

Esercizio 1

1)

a)

Ci aspettiamo che lo stato fondamentale sia uno stato con funzione d'onda spaziale corrispondente a $L_1 = L_2 = 0$ o sia

o sia $|00\rangle_1 |00\rangle_2$. Questa funzione d'onda è pari sotto scambio. Quindi per il principio di Pauli la parte di spin deve essere antisimmetrica. Quindi

$$|\Psi_{SF}\rangle = |00\rangle_1 |00\rangle_2 |00\rangle_{SS_2}$$

Dato che $L_1 = L_2 = S = 0 \Rightarrow J = 0$ e $E = 0$ indipendente da

Per calcolare il valor medio possiamo procedere in due modi

⊙ Modo diretto.

In rappresentazione di Schrödinger $\Psi_{SF} = Y_0^0(r_1) Y_0^0(r_2) |00\rangle$

Quindi

$$\langle \Psi_0 | \frac{1}{R^4} z_1^2 z_2^2 | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{R^4} \langle 00 | z_1^2 | 00 \rangle_1 \langle 00 | z_2^2 | 00 \rangle_2$$

Ora

$$\begin{aligned} \langle 00 | z^2 | 00 \rangle &= \int d\Omega |Y_0^0|^2 z^2 = R^2 \int d\cos\theta d\varphi \frac{1}{4\pi} \cos^2\theta \quad [x = \cos\theta] \\ &= R^2 \frac{1}{4\pi} 2\pi \int_{-1}^1 dx x^2 = \frac{R^2}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{R^2}{3} \end{aligned}$$

Quindi

$$\langle \Psi_0 | \frac{1}{R^4} z_1^2 z_2^2 | \Psi_0 \rangle = \frac{1}{9}$$

⊙ Indiretto: $|00\rangle$ è invariante per rotazioni

(Y_0^0 non dipende da θ, φ). Quindi

$$\langle 00 | z^2 | 00 \rangle = \langle 00 | x^2 | 00 \rangle = \langle 00 | y^2 | 00 \rangle$$

Quindi

(2)

$$\begin{aligned}\langle 00 | z^4 | 00 \rangle &= \frac{1}{3} \left(\langle 00 | (x^4 + y^4 + z^4) | 00 \rangle \right) \\ &= \frac{1}{3} R^4 \langle 00 | 00 \rangle = \frac{R^4}{3}\end{aligned}$$

da cui di nuovo $\langle \psi_0 | \frac{1}{R^4} z_1^2 z_2^2 | \psi_0 \rangle = \frac{1}{9}$

b) Cominciamo con calcolare lo spettro di $H_0 = \frac{\omega}{\hbar} (L_1^2 + L_2^2)$ non considerando lo spin

° SF $L_1 = L_2 = 0$ $E_0 = 0$ $|00\rangle_1 |00\rangle_2$ pari sotto scambio

° I ecc $\begin{cases} L_1 = 1, L_2 = 0 \\ L_1 = 0, L_2 = 1 \end{cases}$ $E = \frac{\omega}{\hbar} \cdot 2\hbar^2 = 2\hbar\omega$

una base è $\begin{cases} |1m\rangle_1 |00\rangle_2 \\ |00\rangle_1 |1m\rangle_2 \end{cases}$

una base di autofunzioni sotto scambio è

$$|1m\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1m\rangle_1 |00\rangle_2 - |00\rangle_1 |1m\rangle_2)$$

$$|1m\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1m\rangle_1 |00\rangle_2 + |00\rangle_1 |1m\rangle_2)$$

che sono rispettivamente dispari e pari sotto scambio. Sono anche autofunzioni di L^2 e L_z dove $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2$ con $L=1$

$$L^2 |1m\rangle_{A,S} = 2\hbar^2 |1m\rangle_{A,S}$$

$$L_z |1m\rangle_{A,S} = \hbar m |1m\rangle_{A,S}$$

• Il eccitato $L_1=1, L_2=1$ $E = \frac{\omega}{\hbar} 4\hbar^2 = 4\hbar\omega$ (3)

