

Esercizio 1 - 10 febbraio 2026, fila $\diamond$

Data la funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{x^4}{(x-2)^2} \right),$$

studiarne: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescita e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio e continuità: $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} = (-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$. La funzione non presenta simmetrie ed è continua nel suo dominio.

Limiti significativi e asintoti:

- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \log \left(\frac{0^+}{4} \right) = \log(0^+) = -\infty \Rightarrow$ **asintoto verticale** in $x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \log \left(\frac{16}{0^+} \right) = \log(+\infty) = +\infty \Rightarrow$ **asintoto verticale** in $x = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \log \left(\underbrace{\frac{x^4}{(x-2)^2}}_{\rightarrow +\infty} \right) = +\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\log \left(\frac{x^4}{(x-2)^2} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\log(x^2(1+o(1)))}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 \log|x| + o(1)}{x} = 0$,
per la gerarchia degli infiniti. Quindi **non esistono asintoti obliqui oppure orizzontali**.

Derivata prima e monotonia: La funzione è derivabile in tutto il dominio. Calcoliamo la derivata usando la forma semplificata $f(x) = 4 \log|x| - 2 \log|x-2|$:

$$f'(x) = \frac{4}{x} - \frac{2}{x-2} = \frac{2(x-4)}{x(x-2)} \quad \forall x \in D.$$

- $f'(x) = 0 \iff x = 4$;
- $f'(x) > 0 \iff x \in (0, 2) \cup (4, +\infty)$;
- $f'(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (2, 4)$.

Quindi

- f è **strettamente crescente** in $(0, 2)$ e (separatamente) in $[4, +\infty)$;
- f è **strettamente decrescente** in $(-\infty, 0)$ e (separatamente) in $(2, 4]$;
- $x = 4$ è un **punto di minimo locale**.

Derivata seconda e concavità/convessità

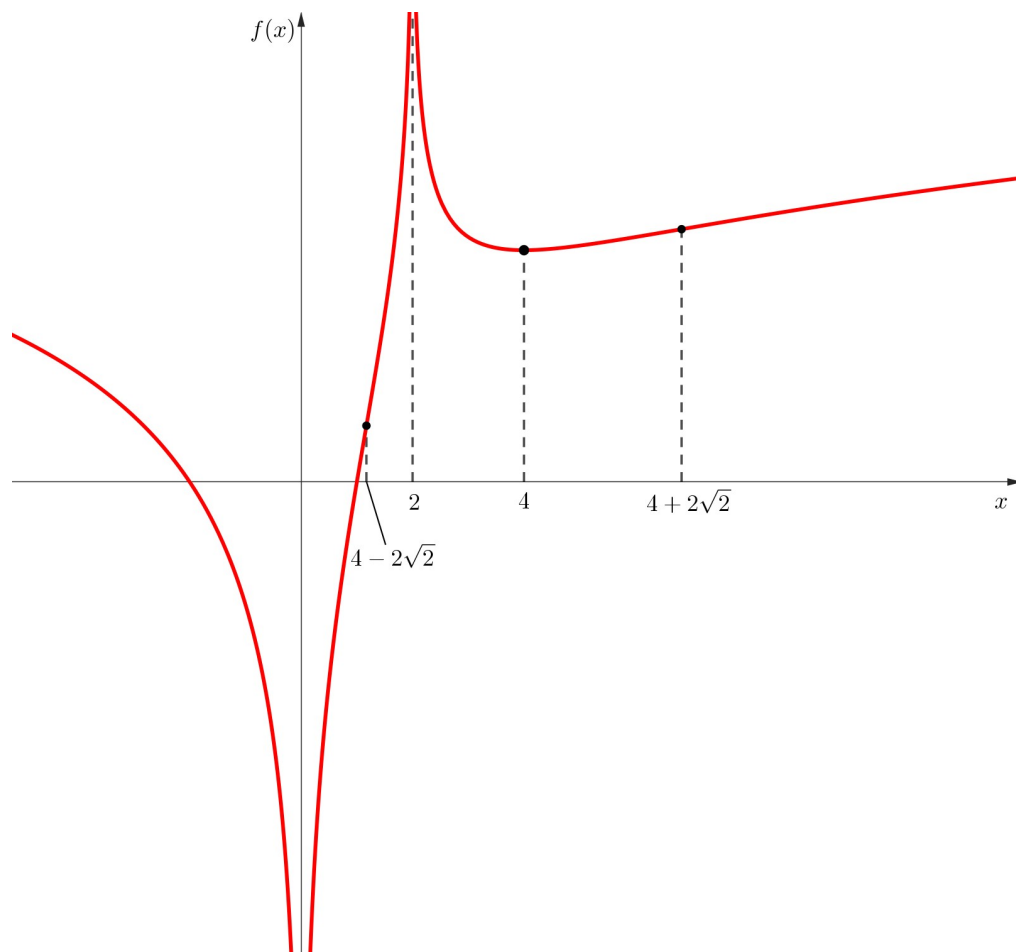
$$f''(x) = \left(\frac{4}{x} - \frac{2}{x-2} \right)' = -\frac{4}{x^2} + \frac{2}{(x-2)^2} = \frac{-2(x^2 - 8x + 8)}{x^2(x-2)^2}$$

