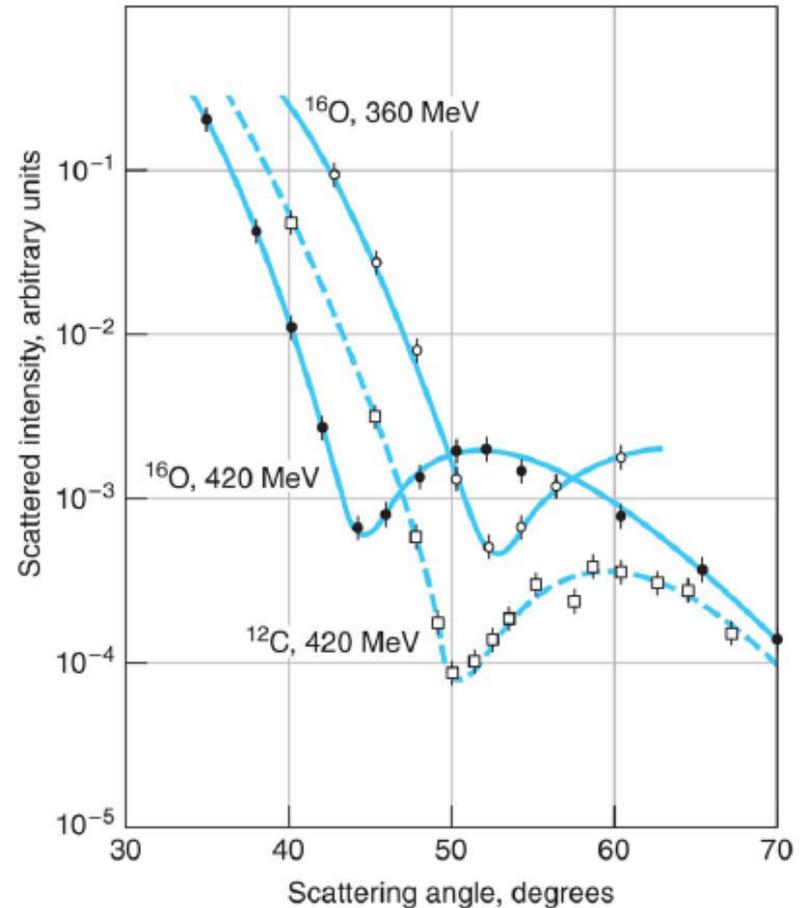
Hg spectrum

Ground State Properties

To measure nuclear radii, electrons are scattered off nuclei and the resulting diffraction pattern of the scattered electrons is measured

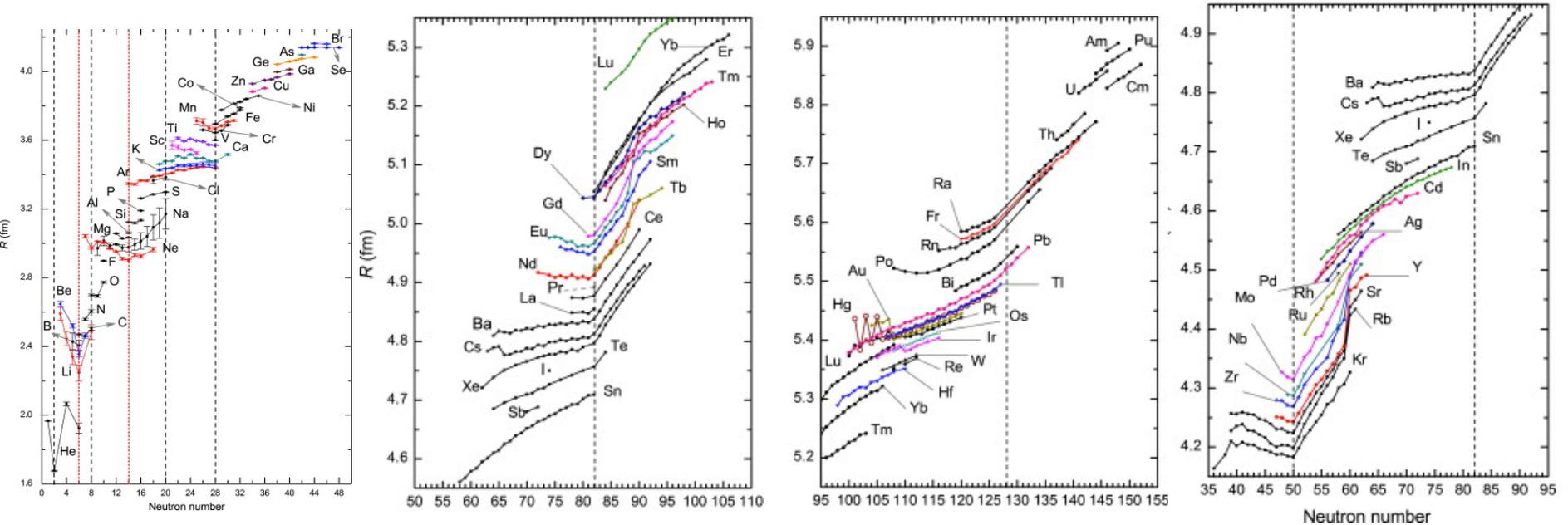
The first minimum of this pattern occurs at

$$\sin \theta = 0.16 \left(\frac{hc}{pc} \right) \frac{1}{R}$$



©2008 by W.H. Freeman and Company

Nuclear Radius



<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0092640X12000265>

Empirically $R(\text{fm}) \sim 1.15 * A^{1/3}$

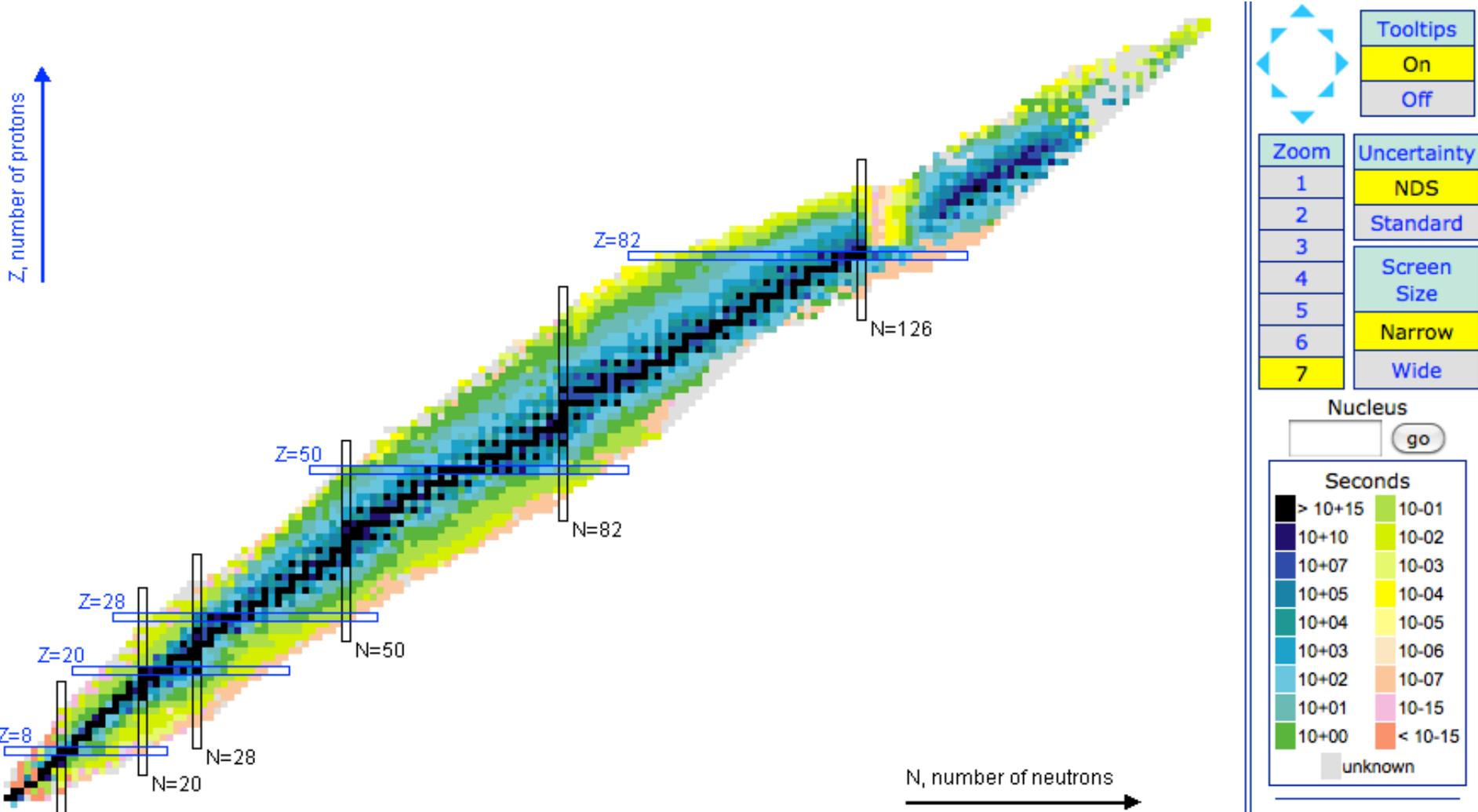
Proton radius ~ 0.85 fm

Ground State Properties

Nuclear Density – Since the radius of a nucleus is proportional to $A^{1/3}$, the density of nuclear matter is roughly independent of the size of the nucleus. Consequently, nuclear matter behaves rather like a liquid with the enormously high density of 10^{17} kg/m^3 .

A mere 1 cubic millimeter of nuclear matter would weigh as much as a full supertanker!

Nuclear chart



Exercise Nr. 4

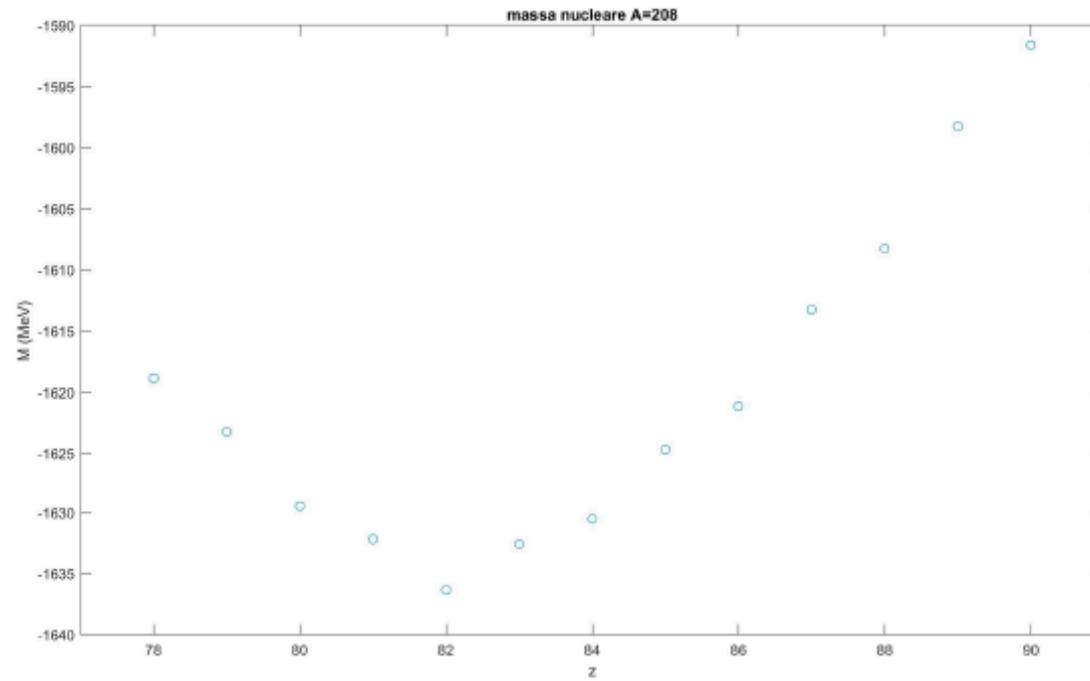
- Draw the nuclear mass

$$M(Z, A) = Z \times M_p + (A - Z) \times M_n - A \times Bind$$

as a function of Z for $A=18$ and $A=208$ and compare with the decay times chart

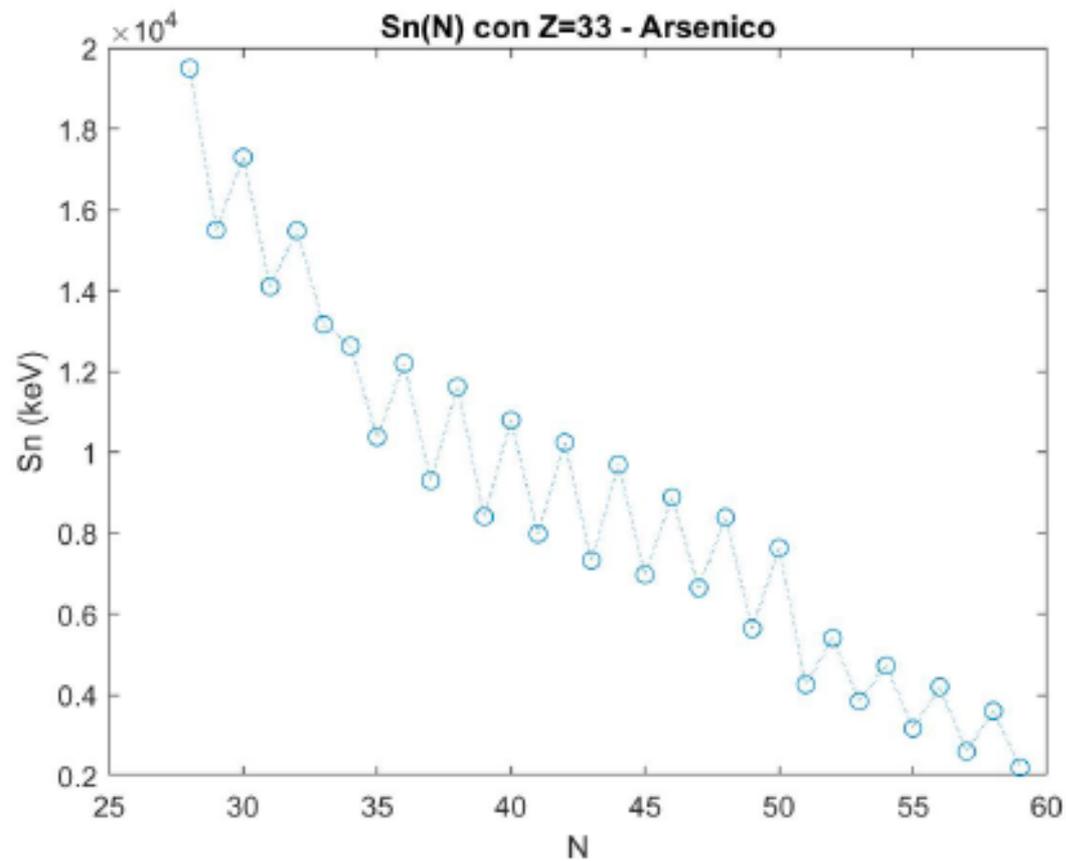
- Draw
 - $Sp(Z)$ and $Sn(Z)$ for $N=9$
 - $Sp(N)$ and $Sn(N)$ for $Z=33$and understand the observed patterns

Mass vs Z



(b) $A = 208$

Sn vs N



IL DECADIMENTO RADIOATTIVO

Consideriamo un nucleo instabile in un dato istante; questo si trasformerà in un nucleo stabile (dopo una o più trasformazioni) attraverso un dato processo radioattivo. E' **impossibile prevedere** quando un dato nucleo si trasformerà; possiamo solamente definire una certa **probabilità di trasformazione** in un'unità di tempo data. Questa probabilità è la stessa per tutti i nuclei di un dato nuclide e si mantiene costante nel tempo.

