Esame di Meccanica Quantistica 28/01/2026

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m e spin $1/2$, vincolata a muoversi in una dimensione, la cui dinamica è governata dalla seguente Hamiltoniana:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \hbar\omega \left[\frac{1}{2}\rho^2 \left(\frac{S_z}{\hbar} + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2}(\rho^6 - 2\rho^4 - 4\rho^2) \left(-\frac{S_z}{\hbar} + \frac{1}{2} \right) \right]$$

con $\rho = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$.

a) Studiare qualitativamente lo spettro di H, indicando gli intervalli di energia dove lo spettro è continuo o discreto e la natura delle autofunzioni (se esse corrispondono a stati di scattering o a stati legati).

b) Si consideri lo stato normalizzato $|\varphi_-\rangle$ definito come segue:

$$\langle \rho | \varphi_- \rangle = \varphi(\rho) | - \rangle \,, \qquad \varphi(\rho) = \mathcal{N}_- \, \rho \exp\left(-\frac{\rho^4}{4} - b\frac{\rho^2}{2} \right) \,,$$

dove $\mathcal{N}_-$ è una costante di normalizzazione tale che $\langle \varphi_- | \varphi_- \rangle = 1$ e $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$. Si determini per quale valore del parametro b lo stato $|\varphi_-\rangle$ è autostato di H e si determini il corrispondente autovalore dell'energia.
Per il resto del problema si assuma che $|\varphi_-\rangle$ sia autostato di H.

c) Si consideri lo stato normalizzato $|\psi\rangle$ definito come segue:

$$\langle \rho | \psi \rangle = \mathcal{N}_+ \, \rho^2 e^{-\rho^2/2} | + \rangle + \frac{\varphi(\rho)}{\sqrt{2}} | - \rangle \,, \tag{1}$$

dove $\mathcal{N}_+ > 0$ è una costante di normalizzazione. Se si effettua una misura di H, che valori si possono ottenere e con quali probabilità?

d) Si calcoli $\langle \psi | S_x | \psi \rangle$.

Esercizio 2. Un sistema di due particelle identiche di spin $1/2$ è descritto, nel riferimento del centro di massa e utilizzando coordinate sferiche, dalla seguente funzione d'onda normalizzata:

$$\psi(r, \theta, \phi) = f(r, \theta, \phi)|+\rangle|-\rangle + g(r, \theta, \phi)|-\rangle|+\rangle \,,$$

dove $|\pm\rangle$ sono autoket della componente z dello spin di singola particella. Si ha

$$f(r, \theta, \phi) = \frac{e^{-r/r_0}}{\sqrt{4\pi r_0^3}} \left(1 + A\frac{r}{r_0} \sin\theta e^{i\phi} \right) \,,$$

dove r_0 è una lunghezza nota, mentre A è un parametro reale positivo.

1) Si determinino la funzione $g(r, \theta, \phi)$ e la costante A.

2) Si calcoli la probabilità che una misura del momento angolare totale J^2 dia come risultato $6\hbar^2$.

3) La Hamiltoniana del sistema, nel riferimento del centro di massa, è

$$H = \frac{p^2}{2\mu} - \frac{\hbar^2}{\mu r_0} \frac{1}{r} + 2\beta(\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{S} + L^2)\,,$$

dove $\boldsymbol{S}$ è lo spin totale, μ è la massa ridotta del sistema e β è una costante positiva, $\mu r_0^2 \beta \ll 1$.
Si determinino i primi 4 livelli energetici, le relative degenerazioni e i corrispondenti autoket di H.

4) Si calcoli la probabilità che una misura di energia sullo stato ψ dia come risultato il valore del secondo livello eccitato (terzo livello) di H.