Una base è $|1 m_1\rangle_1 |1 m_2\rangle_2$ $m_1, m_2 = -1, 0, 1$

La base formata da autofunzioni dell'operatore di scambio si ottiene passando alle autofunzioni di L^2, L_z . Dato che $L_1=1, L_2=1, L=0, 1, 2$

Quindi una base è

$$|1 1 0 0\rangle \text{ simmetrica}$$

$$|1 1 1 m\rangle \text{ antisimmetrica}$$

$$|1 1 2 m\rangle \text{ simmetrica}$$

• Gli stati superiori hanno energie $\geq 6\hbar\omega$
Consideriamo ora lo spin e Pauli

(SF) $E=0$ $|00\rangle_1 |00\rangle_2 |0 0\rangle_{S S_z}$ già considerati prima
NON DEGENERE

• Stati $(L_1=0, L_2=1)$ e $(L_1=1, L_2=0)$

Gli stati possibili sono

$$|1 m\rangle_A |1 S_z\rangle \quad E = 2\hbar\omega + 6\hbar\omega = 8\hbar\omega \quad \text{deg } 3 \times 3$$

$$|1 m\rangle_S |0 0\rangle \quad E = 2\hbar\omega \quad \text{deg } 3$$

• Stati $(L_1=1, L_2=1)$

Abbiamo

$$|1 1 0 0\rangle |0 0\rangle \quad E = 4\hbar\omega$$

$$|1 1 1 m\rangle |1 S_z\rangle \quad E = 4\hbar\omega + 6\hbar\omega = 10\hbar\omega$$

$$|1 1 2 m\rangle |0 0\rangle \quad E = 4\hbar\omega$$

Quindi lo spettro (3 livelli più bassi)

④

$$E=0 \quad |00\rangle_1 |00\rangle_2 |00\rangle \quad \text{non deg.}$$

$$E=2\hbar\omega \quad |1m\rangle_s |00\rangle \quad \text{deg} = 3$$

$$E=4\hbar\omega \quad \begin{array}{l} |1100\rangle |00\rangle \\ |112m\rangle |00\rangle \end{array} \quad \text{deg} = 1+5=6$$

c) Consideriamo ora il termine in J^2 .

Per i primi tre stati considerati in b)

$S=0$, quindi gli autostati di J^2 coincidono con gli autostati di L^2

Segue

$ 00\rangle_1 00\rangle_2 00\rangle$	$L=0 \quad S=0 \Rightarrow J=0$	$E=0$
$ 1m\rangle_s 00\rangle$	$L=1 \quad S=0 \quad J=1$	$E=2\hbar\omega + 4\hbar\omega$ $= 6\hbar\omega$ ← contributi di J^2
$ 1100\rangle 00\rangle$	$L=0 \quad S=0 \quad J=0$	$E=4\hbar\omega$
$ 112m\rangle 00\rangle$	$L=2 \quad S=0 \quad J=2$	$E=4\hbar\omega + 12\hbar\omega = 16\hbar\omega$ ←

Quindi i due livelli più bassi sono

$$|00\rangle_1 |00\rangle_2 |00\rangle \quad E=0 \quad \text{non deg.}$$

$$\begin{array}{l} L_1 L_2 \quad L L_2 \quad S S_2 \\ |1100\rangle |00\rangle \end{array} \quad E=4\hbar\omega \quad \text{non deg.}$$

Non vi sono ~~contributi~~ altri stati da considerare
 Gli stati non considerati in b) hanno energie $\geq 6\hbar\omega$

1) La condizione che una misura di $L_1^2 + L_2^2$ dia sempre meno di $3\hbar^2$, implica che la parte spaziale deve essere combinazione di stati con

$$(L_1=0)(L_2=0), (L_1=1)(L_2=0), (L_1=0)(L_2=1)$$

2) Dato che è autofunzione di L^2 con autovalore $2\hbar^2$, è combinazione di stati $(L_1=0)(L_2=1)$ e $(L_1=1)(L_2=0)$. Tenuto conto del principio di Pauli, ~~non~~ è combinazione degli stati ⁰

$$|1m\rangle_A |1S_2\rangle \text{ e } |1m\rangle_S |00\rangle$$

3) Dato che è autofunzione di S^2 con autovalore $2\hbar^2$ è combinazione degli stati $|1m\rangle_A |1S_2\rangle$

4) Dato che è autofunzione di J_z con autovalore nullo $m+S_2=0$ e quindi è combinazione dei tre stati $|1m\rangle_A |1-m\rangle_S$.

