

Nome:

Cognome:

ISTRUZIONI:

È necessario argomentare lo svolgimento dell'esercizio aperto e le risposte dei quiz. La valutazione è legata alla solidità dei ragionamenti svolti e alla chiarezza dell'esposizione, come anche alla correttezza dei passaggi matematici e del risultato finale.

ex.1	
ex.2	
ex.3	
tot.	

ESERCIZIO 1 (3+4 PUNTI) *i. Si calcoli il flusso del campo F uscente da D , dove*

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\} \quad \text{con } R > 0$$

$$\text{e} \quad F(x) = \frac{1}{2} (x_1 x_3, x_2 x_3, x_1 x_2)$$

ii. Si calcoli il flusso uscente dalla porzione di frontiera $\partial D \cap \{x_1 = 0\}$.

ESERCIZIO 2 (3+4 PUNTI) *Data 1-forma differenziale $\omega = A(x)dx_1 + x_1 dx_2 + x_3 dx_3$ con $A \in C^1(\mathbb{R}^3)$*

i. si determini la generica espressione di A tale che ω risulti chiusa,

ii. supponendo $\partial_1 A(x) = 1$ e $A(0) = 1$ nell'espressione ottenuta in i, si calcoli la circuitazione di ω lungo γ sostegno della curva regolare $x(t) = H(\cos(t), \sin(t))$, dove $t \in [0, 2\pi]$ e $H > 0$.

ESERCIZIO 3 (3+3+3 PUNTI) *Dato il seguente problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u'(t) = t \sin^4(u(t)) \\ u(0) = c \end{cases} \quad c \in (0, \pi)$$

i. si spieghi perché esiste un'unica soluzione,

ii. si provi che la soluzione è limitata e globale,

iii. si dimostri che la soluzione è pari.

ESERCIZIO 1 (3+4 PUNTI) i. Si calcoli il flusso del campo F uscente da D , dove

$$D = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\} \quad \text{con } R > 0$$

$$\text{e} \quad F(x) = \frac{1}{2} (x_1 x_3, x_2 x_3, x_1 x_2)$$

ii. Si calcoli il flusso uscente dalla porzione di frontiera $\partial D \cap \{x_1 = 0\}$.

SVOLGIMENTO. Cominciamo osservando che D è la parte della palla chiusa centrata in O di raggio R contenuta nel primo ottante dello spazio, cioè $D = \overline{B(O, R)} \cap \{x_1, x_2, x_3 \geq 0\}$. Per calcolare il flusso uscente da D del campo vettoriale $F(x)$ possiamo procedere in due modi: o utilizzando il teorema della divergenza (di Gauss) o calcolando direttamente gli integrali di superficie.

Il teorema di Gauss prova che il flusso attraverso la superficie chiusa ∂D è uguale all'integrale della divergenza sul volume D , a patto che $F \in C^1(A, \mathbb{R}^3)$ e che $D \subseteq A$ abbia frontiera composta da un numero finito di superfici regolari, in formule:

$$\Phi_{\partial D}(F) = \iint_{\partial D} [F(x) \cdot N] d\sigma = \iiint_D \operatorname{div}[F](x) dx$$

Osserviamo subito che

$$\operatorname{div}[F] = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3 = \frac{1}{2} (x_3 + x_3 + 0) = x_3$$

e risolviamo l'integrale di volume (triplo). Possiamo svolgere il calcolo più agevolmente usando le coordinate sferiche o cilindriche, in modo da approfittare della simmetria del dominio di integrazione. Ricordiamo che

$$\begin{cases} x_1 = \rho \sin(\phi) \cos(\theta) \\ x_2 = \rho \sin(\phi) \sin(\theta) \\ x_3 = \rho \cos(\phi) \end{cases} \quad \text{e che} \quad |\det(J)| = \rho^2 \sin(\phi)$$

e poiché D è l'intersezione del primo ottante con la palla di raggio R abbiamo che $\tilde{D} = \{(\rho, \theta, \phi) \in [0, R] \times [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]\}$, dove $\tilde{D}$ è la parametrizzazione di D nello spazio dotato di coordinate sferiche. A questo punto l'integrale può essere risolto nel seguente modo

$$\begin{aligned} \Phi_{\partial D}(F) &= \iiint_D x_3 dx = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \left[\int_0^R \rho \cos(\phi) \cdot \rho^2 \sin(\phi) d\rho \right] d\phi \right] d\theta \\ &= \left[\int_0^{\pi/2} d\theta \right] \left[\int_0^{\pi/2} \sin(\phi) \cos(\phi) d\phi \right] \left[\int_0^R \rho^3 d\rho \right] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi}{16} R^4 \end{aligned}$$

dove abbiamo sfruttato che in coordinate sferiche D è un parallelepipedo, quindi l'integrale triplo si riduce ad un prodotto di tre integrali unidimensionali.