ESEMPIO: Un nucleo di ^{60}Co : probabilità di 1/240 milioni di disintegrarsi in un secondo
 ^{238}U : probabilità di $1/(2 \cdot 10^{17})$
 ^{219}Rn : probabilità di circa 1/6

Questa probabilità di disintegrazione radioattiva spontanea per unità di tempo è detta **costante radioattiva**, si esprime in secondi^{-1} e si indica con λ . Se indichiamo con N il numero di nuclei instabili, λN rappresenterà il numero di nuclei che decadono nell'unità di tempo.

ESEMPIO: un grammo di ^{60}Co contiene 10^{22} nuclei ognuno con una probabilità di 1/240 milioni di disintegrarsi per secondo, il che significa che ogni secondo $4.18 \cdot 10^{13}$ nuclei si disintegreranno

$$\begin{aligned} ^{60}\text{Co}: \frac{N_A}{A} \cdot \lambda &= \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{60} \cdot \frac{1}{2.4 \cdot 10^8} \approx 4.18 \cdot 10^{13} \\ ^{238}\text{U}: \frac{N_A}{A} \cdot \lambda &= \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{238} \cdot \frac{1}{2 \cdot 10^{17}} \approx 12500 \\ ^{219}\text{Rn}: \frac{N_A}{A} \cdot \lambda &= \frac{6.022 \cdot 10^{23}}{219} \cdot \frac{1}{6} \approx 4.6 \cdot 10^{20} \end{aligned}$$

La quantità λN , esprime la velocità di disintegrazione di una quantità determinata di una data sostanza radioattiva ($-dN/dt$) ed è chiamata **attività** della sostanza.

LA LEGGE DEL DECADIMENTO RADIOATTIVO

Nell'intervallo compreso tra t e $t+dt$, il numero di nuclei che decadono ($-dN$) è proporzionale al numero di nuclei N presenti al tempo t :

$$-dN \propto N dt$$

ed introducendo la costante radioattiva λ abbiamo:

$$-dN = \lambda N dt$$

da cui:

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt$$

ed integrando:

$$\ln N = -\lambda t + C$$

Sia N_0 il numero di nuclei presenti al tempo $t=0$, allora: $C = \ln N_0$

Otterremo pertanto:

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t$$

e quindi:

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

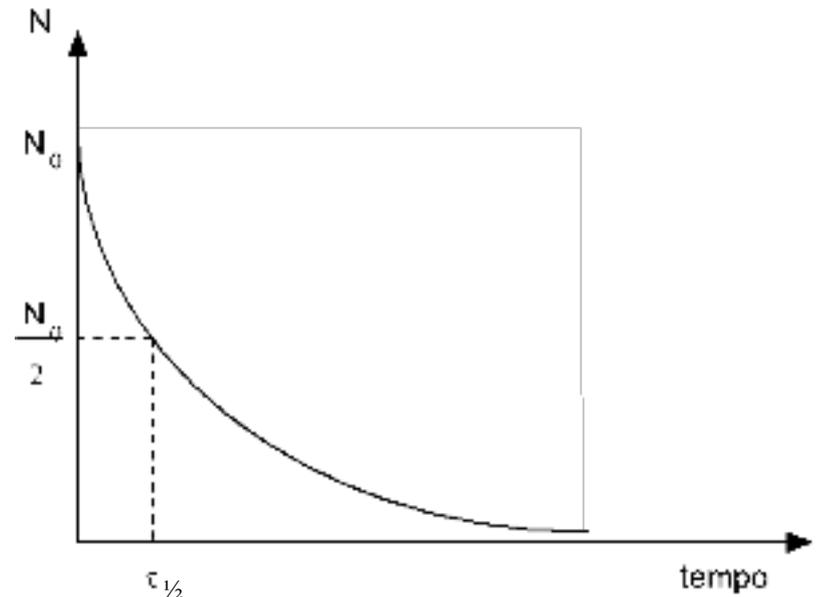
Moltiplicando per λ e ricordando che la quantità λN rappresenta l'attività della sostanza, che indicheremo con A , avremo:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

dove con A_0 abbiamo indicato l'attività al tempo $t = 0$.

Periodo di dimezzamento $\tau_{1/2}$ di una sostanza radioattiva è il tempo necessario affinché questa si riduca della metà.

$$\tau_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$



Unità di misura della radioattività

L'unità di misura della radioattività fu proposta all'inizio del secolo scorso da Marie Curie come l'attività di 1 g di radio.

Nel 1950 la definizione di tale unità è stata modificata in modo da corrispondere esattamente a 37 miliardi di disintegrazioni al secondo; tale grandezza è chiamata **curie (Ci)** e corrisponde approssimativamente a circa 1 g di ^{226}Ra .

Attualmente l'unità che esprime la quantità di radioattività è misurata in **becquerels (Bq)** e corrisponde ad una disintegrazione al secondo.

Sorgenti usate in laboratorio:
~ 1- 10 kBq

Curie (Ci): attività di 1 g di ^{226}Ra

Becquerels (Bq): una disintegrazione al secondo

$$1 \text{ Ci} = 3.7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$$

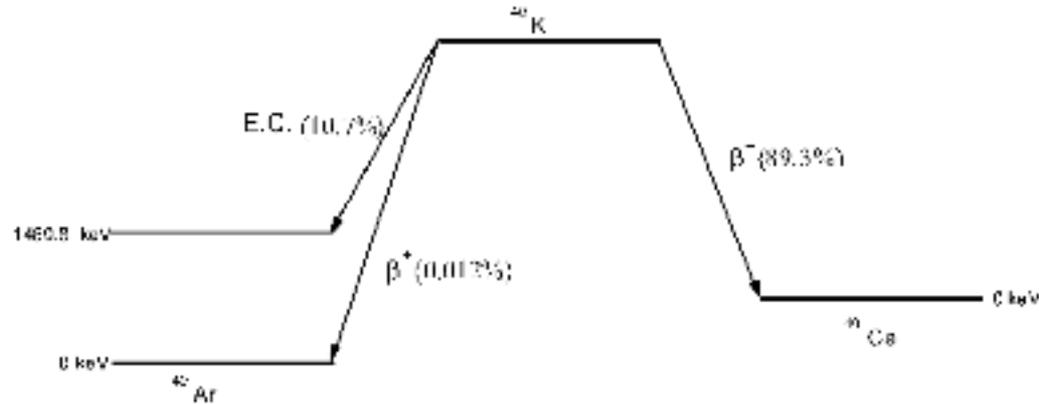
Nella **roccia** (terreno) il contenuto di **Uranio** è dell'ordine del ppm (10^{-6} g/g)

Quindi in 1 kg di roccia si hanno qualche **decina di Bq!**

ESEMPIO: Un grammo di ^{60}Co ($\tau = 5.27$ anni) avrà un'attività di $4.185 \cdot 10^{13}$ Bq
Un grammo di ^{238}U ($\tau = 4.47 \cdot 10^9$ anni) avrà un'attività di 12500 Bq

Il rapporto di diramazione

Un radionuclide può disintegrarsi attraverso differenti vie. Così ad esempio un nucleo di ^{40}K può decadere catturando un elettrone dall'orbita atomica (cattura elettronica) trasformandosi in questo modo in un nucleo di ^{40}Ar , oppure decadere emettendo un elettrone (decadimento β^-) dando così origine ad un nucleo di ^{40}Ca .



Ad ognuno di questi due processi corrisponde una costante di disintegrazione parziale λ_{par}

La probabilità totale $\lambda_{\text{tot.}} = \sum \lambda_{\text{parziale}}$

Definiamo ora il **rapporto di diramazione** (in inglese *Branching Ratio* (B.R.)) come il rapporto tra probabilità di decadimento in un dato canale e la probabilità di decadimento totale:

$$B.R. = \frac{\lambda_{\text{parziale}}}{\lambda_{\text{totale}}}$$

N.B. partial lifetime > total lifetime

Quantities relevant for nuclear medicine

- A_{sp} : specific activity $A_{sp}=A/\text{volume}$
- SUV: standard uptake value

Quantifies the fraction of administered radiotracer that reaches the tumor

$$\text{SUV} = A_{sp}(\text{tumor}) / A_{sp}(\text{administered})$$

Where:

$$A_{sp}(\text{administered}) = A(\text{adm.}) * \rho / \text{mass}$$
$$\rho \sim 1 \text{ g/ml}$$

Example: $A(\text{adm.}) / \text{mass} = 3 \text{ MBq/kg}$

$$\text{SUV} = 2$$

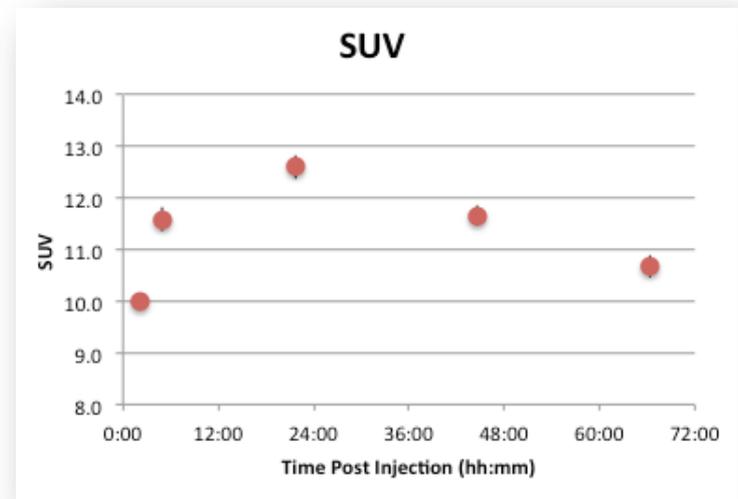
→ $A_{sp}(\text{administered}) = 3 \text{ kBq/ml}$

$A_{sp}(\text{tumor}) = 6 \text{ kBq/ml}$

Also $A(\text{tum}) / A(\text{adm}) = \text{SUV} * \text{Vol}(\text{tum}) / \text{Vol}(\text{patient})$

Example: $\text{SUV} = 2$, $\text{Vol}(\text{tum}) = 10 \text{ ml}$, $M(\text{patiente}) = 80 \text{ kg}$

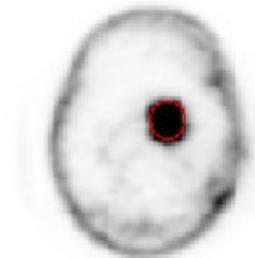
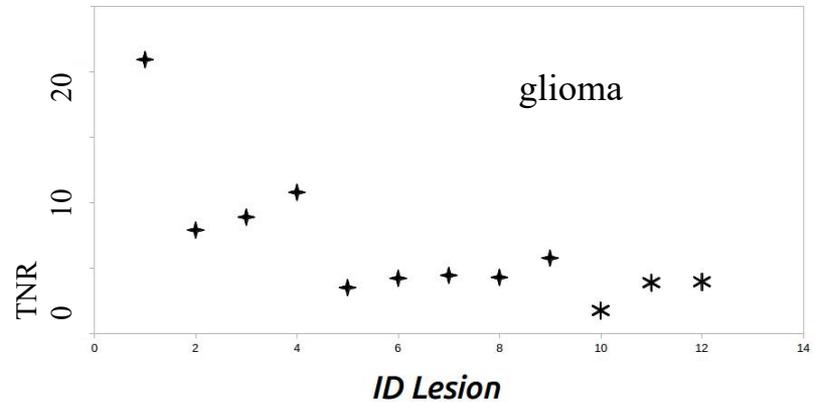
→ $A(\text{tum}) / A(\text{adm}) = 2 * 10 / 80000 = 0.05\%$



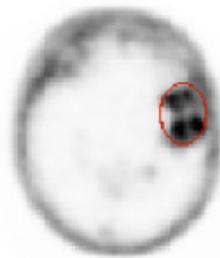
Tumor-non-Tumor ratio

- TNR: tumor-nontumor-ratio:

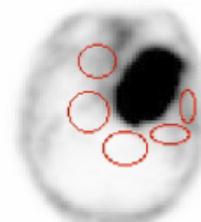
Ratio between SUV of the tumor and of the healthy tissues



meningioma



HG glioma



Non-tumor

Exercise Nr 5

- Which is the weight in grams of a 5Ci source of W-188?
- A tumor in which a radiotracer has been injected has a specific activity of 10kBq/ml. Assuming the density of the tumor to be $\rho=1\text{g/cm}^3$, find the fraction in mass of radio-nuclides in the sample in the case it is:
 - Ga-68
 - Y-90
 - C-14

Kahoot!

Emissione radioattiva di un nucleo instabile

Possiamo classificare i diversi modi di emissione radioattiva di un nucleo instabile nel seguente modo:

- Interazione nucleare forte

- Radioattività α
- Radioattività da protoni o neutroni differenziati
- Fissione spontanea

- Interazione nucleare debole

- Radioattività β
- Cattura elettronica (EC)

- Interazione elettromagnetica

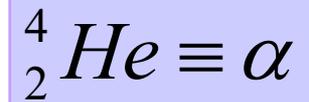
- Isomeria nucleare

Con il termine *nuclide* si indicano tutti gli isotopi conosciuti di elementi chimici

- Stabili: 279
- Instabili: ~ 5000

Il decadimento alfa

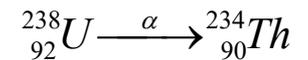
Il primo decadimento radioattivo (da qui il nome alfa) fu scoperto da Rutherford nel 1899. Le **particelle α** sono **nuclei di elio**, cioè nuclei particolarmente stabili formati da due protoni e due neutroni ($Z=2$ ed $A=4$).



Sono soprattutto i nuclei pesanti ($A > 200$) e deficienti in neutroni ad essere interessati da questo processo nucleare.