5) Dato che $L_+|\psi\rangle=0$, l'unico stato rilevante ha $m=1$. Quindi

$$|\psi\rangle = |11\rangle_A |1-\frac{1}{2}\rangle_S$$

Per il calcolo dei valori medi non è necessario calcolare $\psi(t)$.

Infatti $[\vec{L}, L^2] = [\vec{L}, L^2]$ dato che L_1^2 e L_2^2 sono invarianti sotto rotazioni spaziali

$$\Downarrow$$

Quindi $[L^2, (L_1^2 + L_2^2)] = 0$

È poi ovvio che $[L^2, S^2] = 0$. Infine

$$[\vec{J}, L^2] = [\vec{L}, L^2] + [\vec{S}, L^2] = 0 \Rightarrow [J_1^2, L^2] = 0$$

$$[\vec{J}, L_1^2 + L_2^2] = [\vec{L}, L_1^2 + L_2^2] = 0 \Rightarrow [J_1^2, L_1^2 + L_2^2] = 0$$

Quindi entrambi i valori medi non dipendono da t .

$$\langle \psi(t) | L^2 | \psi(t) \rangle = \langle \psi | L^2 | \psi \rangle = 2\hbar^2 \quad [\psi \text{ è autofunzione di } L^2]$$

$$\langle \psi(\epsilon) | J^2 | \psi(\epsilon) \rangle = \langle \psi | J^2 | \psi \rangle$$

Ora (tabelle CG 1x1)

$$\begin{aligned} |1\ 1\rangle_A |1\ -1\rangle &= \sqrt{\frac{1}{6}} \overset{LS\ J\ J_z}{|1\ 1\ 2\ 0\rangle_A} \\ &+ \sqrt{\frac{1}{2}} |1\ 1\ 1\ 0\rangle_A \\ &+ \sqrt{\frac{1}{3}} |1\ 1\ 0\ 0\rangle_A \end{aligned}$$

Quindi

$$\langle \psi | J^2 | \psi \rangle = \frac{1}{6} \cdot 6\hbar^2 + \frac{1}{2} \cdot 2\hbar^2 = 2\hbar^2$$

NOTA: il cambio di base $(L^2, L_z, S^2, S_z) \rightarrow (L^2, S^2, J^2, J_z)$ dipende solo dalle proprietà "formali" del momento angolare. Il fatto che lo stato $|1\ 1\rangle_A$ sia a sua volta una combinazione lineare di autostati di (L^2, L_z, L^2, L_z) non gioca qui nessun ruolo

Nell'esercizio è essenziale, per non fare errori, definire correttamente gli stati.

Consideriamo inizialmente solo la parte spaziale.

Una base è data da $|L_1, L_{1z}\rangle |L_2, L_{2z}\rangle$ che corrisponde ad autofunzioni di $L_1^2, L_{1z}, L_2^2, L_{2z}$.

Il ket è scritto come prodotto di due ket perché i due ket operano in spazi di Hilbert diversi, il primo nello spazio di Hilbert della prima particella, il secondo nello spazio di Hilbert della seconda particella. Una maniera equivalente più precisa di scrivere lo stato è $|L_1, L_{1z}\rangle \otimes |L_2, L_{2z}\rangle$

Per risolvere il problema è più comodo cambiare base e passare alla base in cui sono diagonali L_1^2, L_2^2, L^2, L_z ossia utilizzare i ket $|L_1, L_2, L, L_z\rangle$

NOTARE CHE: • $|L_1\rangle |L_2\rangle |L, L_z\rangle$, sebbene apparentemente simile a $|L_1, L_2, L, L_z\rangle$, non ha nessun senso matematico. Il ket $|L_1\rangle$ non rappresenta nulla...