- $f''(x) = 0 \iff (x = 4 - 2\sqrt{2} \approx 1.2) \vee (x = 4 + 2\sqrt{2} \approx 6.8)$;
- $f''(x) > 0 \iff x \in (4 - 2\sqrt{2}, 2) \cup (2, 4 + 2\sqrt{2})$;

- $f''(x) < 0 \iff x \in (-\infty, 0) \cup (0, 4 - 2\sqrt{2}) \cup (4 + 2\sqrt{2}, +\infty)$.

Quindi

- f è **strettamente convessa** in $[4 - 2\sqrt{2}, 2)$ e (separatamente) in $(2, 4 + 2\sqrt{2}]$;
- f è **strettamente concava** separatamente nei tre intervalli $(-\infty, 0)$ $(0, 4 - 2\sqrt{2}]$ e $[4 + 2\sqrt{2}, +\infty)$;
- $x = 4 \pm 2\sqrt{2}$ sono **punti di flesso**.



Esercizio 2 - 10 febbraio 2026, fila $\diamond$

Trovare e disegnare le soluzioni complesse delle seguenti “equazioni”:

$$(z^2 - 1)^2 + (z^2 - 1) + 1 = 0, \quad \frac{w}{w - 2i} \in \mathbb{R}.$$

Prima equazione: Ponendo $t = z^2 - 1$ (ma si potrebbe anche porre $s = z^2$), si ottiene un’equazione di secondo grado nella variabile t :

$$t^2 + t + 1 = 0,$$

che con l’usuale formula per l’equazione di secondo grado fornisce

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad \text{da cui} \quad z^2 = t + 1 = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

- Se $z^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$, le radici sono $z_k = e^{i\frac{\pi}{6} + k\pi}$ per $k = 0, 1$:

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_1 = e^{i\frac{7\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

- Se $z^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$, le radici sono $\tilde{z}_k = e^{-i\frac{\pi}{6} + k\pi}$ per $k = 0, 1$:

