

Nome:

Cognome:

AVVERTENZE: La valutazione degli esercizi aperti dipende dalla solidità dei ragionamenti svolti e dalla chiarezza dell'esposizione, come anche dalla correttezza dei passaggi matematici e del risultato finale.

ex.1

ex.2

ex.3

ex.4

tot.

ESERCIZIO 1 Dati $B = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq 2\}$ e $f: B \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$:

- (2 punti) si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto B ,
- (3 punti) si calcoli l'equazione dell'iperpiano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, 0, 2)$,
- (3 punti) si provi che una funzione di classe C^2 avente laplaciano negativo non può possedere punti di minimo locale interni al suo dominio di definizione.

ESERCIZIO 2 Dato il problema di Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} u'(x) = a(x)e^{-u(x)} \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad a \in C^1(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$$

- (2 punti) si spieghi perché esiste un'unica soluzione locale di $(*)$,
- (2 punti) si provi che se $a(x)x \geq 0$, per ogni x , allora la soluzione è globale,
- (2 punti) si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 con centro $x_0 = 0$ della soluzione di $(*)$ per $a(x) = 1$,
- (2 punti) si calcoli esplicitamente la soluzione quando $a(x) = x^k$, con $k \in \mathbb{N}$, e si determini il dominio della soluzione.

ESERCIZIO 3 Data la 1-forma differenziale

$$\omega = a_1(x_2 + x_3)dx_1 + a_2(x_1 - x_3)dx_2 + a_3(x_1 - x_2)dx_3 \quad \text{con } a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

- (3 punti) si calcoli la circuitazione di ω lungo la curva $x(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), \sin(2\pi s))$, $s \in [0, 1]$,
- (2 punti) per quali vettori a risulta la forma ω esatta?
- (3 punti) Si calcoli, quando possibile, una primitiva della 1-forma.

ESERCIZIO 4 Dati il dominio E e il campo vettoriale $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ di equazioni

$$E = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{8}x_3^2 \leq 1 \right\} \quad \text{e} \quad F(x) = Mx \quad \text{con } M \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

- (2 punti) si spieghi perché E è chiuso e limitato,
- (2 punti) si calcoli la misura di E ,
- (2 punti) si calcoli il flusso di F uscente da E .

ESERCIZIO 1 Dati $B = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \|x\|_2 \leq 2\}$ e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$:

i. (2 punti) si spieghi perché tale funzione è differenziabile in tutto B ,

ii. (3 punti) si calcoli l'equazione dell'iperpiano tangente al grafico di f nel punto $(1, 1, 0, 2)$,

iii. (3 punti) si provi che una funzione di classe C^2 avente laplaciano negativo non può possedere punti di minimo locale interni al suo dominio di definizione.

SVOLGIMENTO. i. Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice differenziabile in un punto p se esiste un vettore $L = L(p)$ tale che la differenza tra la funzione e la funzione affine $T_p(x) = f(p) + L \cdot (x - p)$ sia un infinitesimo di ordine superiore rispetto alla distanza $\|x - p\|_2$, cioè se vale che

$$\frac{f(x) - [f(p) + L \cdot (x - p)]}{\|x - p\|_2} = o(\|x - p\|_2)$$

Il teorema del Differenziale Totale, prova che una condizione sufficiente per la differenziabilità è che le derivate parziali esistano e siano continue in un intorno del punto interessato e mostra che $L(p) = \nabla f(p)$. Le derivate parziali di f sono:

$$\partial_1 f(x) = -2x_1 \quad \partial_2 f(x) = -2x_2 \quad \partial_3 f(x) = -2x_3$$

e poiché queste funzioni sono polinomi di primo grado, pertanto funzioni continue in tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$, segue che $f \in C^1(B)$, pertanto la funzione è differenziabile in ogni punto di B .