• espressioni $|L_1\rangle |L_2\rangle |L\rangle$ o semplicemente $|L\rangle$ sono errate, perché manca un numero quantico ~~fond~~, L_z .

Per applicare il principio di Pauli è necessario che gli stati siano anche autostati dell'operatore di scambio

Gli stati $|L_1 L_1 L_2\rangle$ ($L_1=L_2$) sono già autostati dell'operatore di scambio. Per il teorema dell'alternanza

$$|L_1 L_1 2L_1 L_2\rangle \text{ pari}$$

$$|L_1 L_1 (2L_1-1) L_2\rangle \text{ dispari}$$

$$|L_1 L_1 (2L_1-2) L_2\rangle \text{ pari}$$

...ecc.

Se $L_1 \neq L_2$ è necessario costruire le combinazioni simmetriche ed antisimmetriche come fatto per (1,0)

Infinè bisogna stare attenti a combinare gli stati $|L_1 L_2 L L_2\rangle$ con $|S S_2\rangle$

Espressioni $|L_1 L_2 L L_2 S S_2\rangle |J J_z\rangle$ o simili non hanno senso per due motivi

- Innanzitutto nella nuova base L_2 ed S_2 non sono diagonali e NON appaiono nel ket.

L'espressione corretta è

$$|L_1 L_2 L S J J_z\rangle$$

- (in forma più compatta come fatto nella soluzione) $|L S J J_z\rangle$

- Fattori di tipo $|L S\rangle |J J_z\rangle$,
 $|L\rangle |S\rangle |J J_z\rangle$

non hanno senso; $|L\rangle$ non è definito.

ESERCIZIO 2

(7)

(a)

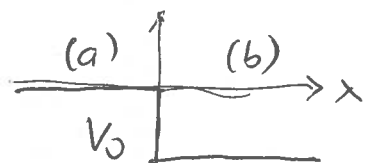
Dato che l'energia si conserva

$$\frac{p^2}{2m} = \frac{p_0^2}{2m} + V_0$$

$$V_0 = \frac{1}{2m} (p_0^2 - p^2) = \frac{1}{2mc^2} (p_0^2 c^2 - p^2 c^2)$$

$$= \frac{1}{2 \cdot 511} (900 - 100) \approx \frac{800}{1000} = 0.8 \text{ keV}$$

(b) Dobbiamo calcolare il coefficiente di trasmissione



Ia) Per $x < 0$ abbiamo una particella libera

Quindi

$$\psi = A e^{ikx} + B e^{-ikx} \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

(b) $x > 0$. L'equazione di Schrödinger è

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' - V_0 \psi = E \psi \quad \lambda = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\psi'' + \lambda^2 \psi$$

$$\psi = C e^{-\lambda x} + D e^{-i\lambda x}$$

$\uparrow L=0$ [non vi sono particelle riflesse per $x > 0$]

Calcolo delle correnti $j = \frac{\hbar}{m} \text{Im}(\psi^* \psi')$

In (a) $j = (|A|^2 - |B|^2) \frac{\hbar k}{m}$

(b) $j = |C|^2 \frac{\hbar \lambda}{m}$

Quindi

$$T = \frac{|C|^2 \frac{\hbar \lambda}{m}}{|A|^2 \frac{\hbar k}{m}} = \frac{\lambda}{k} \frac{|C|^2}{|A|^2}$$

Per determinare C/A imponiamo che ψ sia continua con derivata continua in $x=0$

$$\begin{cases} A+B=C & \text{cont. di } \psi \\ ik(A-B) = i\lambda C & \text{cont di } \psi' \end{cases}$$

$$\begin{cases} A+B=C \\ A-B = \frac{\lambda}{k} C \end{cases} \rightarrow 2A = \left(1 + \frac{\lambda}{k}\right) C \quad \frac{C}{A} = \frac{2}{1 + \frac{\lambda}{k}}$$

$$T = \frac{\lambda}{k} \frac{4}{\left(1 + \frac{\lambda}{k}\right)^2}$$

NOTA: [ovvio se teniamo conto che $\hat{p}e^{i\alpha x} = \hbar\alpha e^{i\alpha x}$]