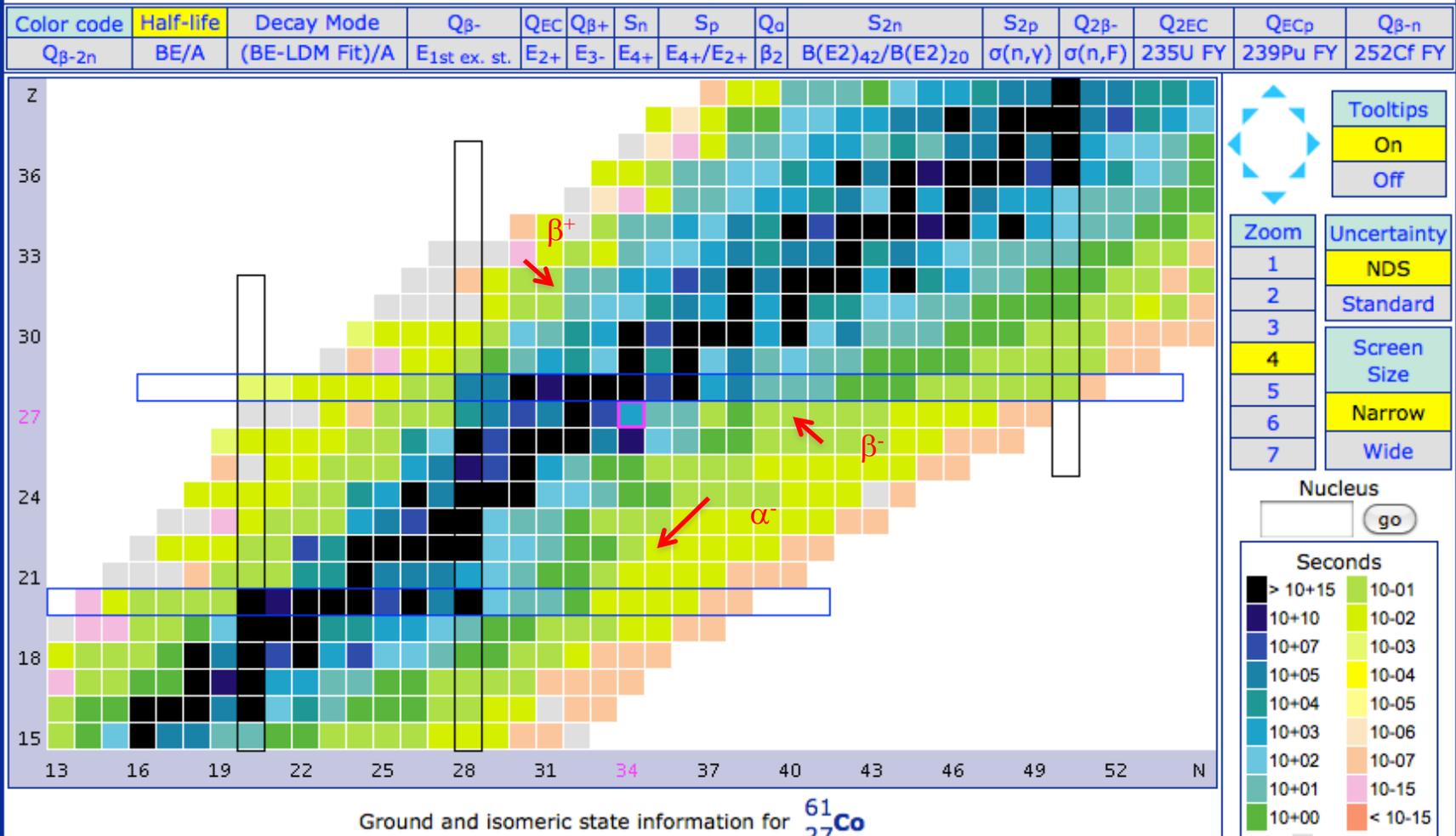
Esempio:



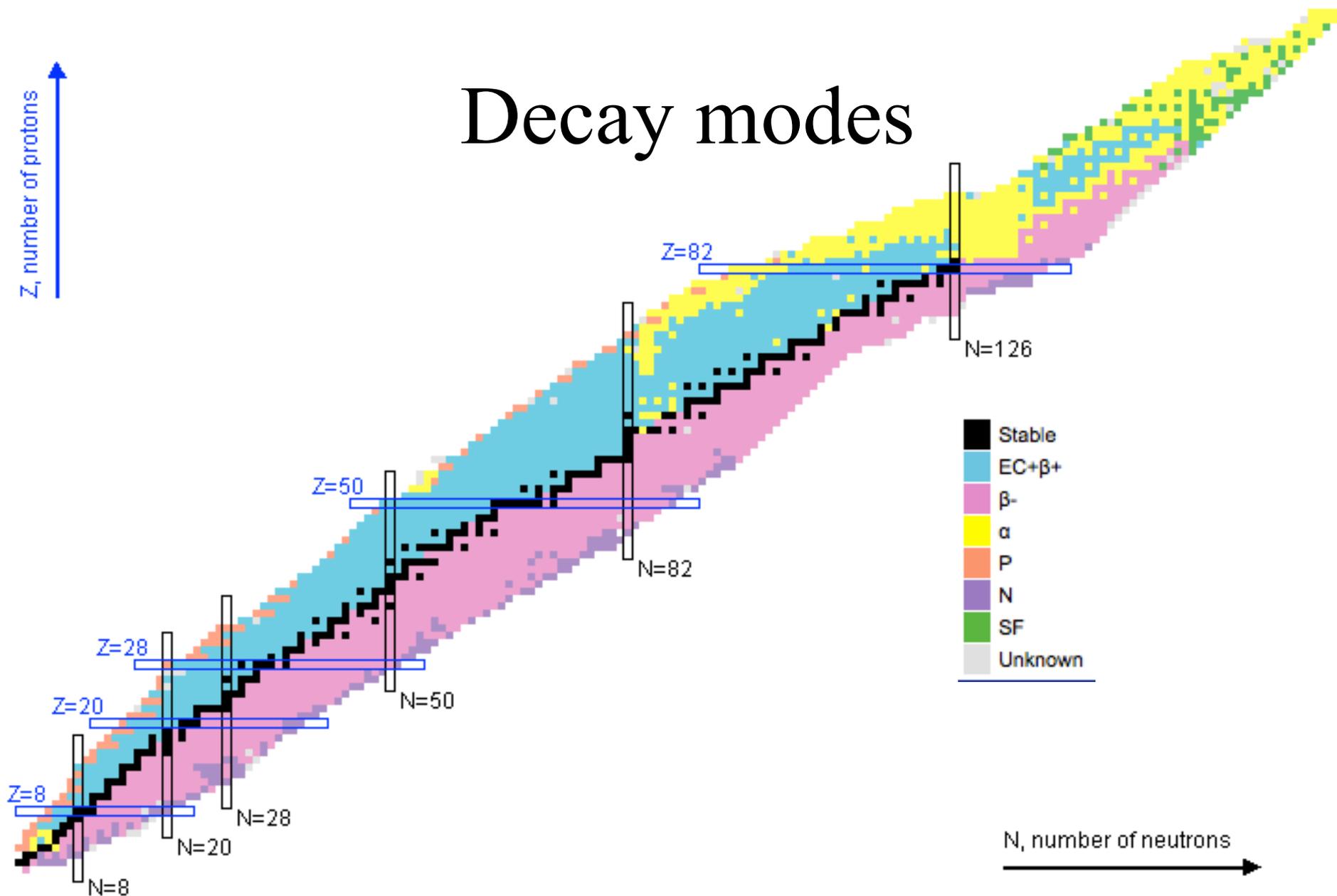
$${}^{238}_{92}\text{U} : \frac{n}{p} = \frac{238-92}{92} = 1.587$$

$${}^{234}_{90}\text{Th} : \frac{n}{p} = \frac{234-90}{90} = 1.600$$

Decays in nuclear chart



Decay modes



Imponendo le leggi della conservazione dell'energia e della quantità di moto

(per semplicità consideriamo il nucleo padre a riposo)

$$m_X c^2 = m_Y c^2 + T_Y + m_\alpha c^2 + T_\alpha$$

Riscriviamo la precedente nel seguente modo:

$$(m_X - m_Y - m_\alpha) c^2 = T_Y + T_\alpha$$

Definiamo ora il **Q valore** come l'energia rilasciata nel decadimento e riscriviamo la precedente nel seguente modo:

$$Q = (m_X - m_Y - m_\alpha) c^2$$

Sostituiamo le masse nucleari m con le masse atomiche M (potendo trascurare le energie di legame degli elettroni)

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2$$

Se esprimiamo M in unità di masse atomiche (amu) ed Q in MeV possiamo scrivere:

$$Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) \cdot 931.5 \quad [MeV]$$

$$1 \text{ amu} = \frac{1}{12} \cdot \text{massa di atomo di } {}^{12}\text{C}$$

$$1 \text{ amu} = 1.6604 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$1 \text{ amu} = 931.5 \text{ MeV}$$

L'energia rilasciata nel decadimento si ripartisce tra energia cinetica del nucleo figlio T_Y ed energia cinetica della particella α T_α .

Applicando il principio di conservazione della quantità di moto ed indicando con v_Y ed v_α le velocità del nucleo figlio e della particella:

$$M_Y v_Y = M_\alpha v_\alpha$$

elevando al quadrato e moltiplicando per $\frac{1}{2}$ otteniamo:

$$\frac{1}{2} M_Y^2 v_Y^2 = \frac{1}{2} M_\alpha^2 v_\alpha^2$$

e quindi:

$$T_Y M_Y = T_\alpha M_\alpha$$

da cui:

$$T_Y = \frac{M_\alpha}{M_Y} T_\alpha$$

essendo: $Q = T_Y + T_\alpha$

$$Q = T_\alpha \frac{M_Y + M_\alpha}{M_Y}$$

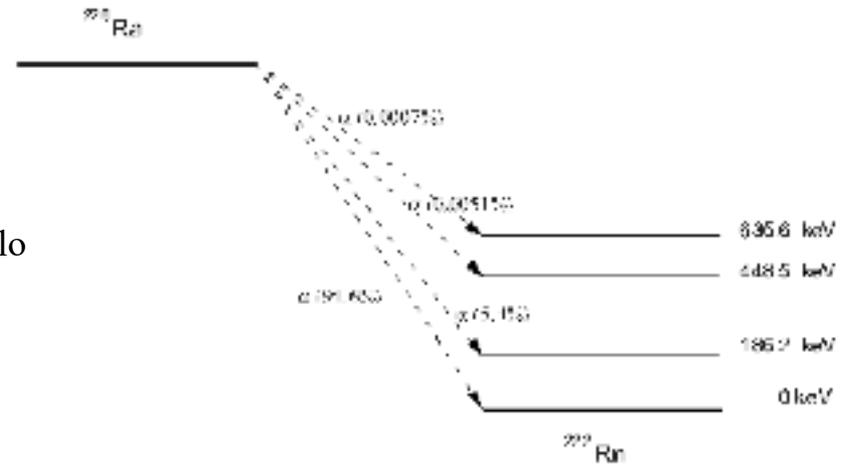
e quindi

$$T_\alpha = Q \frac{M_Y}{M_Y + M_\alpha} \approx Q \frac{A}{A + 4}$$

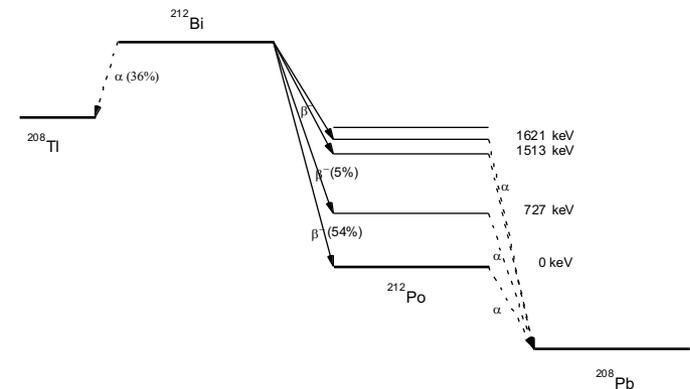
Le energie cinetiche delle particelle α sono tipicamente dell'ordine del 98% del Q valore, mentre il restante 2% lo si ritrova sotto forma di energia cinetica del nucleo figlio (**energia di rinculo**).

Esistenza di una **struttura fine** dovuta al fatto che il nucleo figlio, anziché essere generato direttamente nel suo stato fondamentale, viene prodotto in uno dei suoi possibili stati eccitati.

Il nucleo figlio passerà poi dallo stato eccitato allo stato fondamentale emettendo uno o più **raggi γ**



Un nucleo può decadere α anche quando non si trova nel suo stato fondamentale.