ii. L'iperpiano tangente al grafico di f nel punto $(p, f(p))$ è il grafico della funzione affine che "meglio approssima" il grafico della funzione f , quindi la sua equazione è

$$x_4 = f(p) + \nabla f(p) \cdot (x - p)$$

Il punto dato è $(1, 1, 0, 2)$ e poiché il gradiente in $p = (1, 1, 0)$ è $\nabla f(1, 1, 0) = (-2(1), -2(1), -2(0)) = (-2, -2, 0)$, quindi l'equazione dell'iperpiano risulta

$$x_4 = 2 + [(-2)(x_1 - 1) + (-2)(x_2 - 1) + (0)(x_3 - 0)] = 6 - 2x_1 - 2x_2$$

iii. Ricordiamo che il laplaciano della funzione f , Δf , è definito come la traccia della matrice Hessiana, ovvero la somma delle derivate parziali seconde pure

$$\Delta f(x) := \text{Tr}[Hf(x)] = \text{Tr} \begin{pmatrix} \partial_{11}f(x) & \dots & \partial_{1n}f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{n1}f(x) & \dots & \partial_{nn}f(x) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \partial_{jj}f(x) = \partial_{11}f(x) + \dots + \partial_{nn}f(x)$$

Per la condizione necessaria sulle derivate del secondo ordine, se m è un punto di minimo locale interno per una funzione di classe C^2 , allora la matrice Hessiana $Hf(m)$ deve essere semidefinita positiva, cioè $Hf(m)w \cdot w \geq 0$ per ogni $w \in \mathbb{R}^n$, allora possiamo dedurre il segno delle derivate seconde pure, infatti vale:

$$Hf(m)e_j \cdot e_j = [Hf(m)]_{jj} = \partial_{jj}f(m) \geq 0 \quad \text{per ogni } j = 1, \dots, n$$

La disuguaglianza ottenuta implica che $\Delta f(m) = \partial_{11}f(m) + \dots + \partial_{nn}f(m) \geq 0$ per cui non è possibile che funzioni aventi laplaciano negativo possiedano punti di minimo interni.

In alternativa è possibile ragionare nel seguente modo: se m è un punto di minimo locale interno per una funzione f di classe C^2 allora possiamo affermare che gli autovalori (reali perché Hf è una matrice simmetrica se $f \in C^2$) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ della matrice $Hf(m)$ devono essere tutti non negativi, visto che $Hf(m)$ è semidefinita positiva. Dai corsi di algebra lineare sappiamo che la traccia di una matrice è pari alla somma dei suoi autovalori, pertanto: $\Delta f(m) = \text{Tr}[Hf(m)] = \sum_{i=1}^n \lambda_i \geq 0$. Questo contraddice l'ipotesi $\Delta f(m) < 0$, di conseguenza, una funzione con Laplaciano negativo non può ammettere punti di minimo locale interni.

Concludiamo osservando che, per la funzione $f(x) = 4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$, la matrice Hessiana è:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui ricaviamo $\Delta f(x) = -2 - 2 - 2 = -6 < 0$, quindi la funzione non può possedere minimi locali interni, coerentemente con quanto provato in iii. $\square$

ESERCIZIO 2 Dato il problema di Cauchy

$$(*) \quad \begin{cases} u'(x) = a(x)e^{-u(x)} \\ u(0) = 0 \end{cases} \quad a \in C^1(\mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$$

- i. (2 punti) si spieghi perché esiste un'unica soluzione locale di (*),
- ii. (2 punti) si provi che se $a(x)x \geq 0$, per ogni x , allora la soluzione è globale,
- iii. (2 punti) si scriva il polinomio di Taylor di ordine 2 con centro $x_0 = 0$ della soluzione di (*) per $a(x) = 1$,
- iv. (2 punti) si calcoli esplicitamente la soluzione quando $a(x) = x^k$, con $k \in \mathbb{N}$, e si determini il dominio della soluzione.