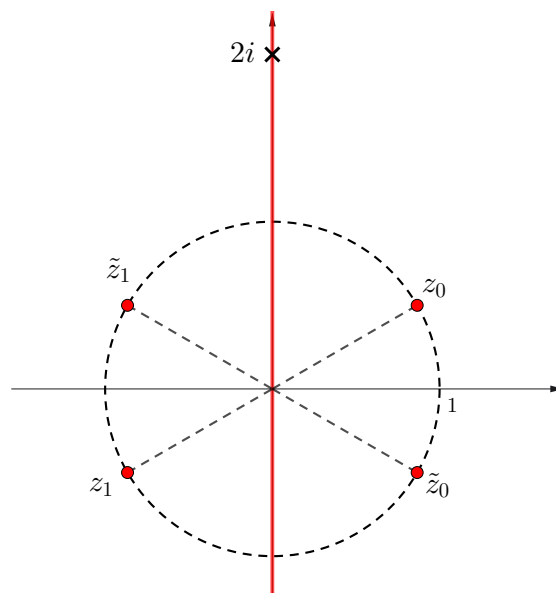
$$\tilde{z}_0 = e^{-i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad \tilde{z}_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

In definitiva la prima equazione ha 4 soluzioni: $z = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \frac{1}{2}i$, con scelte indipendenti dei segni.

Seconda equazione: Bisogna subito imporre $w \neq 2i$. Ponendo $w = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{w}{w - 2i} = \frac{x + iy}{x + i(y - 2)} = \frac{x + iy}{x + i(y - 2)} \cdot \frac{x - i(y - 2)}{x - i(y - 2)} = \frac{x^2 + y^2 - 2y + 2ix}{x^2 + (y - 2)^2}.$$

Poiché il denominatore è reale, l’ultima frazione scritta è reale se e solo se $2x = 0$, cioè $x = 0$. In definitiva, le soluzioni sono tutti i numeri immaginari puri $w = yi$, escludendo $w = 2i$, cioè $y = 2$.



Esercizio 3 - 10 febbraio 2026, fila $\diamond$

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale converge, e calcolarlo per $\alpha = 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^\alpha (x+2)^2} dx.$$

Studio della convergenza: La funzione è continua in $[0, +\infty)$, quindi l'integrale è improprio solo per $x \rightarrow +\infty$. Poiché

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^\alpha (x+2)^2} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{\alpha+2}} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

per il criterio del confronto asintotico l'integrale converge se e solo se

$$\alpha + 2 > 1 \iff \alpha > -1.$$

Calcolo dell'integrale per $\alpha = 0$: Dobbiamo calcolare

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x+2)^2} dx.$$

Risolviamo l'integrale indefinito integrando per parti.

$$\int \frac{\arctan x}{(x+2)^2} dx = -\frac{\arctan x}{x+2} + \int \frac{dx}{(x+2)(1+x^2)}$$

Per l'ultimo integrale scomponiamo in fratti semplici. Si trova

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+2)(1+x^2)} &= \frac{1}{5} \int \frac{dx}{x+2} - \frac{1}{10} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \frac{2}{5} \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{5} \log|x+2| - \frac{1}{10} \log(1+x^2) + \frac{2}{5} \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{\arctan x}{(x+2)^2} dx = -\frac{\arctan x}{x+2} + \frac{1}{5} \log|x+2| - \frac{1}{10} \log(1+x^2) + \frac{2}{5} \arctan x + c.$$

L'integrale improprio vale

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\arctan x}{x+2} + \frac{1}{5} \log(x+2) - \frac{1}{10} \log(1+x^2) + \frac{2}{5} \arctan x \right]_0^\omega \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{-\frac{\arctan \omega}{\omega+2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{5} \log(\omega+2) - \frac{1}{10} \log(1+\omega^2)}_{=\frac{1}{5} \log \frac{\omega+2}{\sqrt{1+\omega^2}} \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{2}{5} \arctan \omega}_{\rightarrow \frac{\pi}{5}} \right) - \frac{1}{5} \log 2 \\ &= \frac{\pi - \log 2}{5}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 - 10 febbraio 2026, fila $\diamond$

Trovare, se esiste, l'ordine di infinitesimo di ciascuna delle seguenti funzioni, per $x \rightarrow 0^+$:

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} - \frac{x}{\sin x}, \quad g(x) = x^{\tan x} - 1.$$

Studio di $f(x)$: Si ha

$$f(x) = \frac{(\sin x)^2 - x^2}{x \sin x} \sim \frac{(\sin x)^2 - x^2}{x^2}.$$

Poiché $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, si ha

$$(\sin x)^2 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).$$

Quindi

$$(\sin x)^2 - x^2 = \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right) - x^2 = -\frac{x^4}{3} + o(x^4) \sim -\frac{x^4}{3},$$

e dunque

$$f(x) \sim \frac{-\frac{1}{3}x^4}{x^2} = -\frac{1}{3}x^2 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+,$$

pertanto $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine 2** per $x \rightarrow 0^+$.