Volendo ricorrere alle coordinate sferiche abbiamo che

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos(\theta) \\ x_2 = \rho \sin(\theta) \\ x_3 = z \end{cases} \quad \text{e anche} \quad |\det(J)| = \rho$$

notando che $\tilde{D} = \{(\rho, \theta, z) \in [0, R] \times [0, \pi/2] \times [0, [R^2 - \rho^2]^{1/2}]\}$, l'integrale diventa

$$\begin{aligned} \Phi_{\partial D}(F) &= \iiint_D x_3 dx = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^R \left[\int_0^{[R^2 - \rho^2]^{1/2}} z \rho dz \right] d\rho \right] d\theta \\ &= \left[\int_0^{\pi/2} d\theta \right] \left[\int_0^R \left[\int_0^{[R^2 - \rho^2]^{1/2}} z \rho dz \right] d\rho \right] = \frac{\pi}{2} \left[\int_0^R \frac{1}{2} \rho [R^2 - \rho^2] d\rho \right] = \frac{\pi}{2} \left[\frac{1}{4} R^4 - \frac{1}{8} R^4 \right] = \frac{\pi}{16} R^4 \end{aligned}$$

Proviamo a ripetere lo svolgimento utilizzando integrali di superficie per calcolare direttamente i contributi al flusso dati dalle quattro superfici che compongono la frontiera. ∂D è composta da 4 superfici: S_3 (il fondo del solido, cioè $\partial D \cap \{x_3 = 0\}$), S_1 (la faccia laterale $\partial D \cap \{x_1 = 0\}$), S_2 (la faccia laterale $\partial D \cap \{x_2 = 0\}$) e S_4 , cioè la calotta sferica $\partial D \subseteq \partial B(O, R)$.

$$\Phi_{\partial D}(F) = \Phi_{S_1}(F) + \Phi_{S_2}(F) + \Phi_{S_3}(F) + \Phi_{S_4}(F)$$

Andiamo per ordine, notando subito che $\Phi_{S_2}(F) = \Phi_{S_1}(F) = 0$. Infatti

$$\text{su } S_1 \text{ vale: } N = -e_1 \quad \text{e} \quad F(O, x_2, x_3) = \frac{1}{2}(O, x_2 x_3, O)$$

$$\text{su } S_2 \text{ abbiamo: } N = -e_2 \quad \text{e} \quad F(x_1, O, x_3) = \frac{1}{2}(x_1 x_3, O, O)$$

ed in entrambi i casi i vettori sono perpendicolari tra di loro e quindi il flusso attraverso la superficie è nullo. Riguardo a S_3 notiamo che la normale uscente è il vettore $N = -e_3$ mentre il campo $F(x_1, x_2, O) = (O, O, x_1 x_2)$, per cui risulta che $F \cdot N = -x_1 x_2$. Per calcolare l'integrale di flusso ricorriamo alle coordinate polari, cioè parametrizziamo S_3 usando le coordinate polari del piano $x_1 x_2$.

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\theta) \\ x_2 = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \text{ricordando che } (r, \theta) \in [0, R] \times [0, \pi/2] \quad \text{e} \quad |\det(J)| = r$$

da cui ricaviamo che

$$\begin{aligned} \Phi_{S_1}(F) &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \int_0^R -r \cos(\theta) \cdot r \sin(\theta) \cdot r dr d\theta = -\frac{1}{2} \left[\int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \right] \cdot \left[\int_0^R r^3 dr \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin(2\theta) d\theta \right] \cdot \frac{1}{4} R^4 = -\frac{1}{16} R^4 \end{aligned}$$

