

Il sistema di Gauss è un sistema alternativo al sistema internazionale che ha un importante vantaggio concettuale:

- $\vec{E}$ e $\vec{B}$ hanno le stesse DIMENSIONI FISICHE

- ϕ e $\vec{A}$ hanno le stesse DIMENSIONI FISICHE

Nel sistema di Gauss è evidente l'UNIFICAZIONE DELLE FORZE ELETTRICHE E MAGNETICHE

Nel sistema di Gauss, cambiamo solo le definizioni delle grandezze elettromagnetiche. Non cambiano le leggi meccaniche [$\vec{F} = m\vec{a}$ vale nel sistema SI e nel sistema di Gauss]

RELAZIONI FONDAMENTALI

SI	Gauss
$ \vec{F}_{\text{coulomb}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$	$ \vec{F}_{\text{coulomb}} = \frac{q_1 q_2}{r^2}$
$\vec{F}_E = q\vec{E}$	$\vec{F}_E = q\vec{E}$
$\vec{F}_M = q\vec{v} \times \vec{B}$	$\vec{F}_M = q\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}$

① Relazione tra le cariche. Due cariche uguali, q_{SI} nel SI, q_G nel G, danno luogo a F_{coul} :

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{SI}}^2}{r^2} = \frac{q_G^2}{r^2} \Rightarrow q_{\text{SI}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} q_G$$

• Relazione tra i campi elettrici

$$q_{SI} E_{SI} = q_G E_G$$
$$\sqrt{4\pi\epsilon_0} q_G E_{SI} = q_G E_G \Rightarrow E_{SI} = \frac{E_G}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$$

• Relazione tra i campi magnetici

$$q_{SI} \vec{v} \times \vec{B}_{SI} = q_G \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_G$$
$$\sqrt{4\pi\epsilon_0} q_G \vec{v} \times \vec{B}_{SI} = q_G \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}_G$$
$$\vec{v} \times \vec{B}_{SI} = \vec{v} \times \left(\frac{\vec{B}_G}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \right) \Rightarrow \vec{B}_{SI} = \frac{\vec{B}_G}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$$

EQ. DI MAXWELL NEL S.I. e GAUSS

①

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_{SI} = \frac{\rho_{SI}}{\epsilon_0} \quad \rho \sim q \Rightarrow \rho_{SI} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho_G$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{E}_G}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} \sqrt{4\pi\epsilon_0} \rho_G$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_G = \frac{1}{\epsilon_0} (4\pi\epsilon_0) \rho_G \quad \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_G = 4\pi \rho_G}$$

②

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_{SI} + \frac{\partial \vec{B}_{SI}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{E}_G}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{B}_G}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \right) = 0$$

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E}_G + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_G}{\partial t} = 0}$$

$$\textcircled{c} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{SI} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_G = 0}$$

(3)

d)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_{SI} = \mu_0 \vec{J}_{SI} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_{SI}}{\partial t} \quad J \sim \rho v \Rightarrow \vec{J}_{SI} = \sqrt{4\pi\epsilon_0} \vec{J}_G$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}_G}{C\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \right) = \mu_0 \sqrt{4\pi\epsilon_0} \vec{J}_G + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\vec{E}_G}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}_G = 4\pi\epsilon_0 \mu_0 c \vec{J}_G + c \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_G}{\partial t}$$

Ora $\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$ per cui

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}_G = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_G + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}_G}{\partial t}}$$

POTENZIALI

Poniamo $\vec{B}_G = \vec{\nabla} \times \vec{A}_G$ come nel SI
Con tale scelta l'equazione $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_G = 0$ è automaticamente soddisfatta.

Sostituendo in $\vec{\nabla} \times \vec{E}_G + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}_G}{\partial t} = 0$ abbiamo

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_G + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}_G) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E}_G + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_G}{\partial t} \right) = 0$$

Tale equazione è soddisfatta se

$$\vec{E}_G + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_G}{\partial t} = -\vec{\nabla} \phi_G$$

$$\vec{E}_G = -\vec{\nabla} \phi_G - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}_G}{\partial t}$$

$$\left[\text{In SI: } \vec{E}_{SI} = -\vec{\nabla} \phi_{SI} - \frac{\partial \vec{A}_{SI}}{\partial t} \right]$$

Relatività ha potenziali SI e Gauss

(4)

$$\bullet B_{SI} = \nabla \times A_{SI}$$

$$\frac{B_G}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \frac{1}{c} = \nabla \times A_{SI}$$

$$\frac{1}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \nabla \times \bar{A}_G = \nabla \times \bar{A}_{SI} \Rightarrow \bar{A}_{SI} = \frac{\bar{A}_G}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$$

$$\bullet E_{SI} = -\nabla\phi_{SI} - \frac{\partial A_{SI}}{\partial t}$$

$$\frac{E_G}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} = -\nabla\phi_{SI} - \frac{1}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \frac{\partial A_G}{\partial t}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \left(-\nabla\phi_G - \frac{1}{c} \frac{\partial A_G}{\partial t} \right) = -\nabla\phi_{SI} - \frac{1}{c\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \frac{\partial A_G}{\partial t}$$

$$\bullet -\frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \nabla\phi_G = -\nabla\phi_{SI} \quad \phi_{SI} = \frac{\phi_G}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}}$$