SVOLGIMENTO. i. Data un'equazione differenziale in forma normale $u'(x) = f(x, u(x))$, sappiamo (per il teorema di Picard e Lindelöf) che se la funzione f è continua e localmente lipschitziana nella seconda variabile, allora esiste un'unica soluzione locale del problema di Cauchy. Osservando che $\partial_2 f(x, u) = -a(x)e^{-u} \in C^1(\mathbb{R}^2)$, per il teorema di Lagrange, possiamo affermare che f è localmente lipschitziana nella seconda variabile, ricavando l'esistenza e l'unicità di una soluzione locale di (*).

ii. Una soluzione locale può essere prolungata globalmente se non "esplode" in tempo finito (blow-up) e se il suo grafico non "raggiunge" ∂A la frontiera dell'aperto dove è definita f . Nel nostro caso $A = \mathbb{R}^2$, quindi la soluzione di (*) è globale se rimane limitata su ogni intervallo compatto.

L'equazione è a variabili separabili per cui $e^{u(x)}u'(x) = a(x)$ e integrando tra 0 e x otteniamo

$$\int_0^{u(x)} e^s ds = \int_0^x a(t) dt \quad \text{da cui} \quad e^{u(x)} - 1 = \int_0^x a(t) dt \quad \text{cioè} \quad u(x) = \ln \left(1 + \int_0^x a(t) dt \right)$$

Affinché la soluzione esista e sia globale, l'argomento del logaritmo deve essere strettamente positivo, cioè $\left[1 + \int_0^x a(t) dt \right] > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. L'ipotesi che $a(x)x \geq 0$ (per ogni $x \in \mathbb{R}$) significa che per $x > 0$, l'integrale $\int_0^x a(t) dt \geq 0$ perché l'integranda è non negativa. Mentre per $x < 0$ abbiamo che $\int_0^x a(t) dt = - \int_x^0 a(t) dt$, e poiché per $t \in [x, 0]$ si ha $t \leq 0$, allora $a(t) \leq 0$. Siccome l'integrale di una funzione negativa su un intervallo positivo è negativo, a causa del segno meno, otteniamo un valore non negativo. In entrambi i casi risulta che

$$\int_0^x a(t) dt \geq 0 \quad \text{ovvero} \quad 1 + \int_0^x a(t) dt \geq 1 > 0 \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

La soluzione è dunque definita per ogni x .

iii. Il polinomio di Taylor di ordine 2 della funzione u in $x_0 = 0$ è $T_{2,u,0}(x) = T_2(x) = u(0) + u'(0)x + u''(0)x^2/2$. Sapendo che $a(x) \equiv 1$ l'equazione differenziale si riduce a $u'(x) = e^{-u(x)}$, allora abbiamo che

$$u(0) = 0 \quad u'(0) = a(0)e^{-u(0)} = 1 \cdot e^0 = 1 \quad \text{e} \quad u''(0) = -1 \cdot e^{-0} = -1$$

visto che $u''(x) = (u'(x))' = (e^{-u(x)})' = -u'(x)e^{-u(x)}$

e otteniamo il polinomio $T_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$.

iv. Sia $a(x) = x^k$, Integrando come già fatto al punto ii. abbiamo

$$e^{u(x)} - 1 = \int_0^x t^k dt = \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad \text{ed esplicitando} \quad u(x) = \ln \left(1 + \frac{x^{k+1}}{k+1} \right)$$

Il dominio è dato dalla condizione $1 + x^{k+1}/(k+1) > 0$, ovvero $x^{k+1} > -(k+1)$: se k è dispari, allora $k+1$ è pari e $x^{k+1} \geq 0$ sempre, quindi $x^{k+1} > -(k+1)$ è sempre verificata e il dominio $\text{dom}(u) = \mathbb{R}$, invece se k è pari, allora $k+1$ è dispari e la condizione può essere riscritta come $x > \sqrt[k+1]{-(k+1)}$, da cui ricaviamo $\text{dom}(u) = \left(-\sqrt[k+1]{k+1}, +\infty \right)$. $\square$

ESERCIZIO 3 Data la 1-forma differenziale

$$\omega = a_1(x_2 + x_3)dx_1 + a_2(x_1 - x_3)dx_2 + a_3(x_1 - x_2)dx_3 \quad \text{con } a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$$

- i. (3 punti) si calcoli la circuitazione di ω lungo la curva $x(s) = (\cos(2\pi s), \sin(2\pi s), \sin(2\pi s))$, $s \in [0, 1]$,
- ii. (2 punti) per quali vettori a risulta la forma ω esatta?
- iii. (3 punti) Si calcoli, quando possibile, una primitiva della 1-forma.