Geiger Nuttal Rule

$$\log(\tau) = a + b \log(E)$$

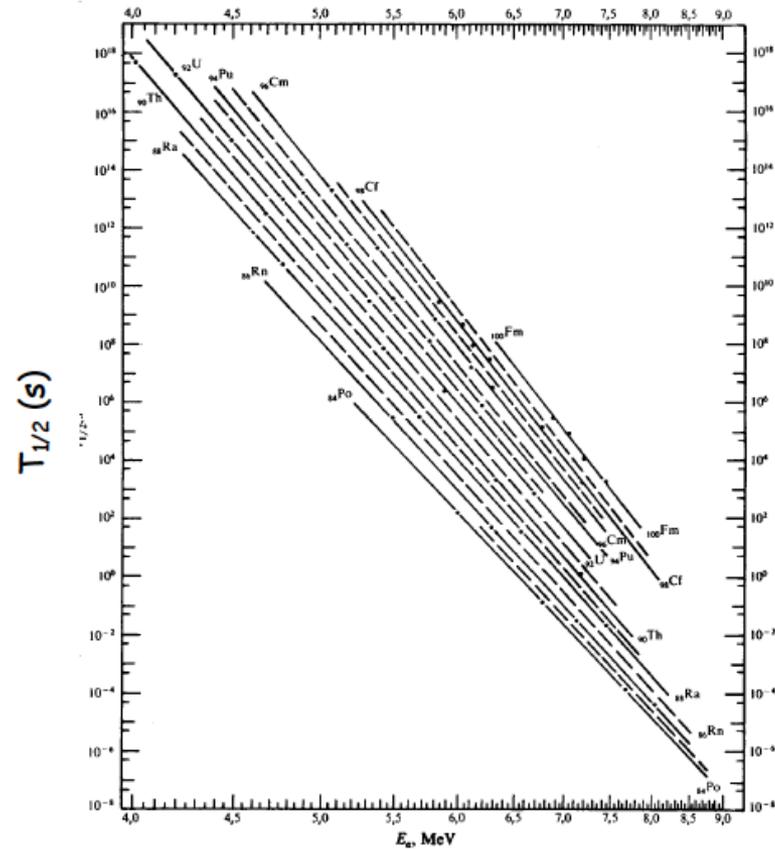


Fig 4.1 : relazione tra energia cinetica delle particelle α e $T_{1/2}$

examples

- Ra-223 Chloride for the cure of bone metastases of Prostate Cancer
 - Ra is a Calcium mimetic
- Radon radiation in air

$Q(\beta^-) = 40 \text{ keV}$
 $T_{1/2} = 3.8 \text{ days}$

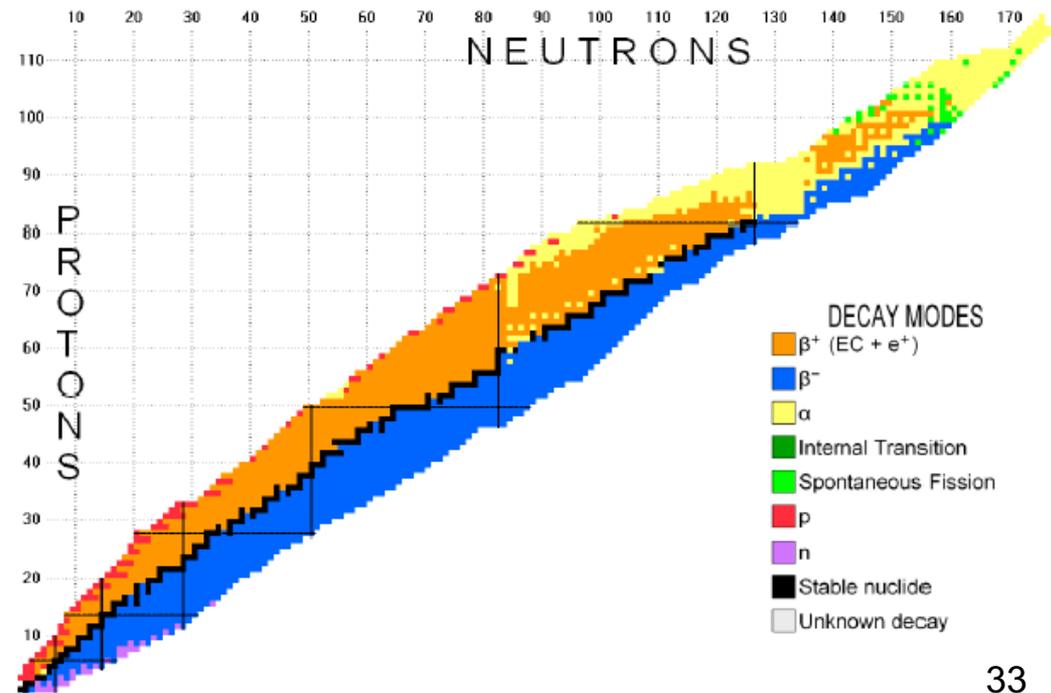


Fissione spontanea di nuclei

- Fissione spontanea = un nucleo pesante decade in due (o più) nuclei più leggeri e (spesso) dei neutroni liberi
 - ⇒ Nel caso del decadimento α , è la grande energia di legame della particella α ($B/A=7.08$ MeV) che rende possibile il decadimento
- La barriera di potenziale da superare per avere fissione spontanea è così alta che queste reazioni di fissione sono in generale estremamente improbabili
 - ⇒ Il nucleo più leggero in cui si osserva fissione spontanea è il ^{226}Ra
 - ⇒ I nuclidi più leggeri per i quali la probabilità di fissione spontanea è paragonabile a quella di decadimento α sono certi isotopi dell'uranio.
 - ✓ *Caso del ^{238}U : la probabilità di decadimento α per unità di tempo è $\omega_\alpha=5\cdot 10^{-18}$ s $^{-1}$, mentre quella per fissione spontanea è $\omega_{\text{fiss}}=3\cdot 10^{-24}$ s $^{-1}$, con un rapporto $\omega_{\text{fiss}}/\omega_\alpha$ di circa $6\cdot 10^{-7}$.*
 - ⇒ All'aumentare del numero di massa A aumenta il branching ratio per fissione spontanea e la fissione spontanea diventa dominante per $A > 260$.

Fissione spontanea di nuclei

- Fissione spontanea = un nucleo pesante decade in due (o più) nuclei più leggeri e (spesso) dei neutroni liberi
 - ⇒ Nel caso del decadimento α , è la grande energia di legame della particella α ($B/A=7.08$ MeV) che rende possibile il decadimento
 - ⇒ I nucleoni nel ^{12}C sono più legati ($B/A=7.6$ MeV) che nella particella α e quindi il decadimento in ^{12}C è energeticamente possibile nei nuclei pesanti
 - ⇒ Il rate di fissione spontanea è significativamente alto in nuclei più pesanti del Torio e soprattutto nei transuranici



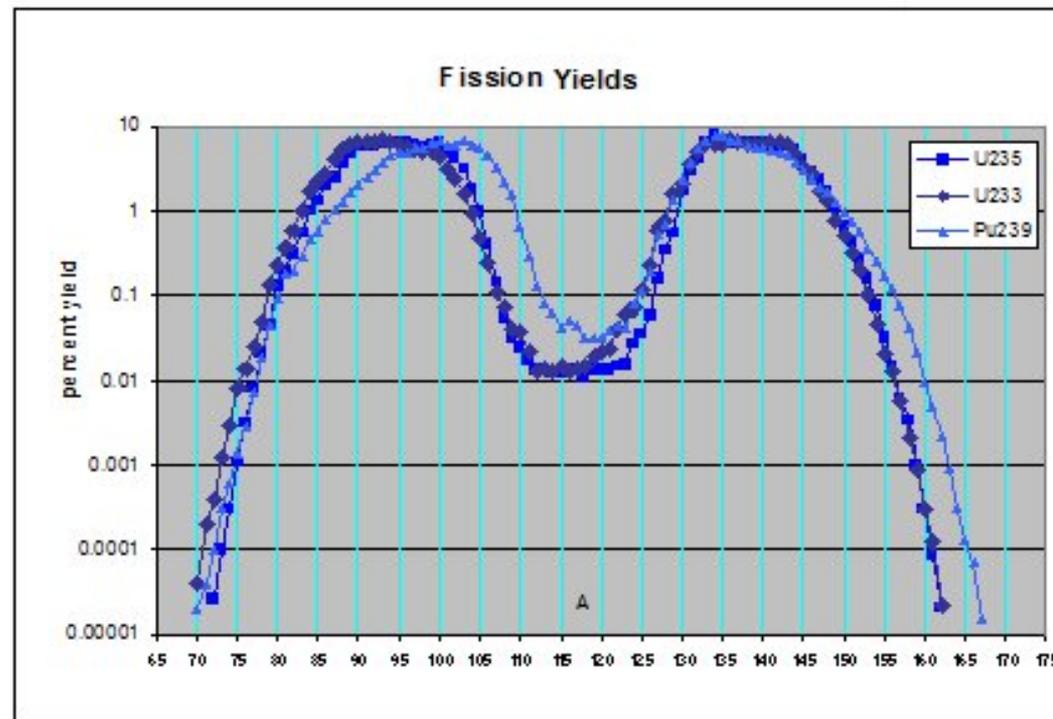
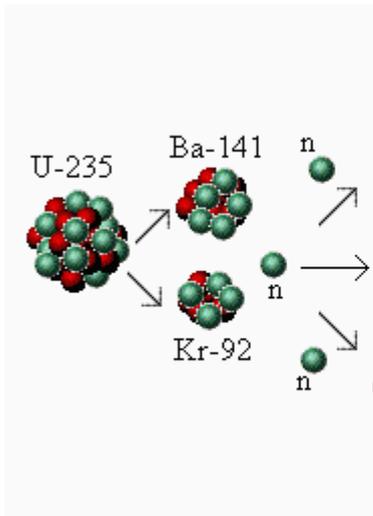
Fissione spontanea

- **Caratteristiche:**

⇒ I prodotti di fissione sono normalmente lontani dalla curva di stabilità dei nuclei (per eccesso di neutroni) e per raggiungere la stabilità avvengono poi diversi decadimenti β^-

⇒ La produzione di frammenti con uguale (o quasi uguale) numero di massa è poco probabile, l'esito più comune è una fissione asimmetrica

✓ *Il valore più probabile di differenza di numero di massa tra i prodotti di fissione è circa 45*



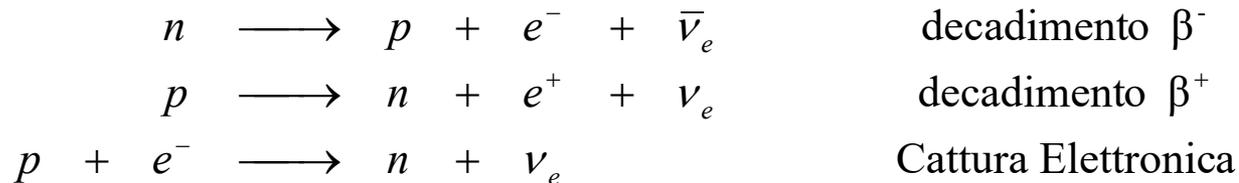
Il decadimento beta

Col termine **decadimento β** intendiamo l'emissione spontanea da parte di un nucleo di

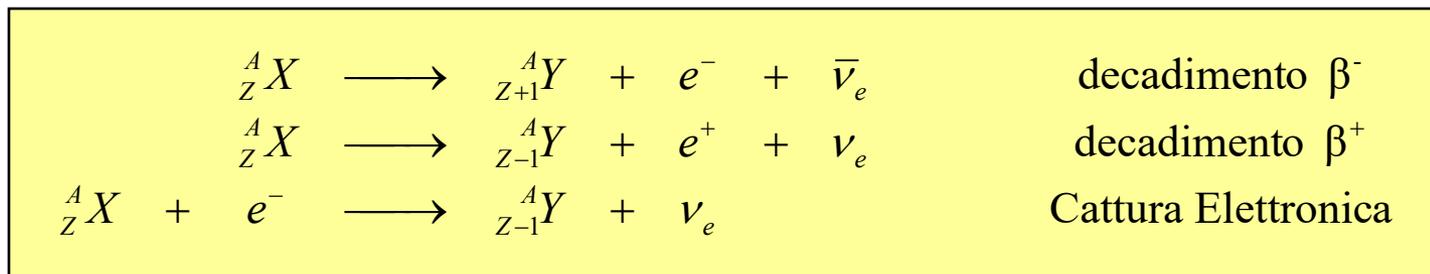
- un **elettone** (decadimento β^-)
- un **positrone** (decadimento β^+)

Oppure la cattura di un elettrone atomico (**Cattura Elettronica** o **E.C.**)

Si tratta di un processo di **interazione debole** ed è preponderante tra i nuclei instabili.



Se riscriviamo le precedenti in termini di nucleo atomico abbiamo:



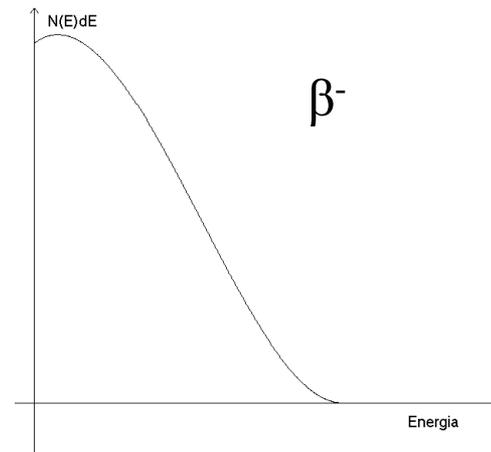
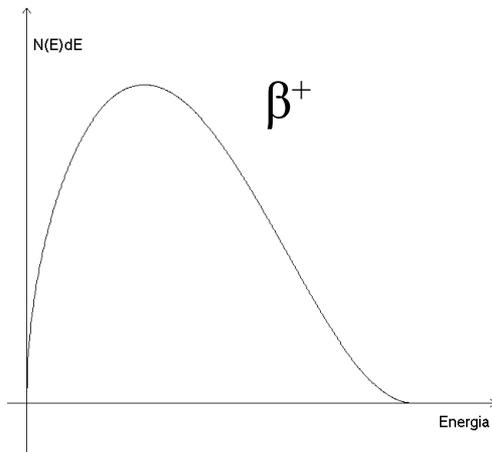
La trasformazione non comporta alcuna variazione del numero di massa A, e per questo motivo le trasformazioni sono dette **trasformazioni isobariche**.

La disintegrazione beta:

A differenza del decadimento α , che essendo un decadimento a due corpi emette la particella α sempre con la medesima energia (energia monocromatica), l'elettrone nel decadimento β^- condivide la propria energia con il neutrino e quindi ne risulta uno spettro continuo con energia massima $(T_e)_{\max} = Q_{\beta^-}$ (a questo valore viene dato il nome di *end-point*).

decadimento β^- : avviene per quei nuclei in cui vi è un **eccesso di neutroni**

decadimento β^+ : avviene per quei nuclei in cui vi è un **eccesso di protoni**



Spettro del decadimento β , nel caso di emissione di positroni ed elettroni

Cinematica del decadimento β^- :

$$Q_{\beta^-} = (m_X - m_Y - m_e) c^2$$

masse nucleari

Essendo:

$$M_X = m_X + Z \cdot m_e$$
$$M_Y = m_Y + (Z + 1) \cdot m_e$$

Masse atomiche

$$Q_{\beta^-} = (M_X - M_Y) c^2$$

Se esprimiamo, M in unità di masse atomiche ed Q in MeV possiamo riscrivere la precedente equazione nel seguente modo:

$$Q_{\beta^-} = (M_X - M_Y) 931.502 \quad [MeV]$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un decadimento β^- possa avere luogo é che la massa atomica del nucleo padre sia superiore a quella del nucleo figlio:

$$M_X > M_Y$$

Cinematica del decadimento β^+ :

$$Q_{\beta^-} = (m_X - m_Y - m_e) c^2$$

masse nucleari

Essendo:

$$M_X = m_X + Z \cdot m_e$$
$$M_Y = m_Y + (Z - 1) \cdot m_e$$

Masse atomiche

$$Q_{\beta^-} = (M_X - M_Y - 2m_e) c^2$$

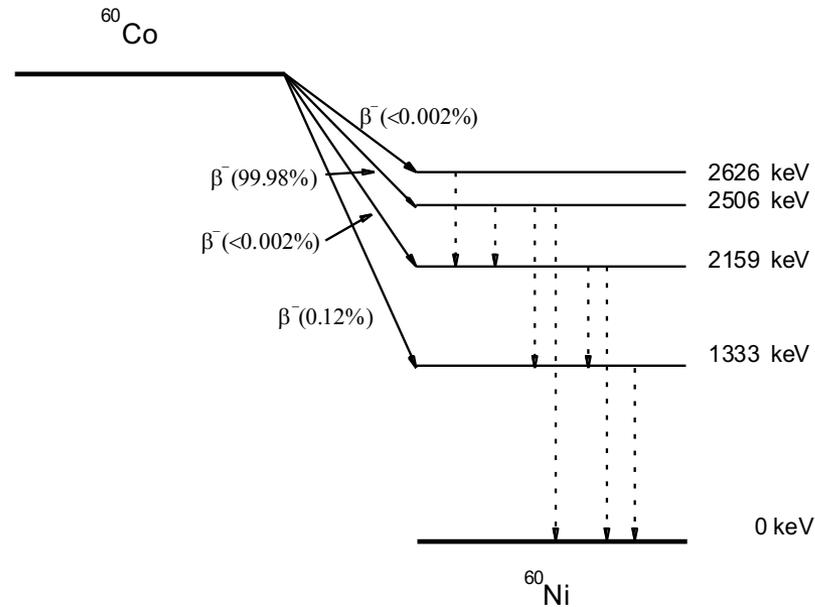
Se esprimiamo, M in unità di masse atomiche ed Q in MeV possiamo riscrivere la precedente equazione nel seguente modo:

$$Q_{\beta^-} = (M_X - M_Y) 931.502 - 1.022 \quad [MeV]$$

Condizione necessaria e sufficiente affinché un decadimento β^+ possa avere luogo é che la differenza delle due masse atomiche dei nuclei padre e figlio sia superiore a due volte la massa dell'elettrone: .

$$(M_X - M_Y) c^2 > 1022 \text{ keV}$$

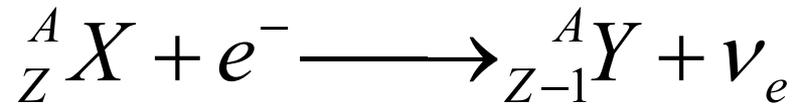
Schema del decadimento β^- del ^{60}Co .