Per il calcolo dell'ultimo integrale utilizziamo la parametrizzazione della sfera di raggio R che si ottiene fissando $\rho = R$ nelle coordinate sferiche dello spazio. Si ricordi che

$$N = \frac{x}{R} \quad d\sigma = R^2 \sin(\phi) d\phi d\theta \quad \text{e che} \quad (\phi, \theta) \in [0, \pi/2]^2$$

e poiché vale che $F \cdot N = \left[\frac{x_3}{2R} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{x_1 x_2 x_3}{2R} \right]$ l'integrale di flusso diventa

$$\Phi_{S_4}(F) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \left[R^2 \sin^2(\phi) \cos(\phi) (1 + \sin(\theta) \cos(\theta)) \right] R^2 \sin(\phi) d\phi \right] d\theta$$

Essendo il dominio di integrazione un rettangolo si ottiene che

$$\Phi_{S_4} = \frac{R^4}{2} \left[\int_0^{\pi/2} (1 + \sin(\theta) \cos(\theta)) d\theta \right] \left[\int_0^{\pi/2} \sin^3(\phi) \cos(\phi) d\phi \right] = \frac{\pi R^4}{16} + \frac{R^4}{16}$$

Sommando contributi ottenuti abbiamo che

$$\Phi_{\partial D}(F) = 0 + 0 + \left(-\frac{R^4}{16} \right) + \left(\frac{\pi R^4}{16} + \frac{R^4}{16} \right) = \frac{\pi}{16} R^4$$

in perfetto accordo con il calcolo svolto tramite il teorema della divergenza. Si noti che, incidentalmente, abbiamo risposto anche alla seconda domanda visto che abbiamo calcolato anche il flusso uscente attraverso $\partial D \cap \{x_1 = 0\} = S_1$, che è risultato nullo. $\square$

ESERCIZIO 2 (3+4 PUNTI) Data 1-forma differenziale $\omega = A(x)dx_1 + x_1 dx_2 + x_3 dx_3$ con $A \in C^1(\mathbb{R}^3)$

i. si determini la generica espressione di A tale che ω risulti chiusa,

ii. supponendo $\partial_1 A(x) = 1$ e $A(O) = 1$ nell'espressione ottenuta in i, si calcoli la circuitazione di ω lungo γ sostegno della curva regolare $x(t) = H(\cos(t), \sin(t), O)$, dove $t \in [0, 2\pi]$ e $H > 0$.

SVOLGIMENTO. i. Una 1-forma differenziale $\omega = \sum_{i=1}^3 F_i dx_i$ di classe $C^1(\mathbb{R}^3)$ si dice chiusa se vale $\partial_i F_j(x) = \partial_j F_i(x)$ per ogni $i, j \in \{1, 2, 3\}$, e nel nostro caso la precedente relazione diventa

$$\begin{aligned} \partial_2 F_3(x) = \partial_2 x_3 = 0 = \partial_3 x_1 = \partial_3 F_2(x) & \quad \text{che è sempre vera} \\ \partial_1 F_3(x) = \partial_1 x_3 = 0 = \partial_3 A(x) = \partial_3 F_1(x) & \quad \text{da cui} \quad \partial_3 A(x) = 0 \quad \text{che implica} \quad A(x) = A(x_1, x_2) \\ \partial_1 F_2(x) = \partial_1 x_1 = 1 = \partial_2 A(x) = \partial_2 F_1(x) & \quad \text{quindi} \quad \partial_2 A(x) = 1 \quad \text{cioè} \quad A(x) = x_2 + f(x_1) \end{aligned}$$

che è l'espressione generica della funzione $A \in C^1$, coefficiente di ω , che rende la 1-forma chiusa (o il campo associato irrotazionale, come possiamo affermare in $\mathbb{R}^3$).

ii. Imponendo le altre condizioni fornite dal testo ricaviamo che

$$\partial_1 A(x) = \partial_1 (f(x_1) + x_2) = f'(x_1) = 1 \quad \text{che significa} \quad A(x) = x_1 + x_2 + c = x_1 + x_2 + 1$$

dove l'ultima uguaglianza è dedotta dall'informazione $A(0) = 1$.

A questo punto osserviamo che ω è una forma chiusa definita in $\mathbb{R}^3$, che è un aperto semplicemente connesso, quindi ω è esatta per il teorema di Poincaré. Siccome γ è una curva chiusa segue che la circuitazione di ω lungo gamma è nulla, per ogni $H \in \mathbb{R}$. E sottolineiamo che tale circuitazione sarebbe stata nulla anche nel caso generico in cui $A(x) = x_2 + f(x_1)$, con $f \in C^1$.

