Esame di Meccanica Quantistica 13/02/2026

Esercizio 1. Si considerino due particelle identiche di spin 1/2, libere di muoversi su una sfera di raggio R, che interagiscono con Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{\hbar}(aJ^2 + L_1^2 + L_2^2 + 3S^2),$$

dove $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$; i pedici 1 e 2 si riferiscono alle due particelle. a è una costante reale non negativa.

a) Si calcoli l'energia del livello fondamentale di H, il corrispondente autostato $|\Psi_0\rangle$ e il valor medio $\langle \Psi_0 \,| \frac{1}{R^4} z_1^2 z_2^2 |\Psi_0\rangle$, dove z_1 e z_2 indicano la componente z della posizione delle due particelle. Il risultato dipende dal parametro a?

b) Si calcolino le energie e le degenerazioni dei primi tre livelli della Hamiltoniana H per $a = 0$.

c) Si calcolino le energie e le degenerazioni dei primi due livelli della Hamiltoniana H per $a = 2$.

d) Si consideri lo stato $|\Psi\rangle$ che soddisfa le seguenti proprietà: una misura di $L_1^2 + L_2^2$ fornisce sempre un risultato inferiore a $3\hbar^2$; è autostato di L^2 ed S^2 con autovalore $2\hbar^2$; è autostato di J_z con autovalore nullo; $L_+|\Psi\rangle = 0$. Se $|\Psi(t)\rangle$ è l'evoluto temporale di $|\Psi\rangle$ si calcolino i valori medi $\langle \Psi(t) \,| L^2 |\Psi(t)\rangle$ e $\langle \Psi(t) \,| J^2 |\Psi(t)\rangle$. Si assuma solo $a > 0$.

Esercizio 2. Una sorgente posta a $x = -\infty$ emette un fascio monocromatico di elettroni che incide sul potenziale unidimensionale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ -V_0 & \text{per } x > 0\,, \end{cases}$$

con $V_0 > 0$. La preparazione dello stato iniziale è tale per cui la descrizione del processo di scattering può essere ricavata a partire dalle autofunzioni dell'Hamiltoniana.

a) Si calcoli il valore di V_0 sapendo che, se l'impulso degli elettroni incidenti è pari a $p = 10\,\mathrm{keV}/c$, gli elettroni osservati da un rivelatore posto a $x = +\infty$ hanno impulso $p_0 = 30\,\mathrm{keV}/c$ (c è la velocità della luce).

b) Si calcoli la frazione degli elettroni emessi dalla sorgente che ci si aspetta di osservare nel rivelatore a $x = +\infty$. Si riporti il valore numerico con i dati del punto a).

c) Si determini lo sfasamento (ovvero la differenza di fase) tra onda riflessa e onda incidente.

Si consideri ora il potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -L \\ -V_1 & \text{per } -L < x < 0 \\ +\infty & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

con $V_1 > 0$ dato.

d) Si calcoli l'intervallo di valori di L ($L > 0$) per cui il sistema non ammette stati legati.