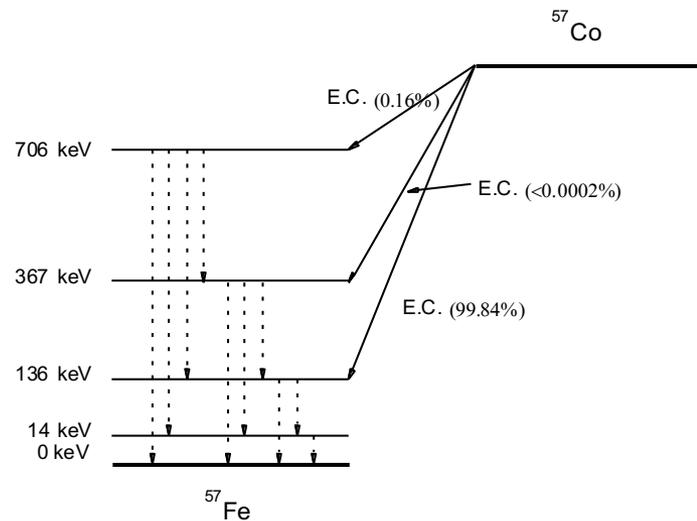
Attualmente non esistono più radionuclidi emettitori β^+ , ma possono essere prodotti artificialmente mediante reazioni nucleari. Unica eccezione è quella del ^{40}K , il quale avendo un periodo di dimezzamento ($\tau = 1.28 \cdot 10^9$ anni) confrontabile con l'età della terra ($\approx 4.6 \cdot 10^9$ anni) è “sopravvissuto” fino ai giorni nostri.

La cattura elettronica:

Se un nucleo presenta un eccesso di protoni ed ha un'energia di poco inferiore a 1022 keV, può catturare un elettrone della shell atomica. (generalmente dall'orbita K)



I neutrini emessi durante il processo di cattura elettronica hanno tutti la stessa energia (**neutrini monoenergetici**).



Schema di decadimento per cattura elettronica del ${}^{57}\text{Co}$.

Summary of kinematic

conditions

$M(Z,A) - M(Z+1,A) > 0$ $m(Z,A) - m(Z+1,A) > m_e$	decadimento β^- possibile
$M(Z,A) - M(Z-1,A) > 0$ $m(Z,A) + m_e \geq m(Z-1,A)$	cattura elettronica ε possibile
$M(Z,A) - M(Z-1,A) > 2m_e$ $m(Z,A) - m(Z-1,A) > m_e$	decadimento β^+ e cattura elettronica possibili
$M(Z,A) - M(Z-2,A-4) > M(^4\text{He})$ $m(Z,A) - m(Z-2,A-4) > m(^4\text{He})$	decadimento α possibile

Memento

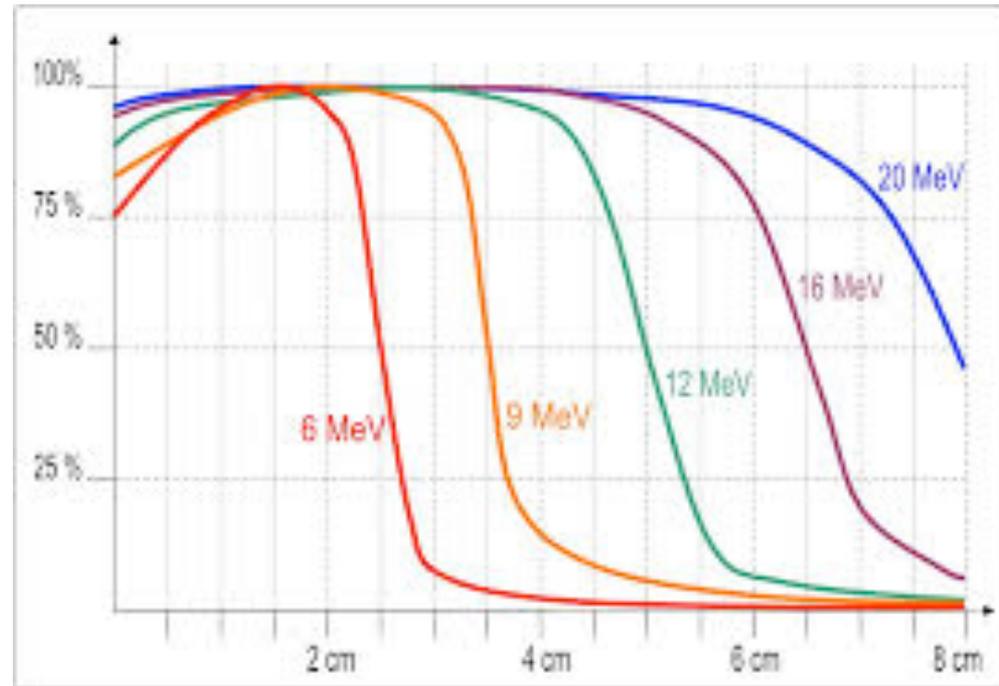
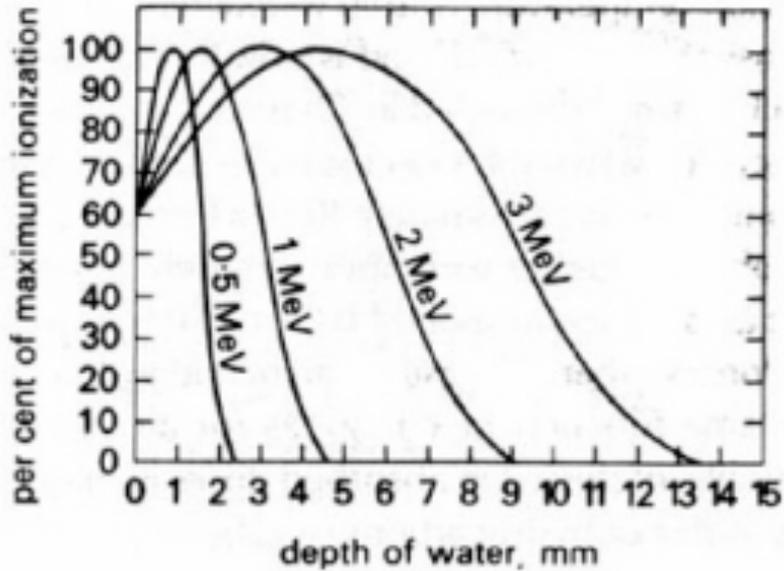
$$m_n = 939.5054 \text{ MeV}, m_p = 938.213 \text{ MeV}, m_e = 0.511 \text{ MeV}$$

$$M(Z,A) = Z \cdot m_p + (A-Z) \cdot m_n + A(B/A)$$

Exercise Nr 6

- Find a list of nuclides with dominant beta- and beta+ decays of C, Na, F, P, Ga, I, Re, Lu, Y and Sr with $t_{1/2}$ between 1min – 10days (a couple of isotopes per element)
- For each list the $t_{1/2}$, the endpoint EP and the range in water at $E_e = EP/2$ (from NIST)

Energy release electrons



Brachytherapy—beta emitting

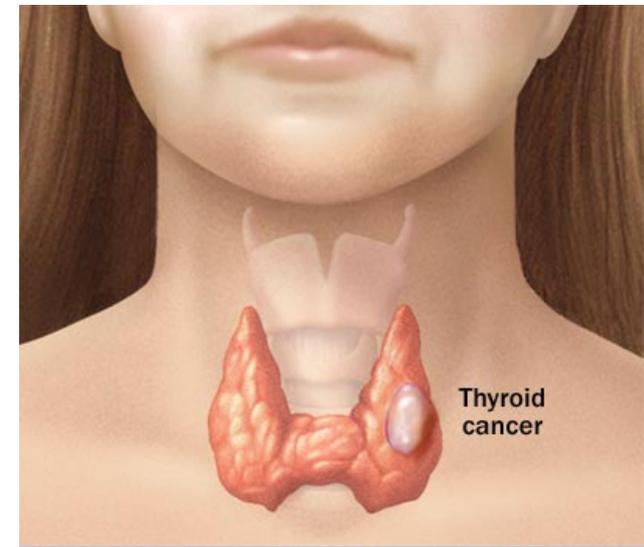
Nuclide	T1/2	EndPoint	R (EP/2)	Target
Y-90	64h	2.3 MeV	5mm	Liver/menin gioma
Sr-90	29anni	0.5MeV	0.05	Liver/lung
P-32	14d	1.7 MeV	4mm	cerebral
Re-188	17h	2.1MeV	5mm	derma



Radio-metabolic therapy

Nuclide	T1/2	EndPoint	R (EP/2)	Target
Y-90	64d	2.3MeV	5mm	NET
I131	8d	1MeV	2mm	Thyroid
I123	13h			Paediatric neuroblastoma
Lu-177	7d	0.5 MeV	1mm	NET

- Typical injection: 300MBq/kg



β^- RadioGuided Surgery

β^- emitting tracer + PROBE detecting e^-

• Typical radionuclide ^{90}Y (end-point 2.3MeV, $\tau_{1/2}=64\text{h}$)

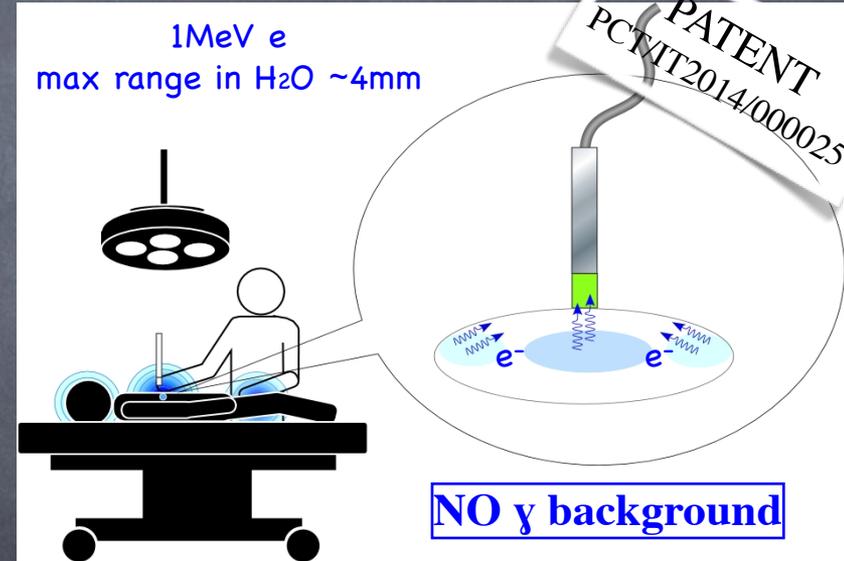
Very low γ background around the lesion:

• PROS

- Low injected activity to detect tumor remnants.
- Low exposure to radiation.
- Simple and compact device.

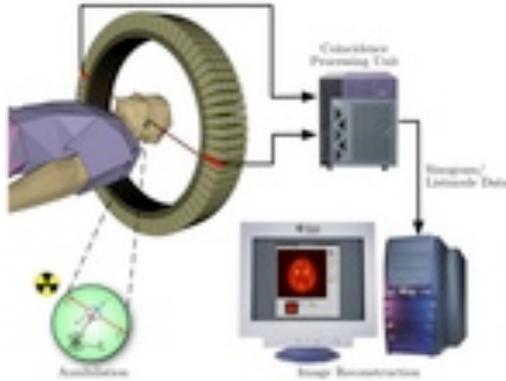
CONS

- Need to develop **specific β^- tracer** for each clinical case.