Nel caso specifico $E = \frac{p^2}{2m} \Rightarrow \hbar k = p$
 $E = \frac{p_0^2}{2m} - V_0 \Rightarrow \hbar \lambda = p_0 \rightarrow \frac{\lambda}{k} = \frac{p_0}{p} = 3$

$$T = 3 \frac{4}{(1+3)^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow 75\% \text{ degli elettroni arrivano a } x = +\infty$$

(c)

Dalle equazioni di sopra segue $2B = C\left(1 - \frac{\lambda}{k}\right)$

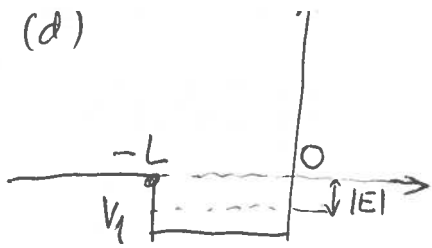
$$B = \frac{A}{2} \frac{C}{A} \left(1 - \frac{\lambda}{k}\right) = A \frac{1 - \lambda/k}{1 + \lambda/k} = A\alpha \quad \boxed{\alpha = \frac{1 - \lambda/k}{1 + \lambda/k} < 0}$$

Quindi per $x < 0$

$$\psi = A(e^{ikx} + \alpha e^{-ikx}) = A(e^{ikx} + |\alpha| e^{i\pi} e^{-ikx})$$

sfasamento = π

(d)



Stati legati sono possibili solo per $E < 0$

(a) Per $x < -L$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' = -|E| \psi$$

$$k = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$$

$$\psi'' - k^2 \psi = 0$$

$$\psi = A e^{-kx} + B e^{kx}$$

\uparrow NO $\quad \quad \quad \uparrow$ SI
 $e^{-kx} \rightarrow +\infty \quad e^{kx} \rightarrow 0$
 per $x \rightarrow -\infty$

b) $-L < x < 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi'' - V_1 \psi = -|E| \psi$$

$$\psi'' + \lambda^2 \psi = 0$$

$$\psi = C \sin \lambda x + D \cos \lambda x$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2m(V_1 - |E|)}{\hbar^2}} \quad \left[\text{NOTA: } |E| < V_1 \right]$$

Dato che $\psi(0) = 0 \Rightarrow D = 0$

$$\psi = \begin{cases} B e^{kx} & x < -L \\ C \sin \lambda x & -L < x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

Le condizioni di raccordo sono (ψ e ψ' cont. per $x = -L$)

$$\psi \text{ cont} \Rightarrow B e^{-kL} = -C \sin \lambda L$$

$$k = -\lambda \cot \lambda L$$

$$\psi' \text{ cont} \Rightarrow B k e^{-kL} = \lambda C \cos \lambda L$$

Se definiamo $\eta = kL$, $\xi = \lambda L$

$$k = -\lambda \cot \lambda L \Rightarrow \eta = -\xi \cot \xi$$

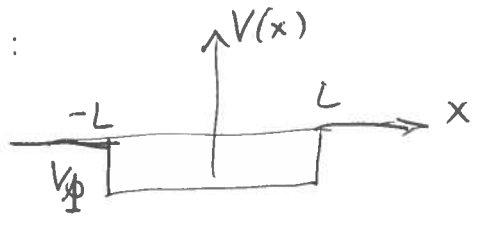
$$\eta^2 + \xi^2 = \frac{2mV_1}{\hbar^2} L^2 = R^2$$



$$\left[R^a < \frac{\pi}{2} \right]$$

Non ci sono soluzioni per $\frac{2mV_0}{\hbar^2} L^2 < \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

Si noti che questa condizione corrisponde a richiedere la non esistenza di stati dispersivi sotto parità per la buca simmetrica di larghezza $2L$:



Risultato $L < \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mV_0}}$