Studio di $g(x)$: Si ha

$$g(x) = e^{\tan x \log x} - 1$$

Poiché, per $x \rightarrow 0^+$,

$$\tan x \log x \sim x \log x \rightarrow 0,$$

sfruttando lo sviluppo asintotico $e^t - 1 \sim t$ per $t \rightarrow 0$ si ha

$$g(x) \sim \tan x \log x \sim x \log x.$$

Quindi per $x \rightarrow 0^+$ $g(x)$ **non ammette un ordine di infinitesimo**: è un infinitesimo di ordine inferiore a x , ma di ordine superiore a x^α per ogni $\alpha < 1$

Esercizio 5 - 10 febbraio 2026, fila $\diamond$

Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sinh\left(\frac{\sqrt{k^2+3}}{k^2}\right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left[\operatorname{tg}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{3}{k}\right) - \frac{1}{\sqrt{k}} \right].$$

Prima serie: Si tratta di una serie a segni alterni del tipo $\sum (-1)^k a_k$, dove

$$a_k = \sinh\left(\underbrace{\frac{\sqrt{k^2+3}}{k^2}}_{\sim \frac{1}{k} \rightarrow 0^+}\right) \rightarrow 0^+.$$

Ricordando lo sviluppo asintotico $\sinh x \sim x$ per $x \rightarrow 0$,

$$a_k \sim \frac{\sqrt{k^2+3}}{k^2} \sim \frac{1}{k}.$$

La serie asintotica $\sum \frac{1}{k}$ è la serie armonica, che è divergente. Di conseguenza, la serie data **non converge assolutamente**.

Poiché la serie è a segni alterni, proviamo ad applicare il criterio di Leibniz:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ (già verificata).
- Dobbiamo verificare che $a_{k+1} \leq a_k$ definitivamente. Poiché $\sinh(x)$ è crescente, basta verificare se il suo argomento è decrescente. Sia $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x^2}$. Allora

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 6}{x^3 \sqrt{x^2+3}} < 0 \quad \text{per } x > 0.$$

Quindi $f(x)$ è decrescente per $x > 0$, e di conseguenza la successione a_k è decrescente.

La serie converge semplicemente ma non assolutamente.

Seconda serie: Poiché $\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{3}{k} \rightarrow 0$, e $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{3}{k}\right) - \frac{1}{\sqrt{k}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{3}{k}\right) + \underbrace{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{3}{k}\right)^3}_{=o(1/k)} + \underbrace{o\left(\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{3}{k}\right)^3\right)}_{=o(1/k)} - \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{3}{k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \sim \frac{3}{k}. \end{aligned}$$

Pertanto la serie è definitivamente a termini positivi e ha lo stesso carattere della serie armonica, cioè **diverge a $+\infty$** .

Esercizio 1 - 10 febbraio 2026, fila ♣

Data la funzione

$$f(x) = \log \left(\frac{(x+1)^2}{x^4} \right),$$

studiarne: dominio, eventuali simmetrie, insiemi di continuità e di derivabilità, limiti significativi, asintoti; crescita e decrescenza, estremi relativi e assoluti, eventuali punti di non derivabilità; concavità, convessità, flessi. Disegnare un grafico qualitativo di $f(x)$.

Dominio e continuità: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$. La funzione non presenta simmetrie ed è continua nel suo dominio.