May extend the technique to cases with a large uptake of nearby healthy organs: **abdominal or brain tumors.**

PET



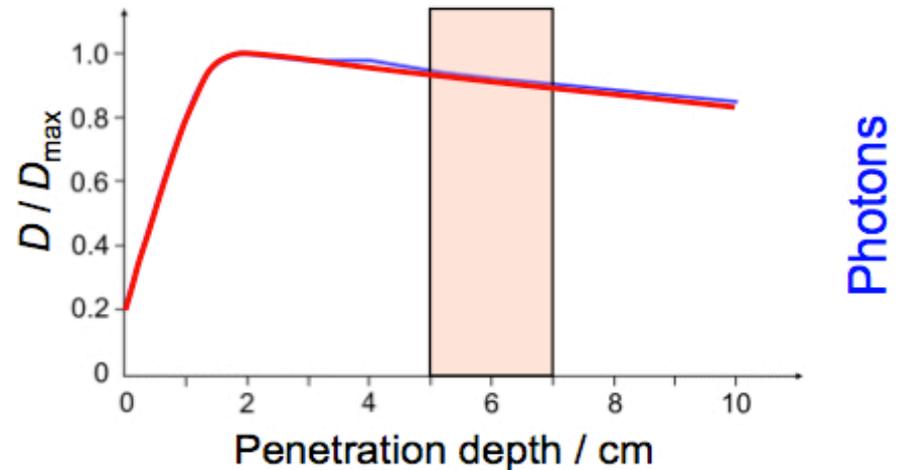
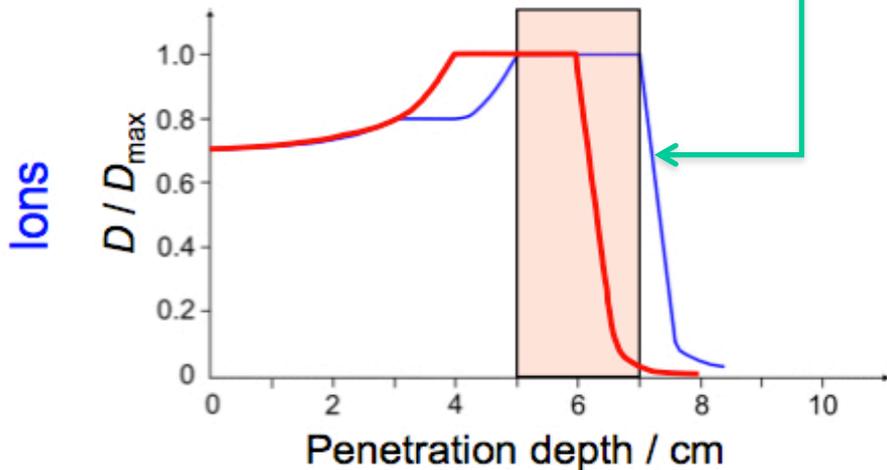
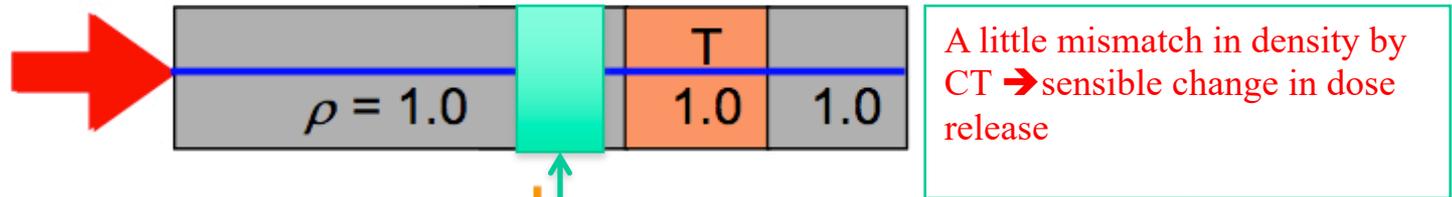
Main PET tracers

Nuclide	T1/2	EndPoint	R (EP/2)	Target
F-18	100m	0.6 MeV	1mm	Generic
C-11	20m	0.9	2mm	Prostate/cerebral
Ga-68	1h	1.9MeV	3mm	NET
N-13	10m	1.2MeV	2mm	derma

Monitoring the dose

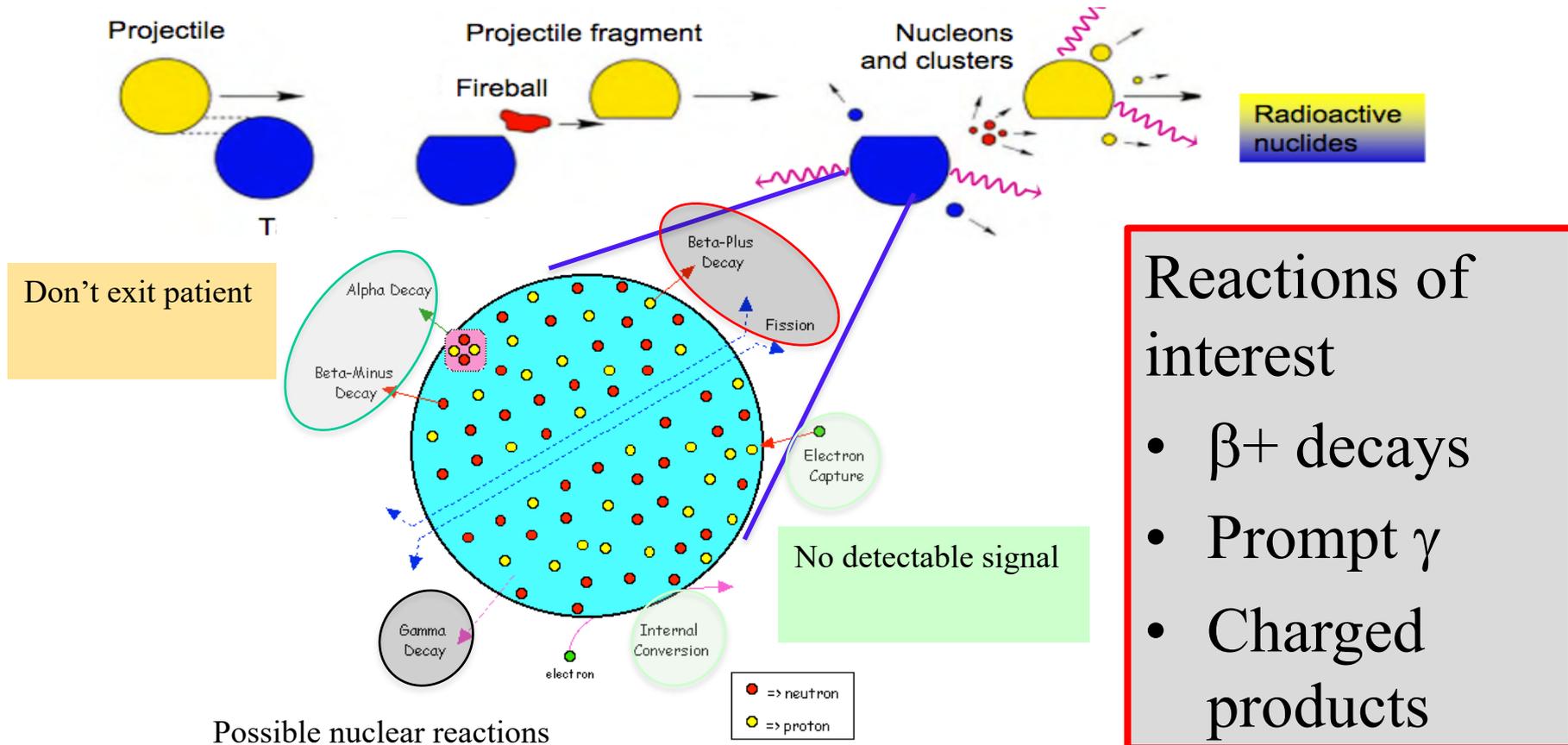
- Why is so crucial to monitor the dose in hadrontherapy ? Is like firing with machine-gun or using a precision rifle..

Effect of density changes in the target volume



Measuring the dose

Based on nuclear reactions between the projectile and the patient



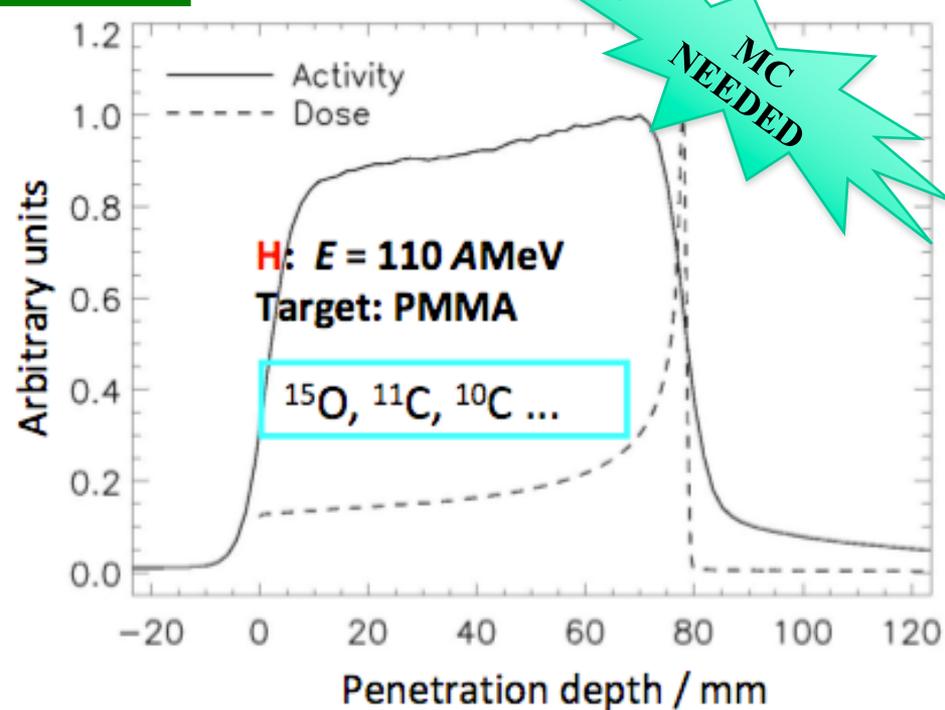
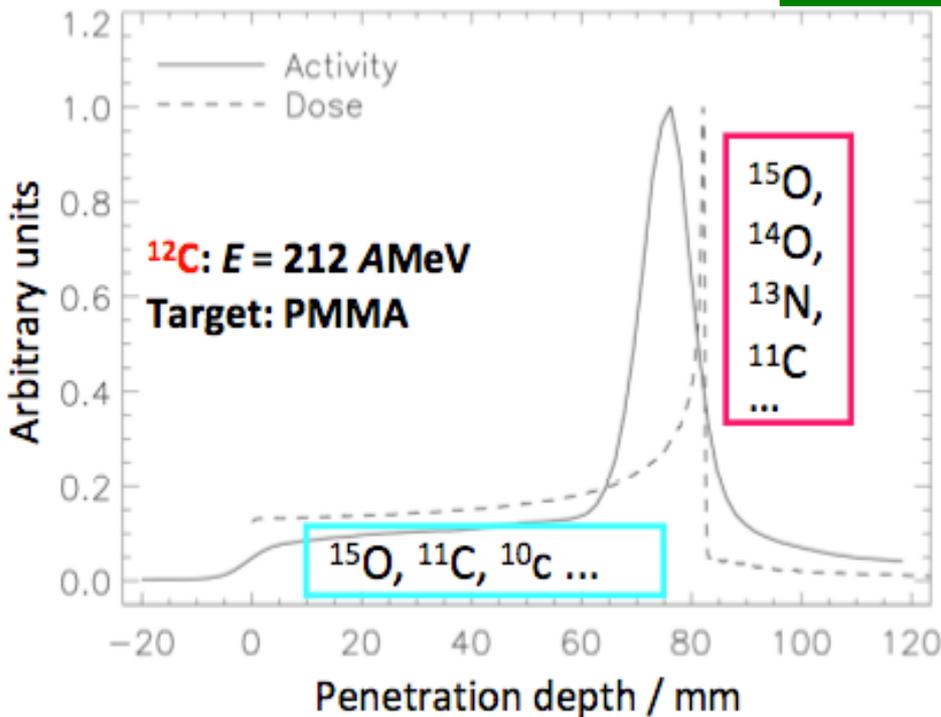
Correlation between activity and dose

Therapy beam	^1H	^3He	^7Li	^{12}C	^{16}O	Nuclear medicine
Activity density / $\text{Bq cm}^{-3} \text{ Gy}^{-1}$	6600	5300	3060	1600	1030	$10^4 - 10^5 \text{ Bq cm}^{-3}$

Projectiles & target fragmentation

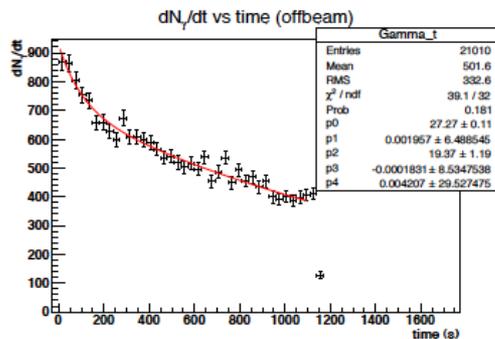
Target fragmentation

Example of β^+



Main observed radio-isotopes in dose profiling

Nuclide	T1/2	EndPoint	R (EP/2)
C-10	19s		
C-11	20m		
O-14	70s		
O-15	122s		
N-13	10m		



	A_x
^{11}C	743 ± 6
^{10}C	$(0.0 \pm 1.0)10^{-3}$
^{13}N	$(0.0 \pm 3.0)10^{-4}$
^{14}O	375 ± 46
^{15}O	$(0.0 \pm 1.0)10^{-5}$

Kahoot!

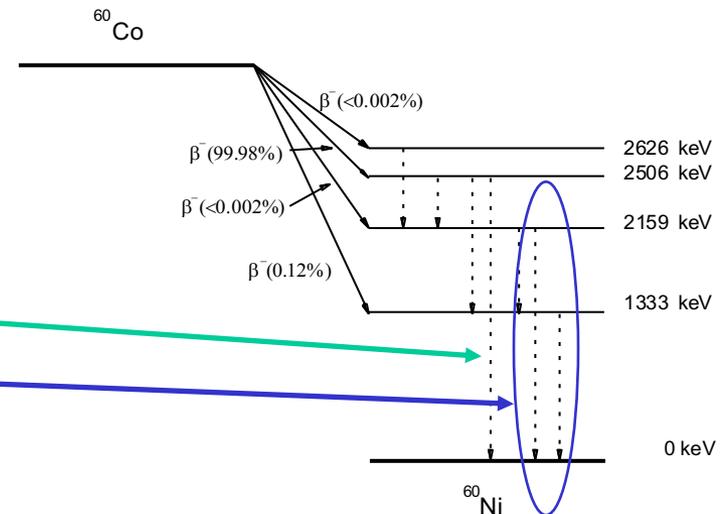
L'emissione gamma

Un nucleo formatosi in seguito ad un decadimento radioattivo può ritrovarsi nel suo stato fondamentale oppure trovarsi in uno dei suoi **stati eccitati**.

Questo infatti dava ragione dell'esistenza di una struttura fine del decadimento α e β .

Come avviene per l'atomo, anche il nucleo si porterà nella configurazione più stabile emettendo radiazione elettromagnetica corrispondente al salto energetico dei livelli interessati. A questa **radiazione elettromagnetica** viene dato il nome di **emissione gamma** (o raggi γ).

La transizione dagli stati eccitati allo stato fondamentale può avvenire in una sola transizione dando in questo modo origine ad un fotone γ di energia E_γ pari al salto energetico tra il livello eccitato e lo stato fondamentale, o attraverso più transizioni intermedie, dando in questo modo origine a diversi fotoni γ in cascata.



Il numero di fotoni emessi non rispecchia il numero di nuclei decaduti: non possiamo parlare di ~~decadimento gamma~~

Per l'emissione gamma, sia la massa atomica A che il numero atomico Z rimangono **invariati**; si parla in questo caso di **isomeria nucleare**.

Anche l'emissione dei fotoni γ obbedisce alla legge del decadimento esponenziale, ma a differenza dei decadimenti α e β , i tempi in gioco sono dell'ordine di 10^{-15} secondi.