SVOLGIMENTO. i. Ricordando la definizione di circuitazione come integrale di una 1-forma differenziale lungo una curva regolare (a tratti) chiusa abbiamo che

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \omega &= \int_0^1 \left[a_1(\sin(2\pi s) + \sin(2\pi s))(-2\pi \sin(2\pi s)) + a_2(\cos(2\pi s) - \sin(2\pi s))(2\pi \cos(2\pi s)) \right. \\ &\quad \left. + a_3(\cos(2\pi s) - \sin(2\pi s))(2\pi \cos(2\pi s)) \right] ds \\ &= 2\pi \int_0^1 \left[-2a_1 \sin^2(2\pi s) + (a_2 + a_3)(\cos^2(2\pi s) - \sin(2\pi s)\cos(2\pi s)) \right] ds \\ &= -2a_1\pi + (a_2 + a_3)\pi = \pi(a_2 + a_3 - 2a_1) \end{aligned}$$

visto che valgono i seguenti risultati per gli integrali di funzioni trigonometriche su un periodo:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = \pi \quad \text{e} \quad \int_0^{2\pi} \sin t \cos t dt = 0$$

ii. La forma è esatta in $\mathbb{R}^3$ se e solo se è chiusa, in quanto lo spazio è un aperto connesso e semplicemente connesso, visto che (in particolare) è un dominio convesso. Imponiamo le relazioni sulle derivate dei coefficienti della nostra 1-forma che la rendono chiusa:

$$\begin{aligned} \partial_2 a_1(x_2 + x_3) &= a_1 & \text{e} & \quad \partial_1 a_2(x_1 - x_3) = a_2 & \text{da cui} & \quad a_1 = a_2 \\ \partial_3 a_1(x_2 + x_3) &= a_1 & \text{e} & \quad \partial_1 a_3(x_1 - x_2) = a_3 & \text{da cui} & \quad a_1 = a_3 \\ \partial_3 a_2(x_1 - x_3) &= -a_2 & \text{e} & \quad \partial_2 a_3(x_1 - x_2) = -a_3 & \text{da cui} & \quad -a_2 = -a_3 \end{aligned}$$

Dalle precedenti uguaglianze ricaviamo $a_1 = a_2$, $a_1 = a_3$ e $a_2 = a_3$, dunque ω è esatta se e solo se $a_1 = a_2 = a_3 = a$, con $a \in \mathbb{R}$.

iii. Poniamo $a_1 = a_2 = a_3 = k$, allora la forma diventa $\omega = k(x_2 + x_3)dx_1 + k(x_1 - x_3)dx_2 + k(x_1 - x_2)dx_3$. Cerchiamo $U \in C^2(\mathbb{R}^3)$ tale che

$$\partial_1 U(x) = k(x_2 + x_3) \quad \text{quindi} \quad U(x_1, x_2, x_3) = k(x_1 x_2 + x_1 x_3) + g(x_2, x_3)$$

Deriviamo rispetto a x_2 in modo da ottenere la seguente relazione

$$\partial_2 U(x) = kx_1 + \partial_2 g(x) = k(x_1 - x_3)$$

che ci permette di dedurre che

$$\partial_2 g(x) = -kx_3 \quad \text{da cui} \quad g(x_2, x_3) = -kx_2 x_3 + h(x_3)$$

Quindi $U(x) = k(x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_2 x_3) + h(x_3)$ e derivando rispetto a x_3 otteniamo:

$$\partial_3 U(x) = kx_1 - kx_2 + h'(x_3) = k(x_1 - x_2) \quad \text{che significa} \quad h'(x_3) = 0$$