Limiti significativi e asintoti:

- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \log \left(\frac{0^+}{1} \right) = \log(0^+) = -\infty \Rightarrow$ **asintoto verticale** in $x = -1$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \log \left(\frac{1}{0^+} \right) = \log(+\infty) = +\infty \Rightarrow$ **asintoto verticale** in $x = 0$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \log \left(\underbrace{\frac{(x+1)^2}{x^4}}_{\rightarrow 0^+} \right) = -\infty$.
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\log \left(\frac{(x+1)^2}{x^4} \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\log(x^{-2}(1+o(1)))}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2 \log|x| + o(1)}{x} = 0$,
per la gerarchia degli infiniti. Quindi **non esistono asintoti obliqui oppure orizzontali**.

Derivata prima e monotonia: La funzione è derivabile in tutto il dominio. Calcoliamo la derivata usando la forma semplificata $f(x) = 2 \log|x+1| - 4 \log|x|$:

$$f'(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{4}{x} = -2 \frac{x+2}{x(x+1)} \quad \forall x \in D.$$

- $f'(x) = 0 \iff x = -2$;
- $f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -2) \cup (-1, 0)$;
- $f'(x) < 0 \iff x \in (-2, -1) \cup (0, +\infty)$.

Quindi

- f è **strettamente crescente** in $(-\infty, -2]$ e (separatamente) in $(-1, 0)$;
- f è **strettamente decrescente** in $[-2, -1)$ e (separatamente) in $(0, +\infty)$;
- $x = -2$ è un **punto di massimo locale**.

Derivata seconda e concavità/convessità

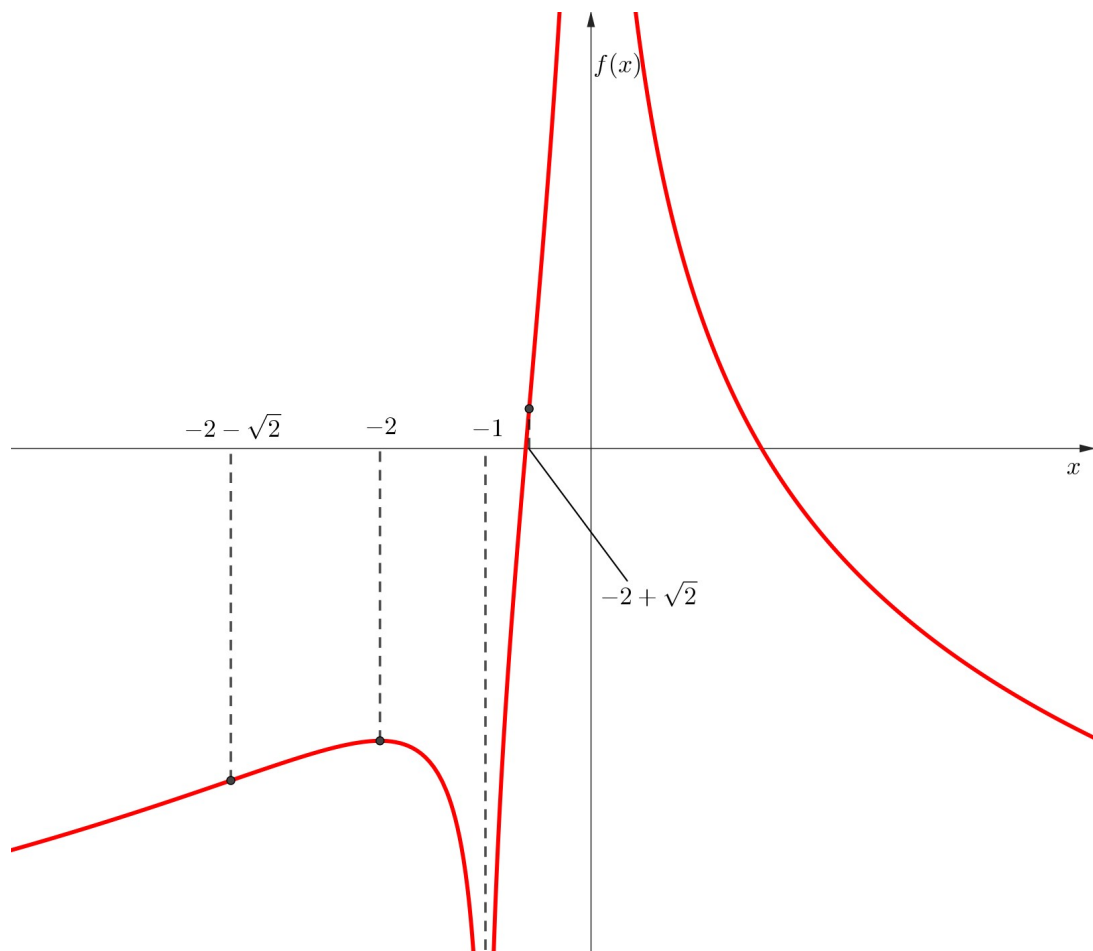
$$f''(x) = \left(\frac{2}{x+1} - \frac{4}{x} \right)' = -\frac{2}{(x+1)^2} + \frac{4}{x^2} = 2 \frac{x^2 + 4x + 2}{x^2(x+1)^2}$$