Esistono però casi in cui il tempo di dimezzamento risulta essere superiore al **millesimo di secondo**, in questo caso si parla di **stato metastabile** (lo stato metastabile è detto anche **stato isomerico**)

Esempio di stato metastabile: **Tecnezio metastabile** ^{99m}Tc ($\tau = 6 \text{ h}$) dal decadimento beta- del ^{99}Mo

CONVERSIONE INTERNA (I.C.) (*processo in competizione con l'emissione γ*)

Un nucleo può diseccitarsi ritrovando il suo stato fondamentale trasferendo direttamente la propria energia in eccedenza direttamente agli elettroni atomici. \longrightarrow Emissione di un elettrone

$$E_{e^-} = E - E_l$$

energia di eccitazione \swarrow \nwarrow energia di legame dell'elettrone orbitale

Co-60 decay chain

In

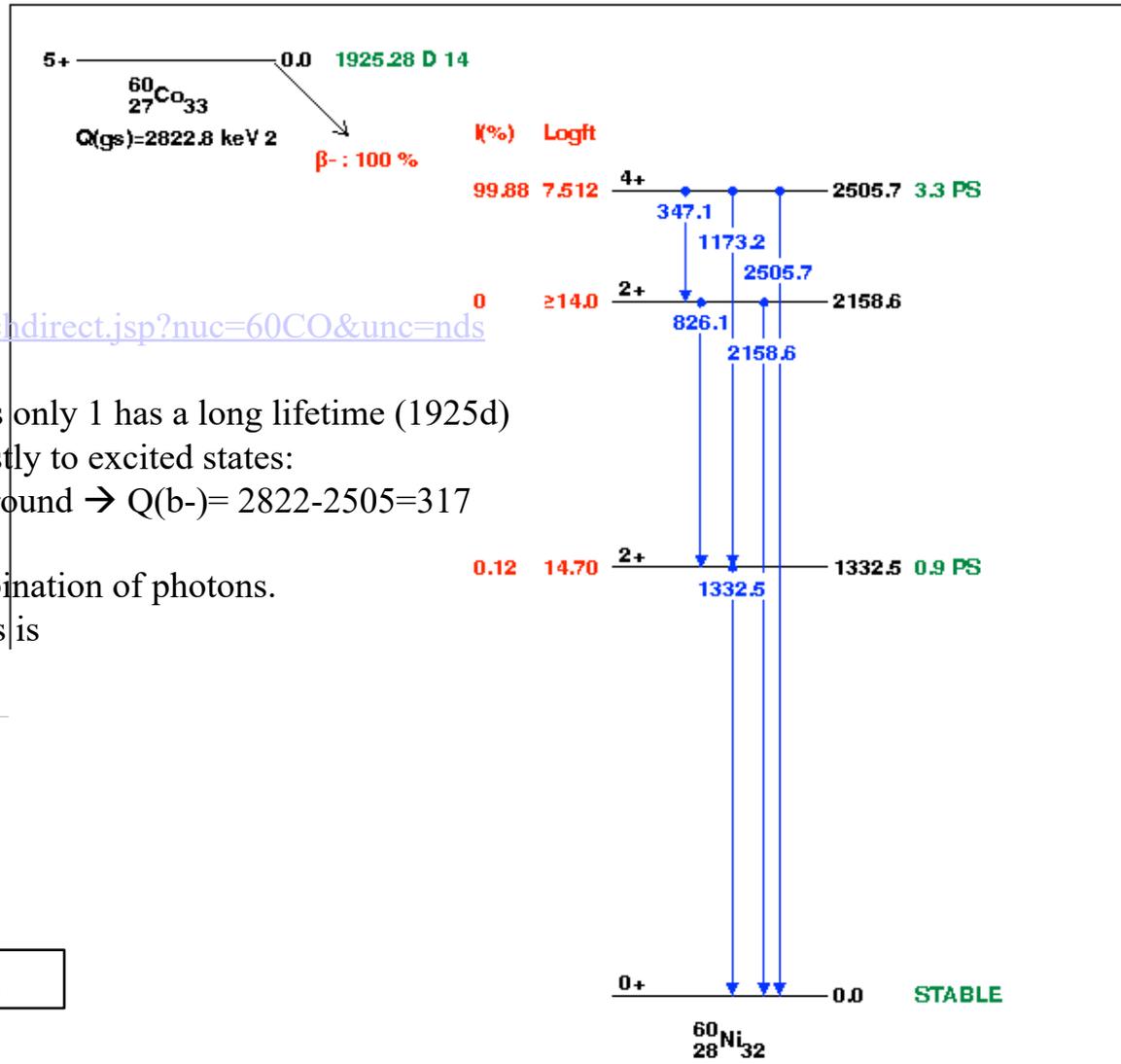
<http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/decaysearchdirect.jsp?nuc=60CO&unc=nds>

There are three possible isotopes, but of this only 1 has a long lifetime (1925d)
 All Co60 goes to Ni60 via b- decay but mostly to excited states:
 99.88% to a state that is 2505MeV above ground → $Q(b^-) = 2822 - 2505 = 317$ MeV.

From this excited state it decays in all combination of photons.

The list with the corresponding probabilities is

	Energy (keV)	Intensity (%)	Dose (MeV/Bq-s)
XR 1	0.85	3.29E-4 % 16	2.80E-9 14
XR kα2	7.461	0.00322 % 16	2.40E-7 12
XR kα1	7.478	0.0063 % 3	4.74E-7 22
XR kβ1	8.265	7.6E-4 % 4	6.3E-8 3
XR kβ3	8.265	3.91E-4 % 19	3.23E-8 16
	347.14 7	0.0075 % 4	2.60E-5 14
	826.10 3	0.0076 % 8	6.3E-5 7
	1173.228 3	99.85 % 3	1.1715 4
	1332.492 4	99.9826 % 6	1.332260 9
	2158.57 3	0.00120 % 20	2.6E-5 4
	2505.692 5	2.0E-6 % 4	5.0E-8 10



Notes

- Normally use <http://www.nndc.bnl.gov/nudat2/chartNuc.jsp> but quick info can be obtained from <http://nucleardata.nuclear.lu.se/toi/nucSearch.asp>
- The intensity (I(%)) is the fraction of cases where a given radiation is observable (dose not sum to 1: multiple or no radiation is possible)
- It is convenient to use the “Decay Radiation Search” although the search needs to be restricted to work
- Typical problems:
 - I need a radiation of a certain type who can generate it and in association with what?
 - Furthermore it might be that the best is a parent of the found radio-isotope (e.g. stable electron source Sr-90)
 - All radiation is typically associated to gamma → need to check if fraction is tolerable
 - If there are multiple radiations it is important to know whether they are simultaneous (Co60) or not (Na22)
 - I have a given radio-isotope, which is the full decay chain (e.g. Ra-221 vs Ra-223)

Exercise #7

* , ^ , ... = correlated

Study the decay chain of

- 40K
- 99mTc
- 137Cs
- 177Lu
- 223Ra

Father	T1/2	EP_beta (keV) [I(%)]	E_IC(keV) [I(%)]	E_γ (keV) [I(%)]
60Co	1925d	317[100]*		1173(100)*
				1332(100)*

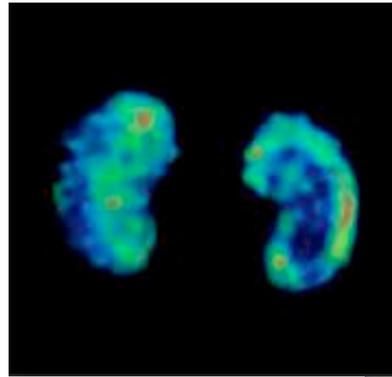
Decay/emission type, final products, and lifetime.
Consider only decays with $I > 5\%$, no alpha, XR or Auger, $E > 100\text{keV}$

padre	T ½	ep beta	E ic	E gamma	figlio
40 K	1.248 E+09 y	1310.89 [89.27]			40 Ca 0
99mTc	6.0072 h			140.51 [89]	
137 Cs		30,08 513.97 [94.70] 1175.63 [5.30]		661.7 [85.10]	137 Ba 11/2- 137 Ba 3/2+
177 Lu	6.65 d	498.3 [79.4]	101.68 [6.75]	208.36 [10.36]	

Ra-223

Father	T1/2	EP_beta (keV) [I(%)]	E_IC(keV) [I(%)]	E_γ (keV) [I(%)]	λ_water (cm)
223Ra	11d			269[14]	
219Rn	4s			271[11] 401[7]	
215Po	1.8ms				
211Pb	36min	535[6] 1367[91]			
211Bi	2.1min			351[13]	
207Tl	4.7m	1418[99]			

SPECT



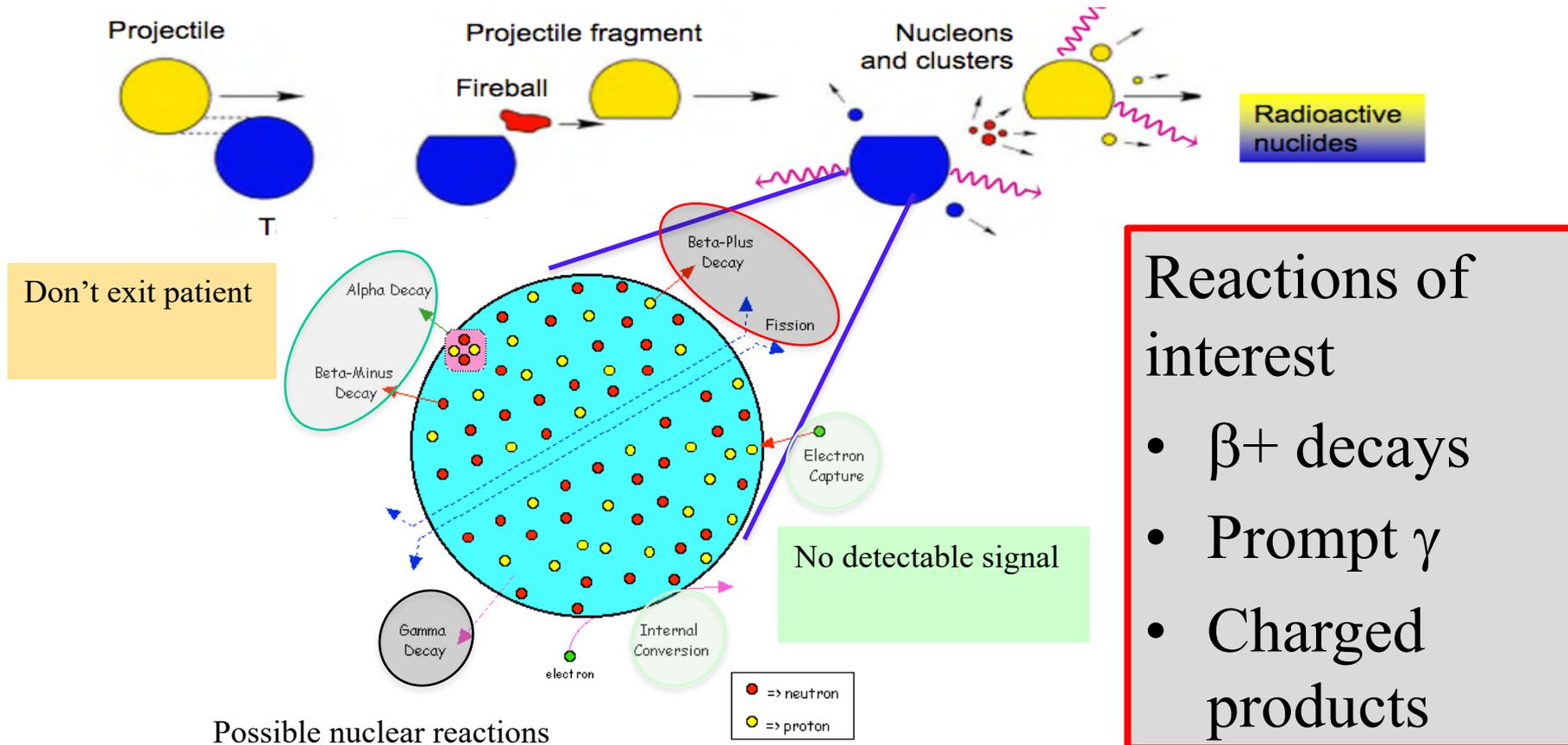
- Single photon emission
- Need a radio-isotope that:
 - Decays only gamma
 - Decays in $\tau_{1/2} \sim$ hours
 - Easy to produce/hold \rightarrow
 - With E_γ such that $\lambda \sim 10$ cm

Simultaneous Therapy and Diagnostics

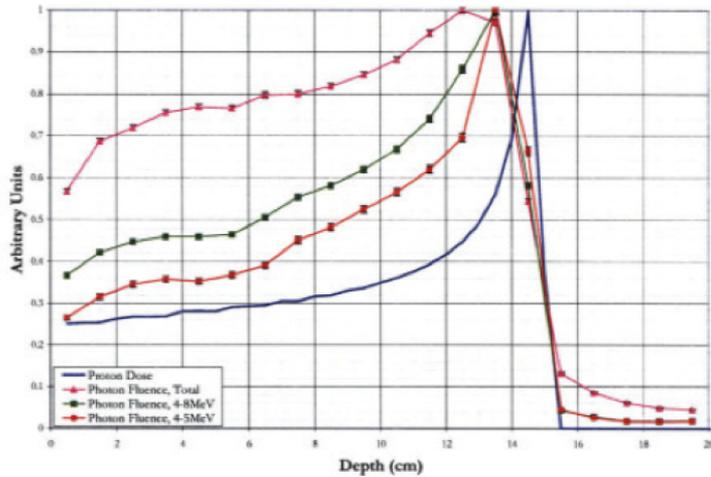
- Use of beta- emitters that also have gamma lines
 - Lu-177 for NET
 - I-131,123,... for thyroid