NOTA: ϕ si trasforma come E
A come B

$$\boxed{\begin{aligned} q_G \phi_G &= q_{SI} \phi_{SI} \\ \frac{1}{c} q_G A_G &= q_{SI} A_{SI} \end{aligned}}$$

Trasformazioni di gauge

(5)

$$\begin{cases} \bar{A}'_{SI} = \bar{A}_{SI} + \nabla \chi \\ \phi'_{SI} = \phi_{SI} - \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$

Nel sistema di Gauss [sostituiamo le relazioni trovate prima]

$$\begin{cases} \bar{A}'_G = \bar{A}_G + c\sqrt{4\pi\epsilon_0} \nabla \chi \\ \phi'_G = \phi_G - \sqrt{4\pi\epsilon_0} \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{cases}$$

Se ridefiniamo $\tilde{\chi} = c\sqrt{4\pi\epsilon_0} \chi$

$$\boxed{\begin{cases} A'_G = A_G + \nabla \tilde{\chi} \\ \phi'_G = \phi_G - \frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial t} \end{cases}}$$

Unità di misura nel sistema di Gauss [FACOLTATIVO]

Il confronto tra SI e sistema di Gauss è reso ulteriormente complicato dal fatto che nel sistema di Gauss si usano le unità CGS (centimetro, grammo, secondo) come unità meccaniche.

Unità delle forze:

$$\text{dyne} = 1 \text{ g} \times 1 \text{ cm/s}^2 = 10^{-5} \text{ N}$$

Alcune definizioni utili.

① C_{SI} : il valore numerico della velocità della luce quando espressa in m/s

$$C = C_{SI} \text{ m/s} \quad C_{SI} \approx 3 \cdot 10^8$$

② C_G : il valore numerico della velocità della luce quando espressa in cm/s

$$C = C_G \text{ cm/s} \quad C_G \approx 3 \cdot 10^{10}$$

③ Dato che $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ unità SI

$$4\pi\epsilon_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\mu_0}{\mu_0} = \frac{4\pi}{\mu_0} \frac{1}{C^2} = \frac{4\pi}{4\pi 10^{-7} C_{SI}^2} = \frac{10^7}{C_{SI}^2} \approx \frac{10^{-9}}{9}$$

* Unità di carica: statCoulomb = statC

Dato che $|F| = \frac{q_{1G} q_{2G}}{r^2}$

Se $q_{1G} = q_{2G} = 1 \text{ statC}$ e $r = 1 \text{ cm}$ allora $|F| = 1 \text{ dyne}$

Vogliamo quindi calcolare $q_{1SI} = q_{2SI}$ tali che

$$|F| = 1 \text{ dyne} = 10^{-5} \text{ N} \quad \text{quando} \quad r = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$10^{-5} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{SI}^2}{(10^{-2})^2}$$

$$q_{SI}^2 = 10^{-9} 4\pi\epsilon_0 = 10^{-9} \frac{10^7}{C_{SI}^2} = \frac{10^{-2}}{C_{SI}^2}$$

$$q_{SI} = \frac{1}{10 C_{SI}}$$

Quindi 1 statCoulomb corrisponde a

$$\frac{1}{10 C_{SI}} \approx \frac{1}{3 \cdot 10^9} \approx \frac{10^{-9}}{3} \text{ Coulomb}$$

unità di potenziale elettrico: statVolt

Dato ~~l'energia~~ energia = $q_G \phi_G = q_{SI} \phi_{SI}$
e l'unità dell'energia nel sistema CGS è

$$1 \text{ erg} = 1 \text{ g} \cdot (1 \text{ cm/s})^2 = 10^{-7} \text{ J}$$

abbiamo che 1 statCoulomb sottoposto ad un
potenziale di 1 statVolt ha "energia" pari
a 1 erg. Quindi, rifrasando nel sistema SI,
 $1 \cdot \frac{1}{10 C_{SI}}$ Coulomb sottoposto ad un potenziale $\phi_{SI}(\text{Vol})$
ha energia pari a 10^{-7} J . Segue

$$10^{-7} = \frac{1}{10 C_{SI}} \phi_{SI} \quad \phi_{SI} = 10^{-6} C_{SI}$$

Quindi 1 statV corrisponde a

$$10^{-6} C_{SI} \approx 300 \text{ Volt}$$

unità di campo magnetico: Gauss

Dato che $F_M = q_G \frac{\vec{v}_G}{c} \times B_G$

un stat Coulomb ad una velocità $v_G = 1 \text{ cm/s}$
in un campo magnetico ortogonale $B_G = 1 \text{ Gauss}$
genera una forza pari a

$$F_M = \frac{1}{c_G} \text{ dyne} = \frac{1}{100 c_{SI}} 10^{-5} \text{ N} = \frac{10^{-7}}{c_{SI}} \text{ N}$$

Se utilizziamo unità SI; una carica

$q_{SI} = \frac{1}{10 c_{SI}} \text{ Coulomb}$ con velocità $v = 10^{-2} \text{ m/s}$ in

un campo B_{SI} deve generare $F_M = \frac{10^{-7}}{c_{SI}} \text{ N}$

Dato che $F_M = q_{SI} \vec{v} \times B_{SI}$

$$\frac{10^{-7}}{c_{SI}} = \frac{1}{10 c_{SI}} 10^{-2} B_{SI}$$

$$B_{SI} = 10^{-4} \text{ T}$$

Quindi 1 G corrisponde a 10^{-4} T .