- $f''(x) = 0 \iff (x = -2 - \sqrt{2} \approx -3.4) \vee (x = -2 + \sqrt{2} \approx -0.6)$;
- $f''(x) > 0 \iff x \in (-\infty, -2 - \sqrt{2}) \cup (-2 + \sqrt{2}, 0) \cup (0, +\infty)$;

- $f''(x) < 0 \iff x \in (-2 - \sqrt{2}, -1) \cup (-1, -2 + \sqrt{2})$.

Quindi

- f è **strettamente convessa** separatamente in ciascuno dei tre intervalli $(-\infty, -2 - \sqrt{2}]$, $[-2 + \sqrt{2}, 0)$ e $(0, +\infty)$;
- f è **strettamente concava** in $[-2 - \sqrt{2}, -1)$ e (separatamente) in $(-1, -2 + \sqrt{2}]$;
- $x = -2 \pm \sqrt{2}$ sono **punti di flesso**.



Esercizio 2 - 10 febbraio 2026, fila ♣

Trovare e disegnare le soluzioni complesse delle seguenti “equazioni”:

$$(z^2 + 1)^2 - (z^2 + 1) + 1 = 0, \quad \frac{w}{i - w} \in \mathbb{R}.$$

Prima equazione: Ponendo $t = z^2 + 1$ (ma si potrebbe anche porre $s = z^2$), si ottiene un’equazione di secondo grado nella variabile t :

$$t^2 - t + 1 = 0,$$

che con l’usuale formula per l’equazione di secondo grado fornisce

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad \text{da cui} \quad z^2 = t - 1 = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

- Se $z^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, le radici sono $z_k = e^{i\frac{\pi}{3} + k\pi}$ per $k = 0, 1$:

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_1 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

- Se $z^2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, le radici sono $\tilde{z}_k = e^{-i\frac{\pi}{3} + k\pi}$ per $k = 0, 1$:

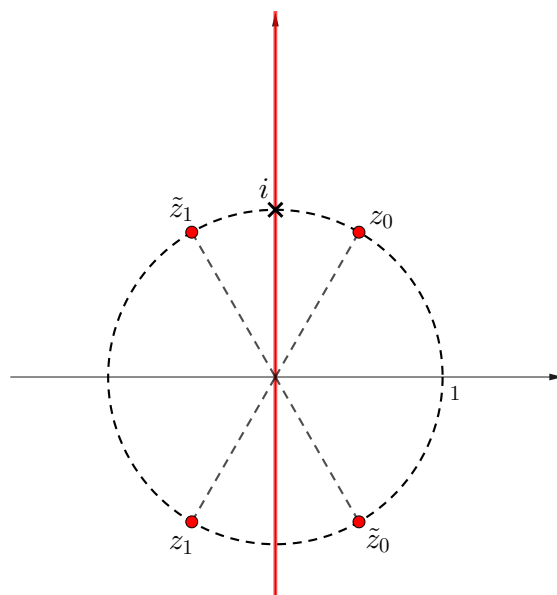
$$\tilde{z}_0 = e^{-i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \tilde{z}_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