Measuring the dose in hadrontherapy

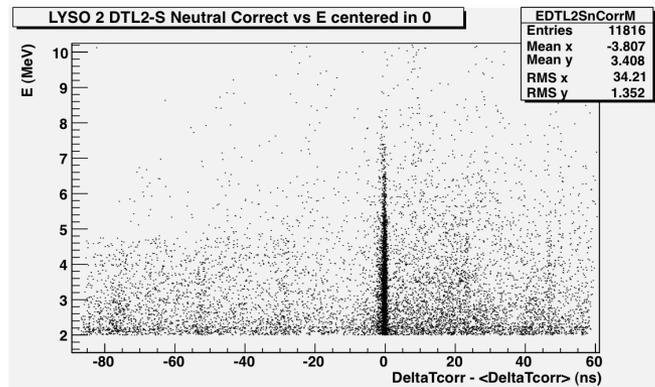
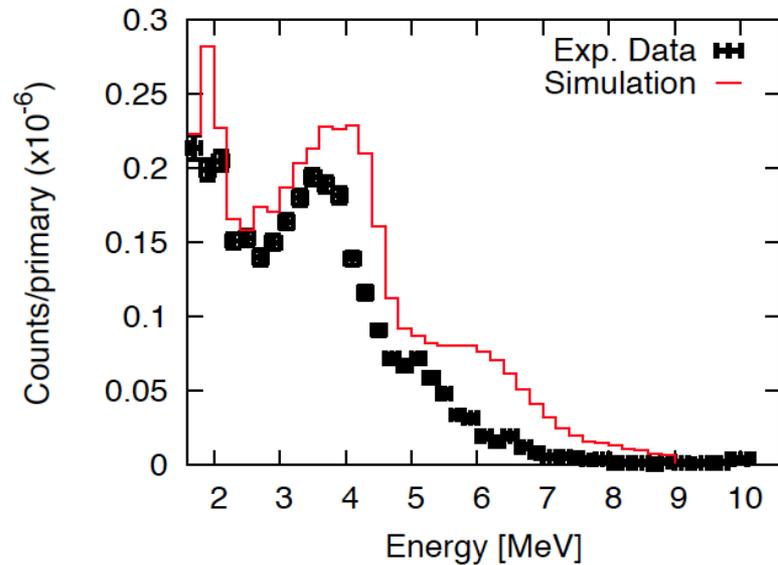
Based on nuclear reactions between the projectile and the patient



Prompt Gamma emission



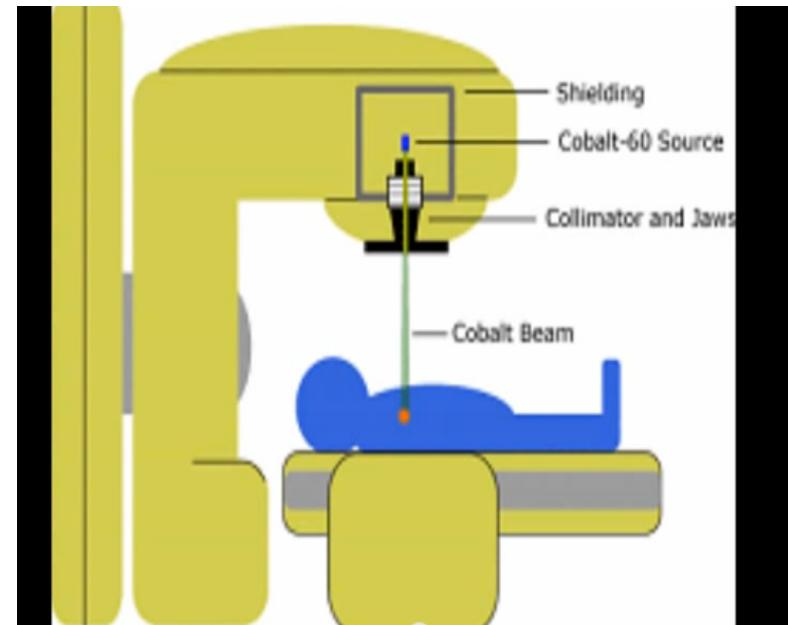
Correlation with Bragg Peak



Simultaneous with bunch \rightarrow help discrimination of background

Radiotherapy (Co)

- Cobalto-therapy performs radio-therapy with Co photons instead of the accelerator's generated ones.
 - More difficult to handle when irradiation is not needed
 - Easier to shield wrt accelerators when active



Secular equilibrium

Case: there is a father (f) that decays with decay time τ_f and a daughter (d), produced in a fraction ϕ of times and that decays with decay time τ_d .

$$\frac{dN_f}{dt} = -\frac{N_f}{\tau_f}$$

$$\frac{dN_d}{dt} = \frac{\Phi N_f}{\tau_f} - \frac{N_d}{\tau_d}$$



$$N_f(t) = N_f(0)e^{-t/\tau_f}$$

$$N_d(t) = \frac{\Phi}{\tau_f - 1} N_f(0) (e^{-t/\tau_f} - e^{-t/\tau_d})$$



$$A_f(t) = A_f(0)e^{-t/\tau_f}$$

$$A_d(t) = \frac{\Phi}{1 - \frac{\tau_d}{\tau_f}} A_f(0) (e^{-t/\tau_f} - e^{-t/\tau_d})$$

If $\tau_d \ll t \ll \tau_f$

$$A_d(t) = \Phi A(t)$$

If $\tau_f \sim t \ll \tau_d$

$$A_d(t) = \Phi \frac{\tau_f}{\tau_d} A_f(0) (1 - e^{-t/\tau_f})$$

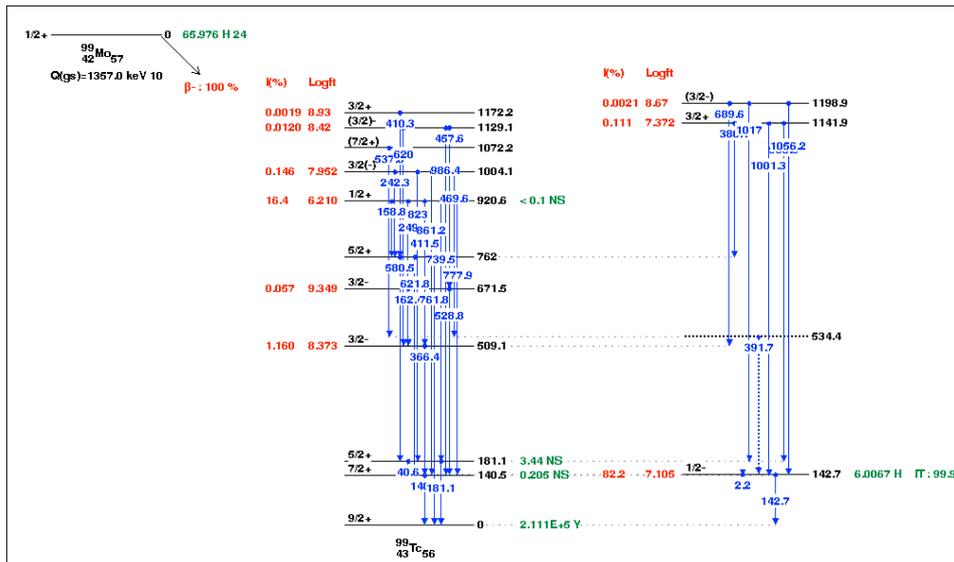
Example: the production of ^{99m}Tc



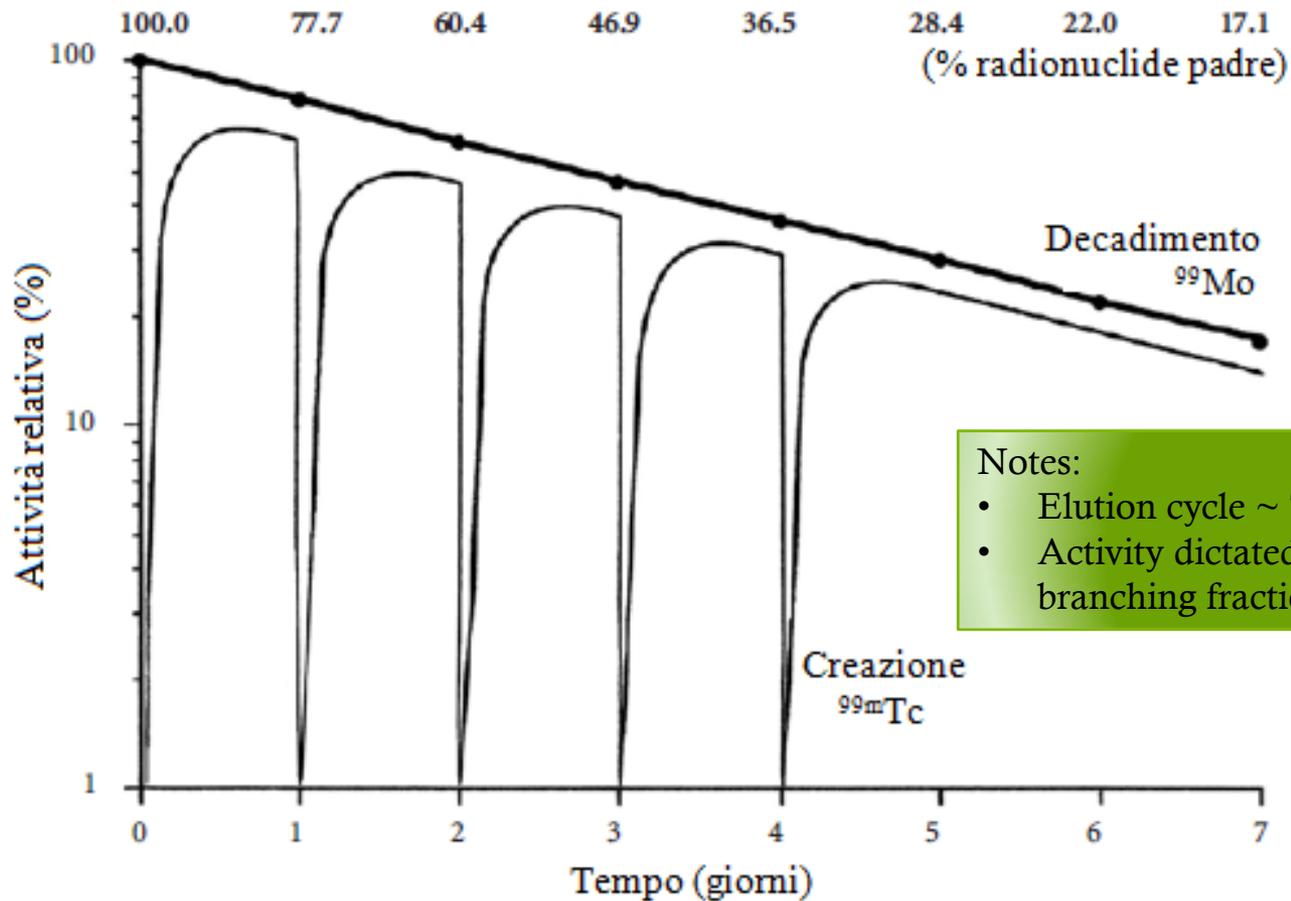
$$T_{1/2\text{Mo}} = 67.7\text{h}$$

$$T_{1/2\text{Tc}} = 6.02\text{h}$$

$$\Phi = 82.4\%$$



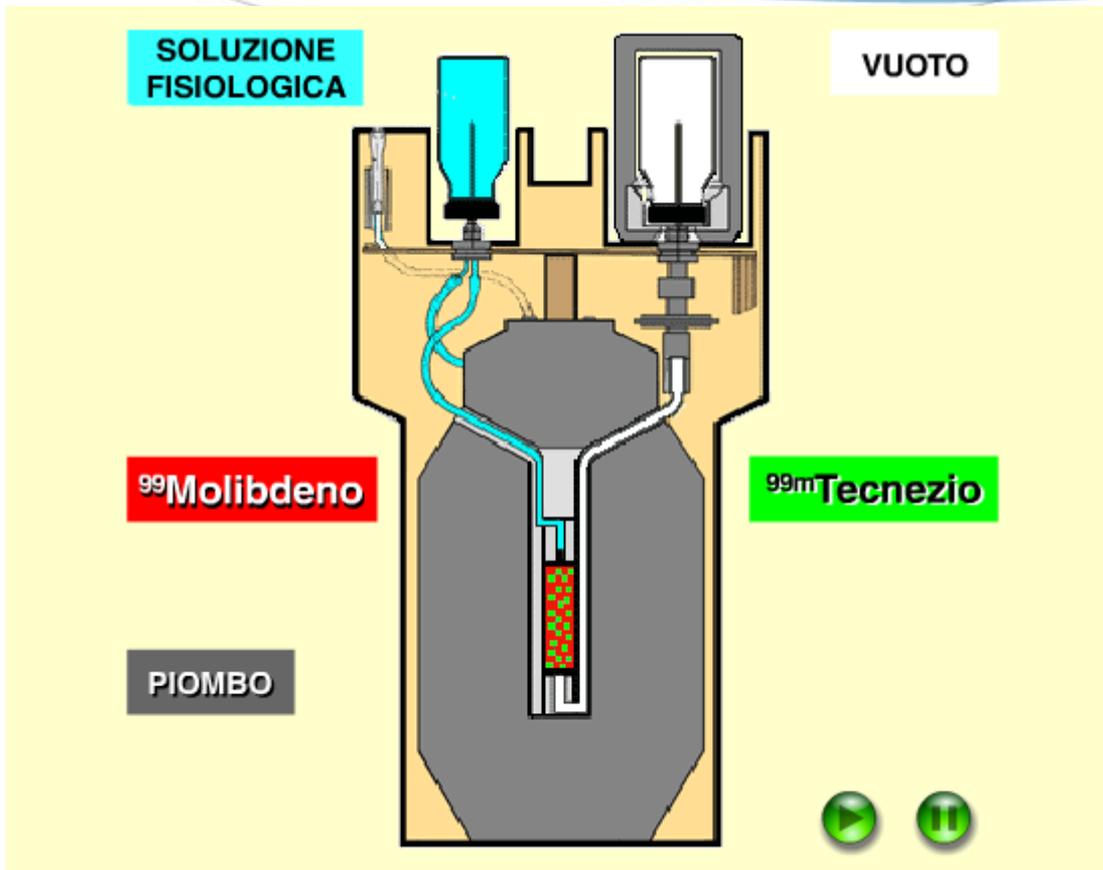
Time structure



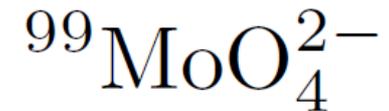
Notes:

- Elution cycle $\sim T_{1/2}$ daughter
- Activity dictated by father and branching fraction

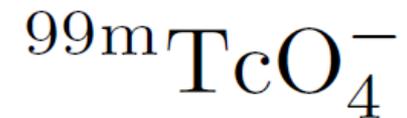
Elution generators



Molibdate:



Pertecnetate:



Exercise 8

- Find pairs father-daughter where:
 - The daughter decays beta with $\tau \sim 1-100$ hr
 - The father decays with $\tau \sim 100d - 10$ y

Use: generators

- For each radio-isotope of use find a father with long lifetime and reasonable Branching Fraction

Father	Daughter	T(1/2) father	T(1/2) daughter	Φ (%)
Ge-68	Ga-68	270d	68min	100
Sr-90	Y-90	29y	64h	100
W-188	Re-188	70d	17h	100
Mo-99	Tc-99m	68h	6h	82

Use: long life-time sources

- When there are multiple decays involved and the father is the longest, when the equilibrium is achieved all decay rates are related to the father's activity by the branching fractions
- Es:
 - Sr90 \rightarrow Y90
 - Am-231