In conclusione abbiamo che le primitive di ω sono $U(x) = k(x_1 x_2 + x_1 x_3 - x_2 x_3) + C$, con $C \in \mathbb{R}$. $\square$

ESERCIZIO 4 Dati il dominio E e il campo vettoriale $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ di equazioni

$$E = \left\{ x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{8}x_3^2 \leq 1 \right\} \quad \text{e} \quad F(x) = Mx \quad \text{con } M \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

- i. (2 punti) si spieghi perché E è chiuso e limitato,
- ii. (2 punti) si calcoli la misura di E ,
- iii. (2 punti) si calcoli il flusso di F uscente da E .

SVOLGIMENTO. i. Come visto a lezione provare che E è chiuso è immediato in quanto controimmagine di un sottoinsieme chiuso della retta reale, infatti vale che $E = \{x \in \mathbb{R}^3 : g(x) \leq 1\} = g^{-1}((-\infty, 0])$ con $g \in C^0(\mathbb{R}^3)$. Per poter concludere che E è anche limitato basta osservare che

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x_1^2 &\leq \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{8}x_3^2 \leq 1 & \text{quindi} & \quad |x_1| \leq \sqrt{2} \\ \frac{1}{4}x_2^2 &\leq \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{8}x_3^2 \leq 1 & \text{quindi} & \quad |x_2| \leq 2 \\ \frac{1}{8}x_3^2 &\leq \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{8}x_3^2 \leq 1 & \text{quindi} & \quad |x_3| \leq 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

e dalle precedenti relazioni segue che $E \subseteq [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \times [-2, 2] \times [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.

ii. Per calcolare la misura di E possiamo utilizzare il teorema del cambiamento delle variabili negli integrali nel seguente modo

$$m_3(E) = \int_E dx_1 dx_2 dx_3 = \int_B |\det[J\phi](y)| dy_1 dy_2 dy_3 = 8m_3(B) = \frac{32}{3}\pi$$

dove $B = B(0, 1) = \{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \leq 1\}$ è la palla di raggio unitario dello spazio e $x = \phi(y)$ è un diffeomorfismo (in particolare è una funzione lineare globalmente invertibile e regolare) di $\mathbb{R}^3$ in sé la cui espressione è $\phi(y) = (\sqrt{2}y_1, 2y_2, 2\sqrt{2}y_3)$, ed è facile verificare che $\phi(B) = E$. La strategia appena discussa può essere generalizzata per ottenere una formula per il volume di un ellissoide, dette a, b e c le lunghezze dei semiassi di un generico ellissoide il precedente calcolo prova che

$$E_{a,b,c} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} \leq 1 \right\} \quad \text{e} \quad m_3(E_{a,b,c}) = \frac{4}{3}\pi abc$$

Il nostro E è un ellissoide con $a = \sqrt{2}$, $b = 2$ e $c = 2\sqrt{2}$.

iii. Poiché E è un solido con frontiera regolare possiamo utilizzare il teorema della divergenza per il calcolo del flusso del campo F uscente da E . Osserviamo che

$$\begin{aligned} F(x) &= Mx = (m_{11}x_1 + m_{12}x_2 + m_{13}x_3, m_{21}x_1 + m_{22}x_2 + m_{23}x_3, m_{31}x_1 + m_{32}x_2 + m_{33}x_3) \\ \text{da cui} \quad \operatorname{div}[F](x) &= \nabla \cdot F(x) = (m_{11} + m_{22} + m_{33}) = \operatorname{tr}(M) \end{aligned}$$

e il calcolo precedente implica che

$$\Phi_{\partial E}(F) = \int_{\partial E} F(x) \cdot nd\sigma = \int_E \operatorname{div}[F](x) dx = \operatorname{tr}(M) \cdot m_3(E) = \frac{32}{3} (m_{11} + m_{22} + m_{33}) \pi$$