In definitiva la prima equazione ha 4 soluzioni: $z = \pm \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$, con scelte indipendenti dei segni.

Seconda equazione: Bisogna subito imporre $w \neq i$. Ponendo $w = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{w}{i - w} = \frac{x + iy}{-x + i(1 - y)} = \frac{x + iy}{-x + i(1 - y)} \cdot \frac{-x - i(1 - y)}{-x - i(1 - y)} = \frac{-x^2 + y - y^2 - ix}{x^2 + (1 - y)^2}.$$

Poiché il denominatore è reale, l’ultima frazione scritta è reale se e solo se $x = 0$. In definitiva, le soluzioni sono tutti i numeri immaginari puri $w = yi$, escludendo $w = i$, cioè $y = 1$.



Esercizio 3 - 10 febbraio 2026, fila ♣

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale converge, e calcolarlo per $\alpha = 0$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^\alpha \operatorname{arctg} x}{(x+3)^2} dx.$$

Studio della convergenza: La funzione è continua in $[0, +\infty)$, quindi l'integrale è improprio solo per $x \rightarrow +\infty$. Poiché

$$\frac{(1+x)^\alpha \operatorname{arctg} x}{(x+3)^2} \sim \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{2-\alpha}} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

per il criterio del confronto asintotico l'integrale converge se e solo se

$$2 - \alpha > 1 \iff \alpha < 1.$$

Calcolo dell'integrale per $\alpha = 0$: Dobbiamo calcolare

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{(x+3)^2} dx.$$

Risolviamo l'integrale indefinito integrando per parti.

$$\int \frac{\arctan x}{(x+3)^2} = -\frac{\arctan x}{x+3} + \int \frac{dx}{(x+3)(1+x^2)}$$

Per l'ultimo integrale scomponiamo in fratti semplici. Si trova

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+3)(1+x^2)} dx &= \frac{1}{10} \int \frac{dx}{x+3} - \frac{1}{20} \int \frac{2x}{1+x^2} dx + \frac{3}{10} \int \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1}{10} \log|x+3| - \frac{1}{20} \log(1+x^2) + \frac{3}{10} \operatorname{arctg} x + c. \end{aligned}$$

Quindi

$$\int \frac{\arctan x}{(x+3)^2} dx = -\frac{\arctan x}{x+3} + \frac{1}{10} \log|x+3| - \frac{1}{20} \log(1+x^2) + \frac{3}{10} \arctan x + c,$$

e l'integrale improprio vale

$$\begin{aligned} I &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\arctan x}{x+3} + \frac{1}{10} \log(x+3) - \frac{1}{20} \log(1+x^2) + \frac{3}{10} \arctan x \right]_0^\omega \\ &= \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{-\frac{\arctan \omega}{\omega+3}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\frac{1}{10} \log(\omega+3) - \frac{1}{20} \log(1+\omega^2)}_{=\frac{1}{10} \log \frac{\omega+3}{\sqrt{1+\omega^2}} \rightarrow 0} + \underbrace{\frac{3}{10} \arctan \omega}_{\rightarrow \frac{3}{20} \pi} \right) - \frac{1}{10} \log 3 \\ &= \frac{3\pi - 2\log 3}{20}. \end{aligned}$$

Esercizio 4 - 10 febbraio 2026, fila ♣

Trovare, se esiste, l'ordine di infinitesimo di ciascuna delle seguenti funzioni, per $x \rightarrow 0^+$:

$$f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x} - \frac{x}{\operatorname{tg} x}, \quad g(x) = x^{\sin x} - 1.$$