Naturalmente è possibile calcolare esplicitamente la circuitazione e verificare che l'integrale è nullo (anche se richiede un po' di lavoro in più), è anche possibile scrivere le primitive della forma differenziale calcolando alcuni integrali indefiniti in modo da trovare che

$$U(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + x_1x_2 + x_1 + \frac{1}{2}x_3^2 + c$$

per verificare che l'integrale lungo la curva chiusa è nullo. $\square$

ESERCIZIO 3 (3+3+3 PUNTI) Dato il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} u'(t) = t \sin^4(u(t)) \\ u(0) = c \end{cases} \quad c \in (0, \pi)$$

- si spieghi perché esiste un'unica soluzione,
- si provi che la soluzione è limitata e globale,
- si dimostri che la soluzione è pari.

SVOLGIMENTO. i. Studiamo la funzione che definisce il secondo membro dell'equazione differenziale, cioè $f(t, s) = t \sin^4(s)$ e notiamo subito che, in quanto prodotto e composizione di polinomi e funzioni trigonometriche, vale che $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. In particolare questo implica che la funzione f è lipschitziana in ogni compatto del piano (questo perché $\partial_2 f$ è continua) cioè localmente lipschitziana in $\mathbb{R}^2$, quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Picard & Lindelöf, quindi esiste un'unica soluzione locale $u_c(t)$ definita in un intorno I_c del punto iniziale $t_0 = 0$ e tale che $u_c(0) = u_0 = c$.

ii. Un ruolo importante nello studio della dinamica prodotta da un problema di Cauchy è rivestito dai punti di equilibrio, cioè dalle (eventuali) soluzioni stazionarie. Nel caso in oggetto l'equazione differenziale è a variabili separabili e le costanti che cerchiamo sono le soluzioni dell'equazione $\sin^4(p) = 0$, che producono le soluzioni costanti $u_k(t) = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. In particolare, osserviamo che queste soluzioni costanti sono delle barriere, infatti vale che

$$u_0(t) \equiv 0 < c = u_c(0) < u_1(t) \equiv \pi \quad \text{implica} \quad 0 < u_c(t) < \pi \quad \text{per ogni } t \in I_c$$

perché altrimenti avremmo che, per un opportuno t_* dovrebbe vale che $u_c(t_*) = \pi$, e avremmo provato l'esistenza di due soluzioni distinte dello stesso problema di Cauchy, il che contraddirebbe il teorema di Picard & Lindelöf. Quindi possiamo concludere che $I_c = \mathbb{R}$.

Notiamo anche che $\sin^4(p) \geq 0$ per ogni p , quindi possiamo dedurre che le soluzioni di equilibrio sono costanti, invece le soluzioni con dato iniziale $u_0 \neq k\pi$ sono monotone decrescenti per $t < 0$ e monotone crescenti per $t > 0$, inoltre (per il teorema dell'asintoto) vale che se per qualche $k \in \mathbb{Z}$ vale $k\pi < u_0 < (k+1)\pi$ allora segue

$$k\pi < u_{u_0}(t) < (k+1)\pi \quad \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} u_{u_0}(t) = (k+1)\pi$$

Si noti che avremmo potuto dedurre la globalità delle soluzioni anche osservando che la funzione f è globalmente lipschitziana nella seconda variabile, cioè che

$$|f(t, s) - f(t, r)| = |t| |\sin^4(s) - \sin^4(r)| = |t| |4 \sin^3(\xi) \cos(\xi)| |s - r| \leq 4|t| |s - r| \quad \text{per ogni } (t, s), (t, r) \in \mathbb{R}^2$$

o anche mostrando che

$$|f(t, s)| = |t \sin^4(s)| = |t| \sin^4(s) \leq |t| \quad \text{per ogni } (t, s) \in \mathbb{R}^2$$

iii. Concludiamo dimostrando che la soluzione u_c è pari, ovvero mostrando che $u_c(t) = u_c(-t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Poniamo $w(t) := u_c(-t)$ e notiamo che

$$w(0) = u_c(-0) = c$$

$$w'(t) = \frac{d}{dt} u_c(-t) = -u_c'(-t) = -[f(-t, u_c(-t))] = -(-t) \sin^4(u_c(-t)) = t \sin^4(u_c(-t)) = t \sin^4(w(t))$$

Quindi abbiamo provato che w soddisfa lo stesso problema di Cauchy di u_c , allora possiamo dedurre (dall'unicità della soluzione) che $u_c(t) = w(t) = u_c(-t)$ per ogni $t \in I_c = \mathbb{R}$. $\square$