Studio di $f(x)$: Si ha

$$f(x) = \frac{(\operatorname{tg} x)^2 - x^2}{x \operatorname{tg} x} \sim \frac{(\operatorname{tg} x)^2 - x^2}{x^2}.$$

Poiché $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, si ha

$$(\operatorname{tg} x)^2 = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Quindi

$$(\operatorname{tg} x)^2 - x^2 = \left(x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right) - x^2 = \frac{2}{3}x^4 + o(x^4) \sim \frac{2}{3}x^4,$$

e dunque

$$f(x) \sim \frac{\frac{2}{3}x^4}{x^2} = \frac{2}{3}x^2 \quad \text{per } x \rightarrow 0^+,$$

pertanto $f(x)$ è un infinitesimo di **ordine 2** per $x \rightarrow 0^+$.

Studio di $g(x)$: Si ha

$$g(x) = e^{\sin x \log x} - 1$$

Poiché, per $x \rightarrow 0^+$,

$$\sin x \log x \sim x \log x \rightarrow 0,$$

sfruttando lo sviluppo asintotico $e^t - 1 \sim t$ per $t \rightarrow 0$ si ha

$$g(x) \sim \sin x \log x \sim x \log x.$$

Quindi per $x \rightarrow 0^+$ $g(x)$ **non ammette un ordine di infinitesimo**: è un infinitesimo di ordine inferiore a x , ma di ordine superiore a x^α per ogni $\alpha < 1$.

Esercizio 5 - 10 febbraio 2026, fila ♣

Studiare la convergenza delle seguenti serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{k^2+4}}{k^2} \right), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sinh \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{2}{k} \right) - \frac{1}{\sqrt{k}} \right].$$

Prima serie: Si tratta di una serie a segni alterni del tipo $\sum (-1)^k a_k$, dove

$$a_k = \operatorname{arctg} \left(\underbrace{\frac{\sqrt{k^2+4}}{k^2}}_{\sim \frac{1}{k} \rightarrow 0^+} \right) \rightarrow 0^+.$$

Ricordando lo sviluppo asintotico $\operatorname{arctg} x \sim x$ per $x \rightarrow 0$,

$$a_k \sim \frac{\sqrt{k^2+4}}{k^2} \sim \frac{1}{k},$$

La serie asintotica $\sum \frac{1}{k}$ è la serie armonica, che è divergente. Di conseguenza, la serie data **non converge assolutamente**.

Poiché la serie è a segni alterni, proviamo ad applicare il criterio di Leibniz:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ (già verificata).
- Dobbiamo verificare che $a_{k+1} \leq a_k$ definitivamente. Poiché $\operatorname{arctg} x$ è crescente, basta verificare se il suo argomento è decrescente. Sia $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}$. Allora

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 8}{x^3 \sqrt{x^2+4}} < 0 \quad \text{per } x > 0.$$

Quindi $f(x)$ è decrescente per $x > 0$, e di conseguenza la successione a_k è decrescente.

La serie converge semplicemente ma non assolutamente.

Seconda serie: Poiché $\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{2}{k} \rightarrow 0$, e $\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ per $x \rightarrow 0$, si ha

$$\begin{aligned} \sinh \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{2}{k} \right) - \frac{1}{\sqrt{k}} &= \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{2}{k} \right) + \underbrace{\frac{1}{6} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{2}{k} \right)^3}_{=o(1/k)} + \underbrace{o \left(\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{2}{k} \right)^3 \right)}_{=o(1/k)} - \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \frac{2}{k} + o \left(\frac{1}{k} \right) \sim \frac{2}{k}. \end{aligned}$$

Pertanto la serie è definitivamente a termini positivi e ha lo stesso carattere della serie armonica, cioè **diverge a $+\infty$** .