

Invarianza di gauge in 1D

(1)

Le trasformazioni di gauge sono definite da

$$\phi' = \phi - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla \chi$$

dove $\chi(\vec{x}, t)$ è ARBITRARIA

Consideriamo

$$H = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + e\phi$$

$$H' = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A}')^2 + e\phi'$$

dove $(\vec{A}, \phi)$ e $(\vec{A}', \phi')$ sono connessi da una trasformazione di gauge.

Notiamo che

$$H' = \frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A} - e\nabla\chi)^2 + e\phi - e\frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Se: a) χ non dipende da t

b) definiamo

$$\begin{cases} P = p - e\nabla\chi \\ Q = q \end{cases}$$

e dimostriamo che $(\vec{p}, q) \rightarrow (\vec{P}, Q)$ è una trasformazione canonica

allora P e Q sono canonici e

$$H' = \frac{1}{2m} (P - eA)^2 + e\phi \quad \text{con}$$

ossia H' ha la stessa forma di H .

LA FISICA È INDIPENDENTE DALLA SCELTA DI GAUGE:

H ed H' hanno lo stesso spettro

2

dove $\partial_i x = \frac{\partial x}{\partial x_i}$

(2)

$\uparrow = 0$ [sono funzioni di q solo]

$$\begin{matrix} [\partial_i x, \partial_j x] \\ \parallel \\ 0 \end{matrix}$$

Abbiamo dimostrato che l'operatore che implementa la trasf. canonica

$$\begin{aligned} U p_i U^\dagger &= p_i - e \partial_i \chi \\ U q_i U^\dagger &= q_i \end{aligned} \longrightarrow \begin{aligned} U q_i &= q_i U \\ &\text{if}(q) \end{aligned}$$

Dato che U commuta con $\vec{q}$, prendiamo $U = e^{i f(q)}$
 con $f(q)$ reale

$$U p_i U^\dagger = e^{if(q)} p_i e^{-if(q)} \\ = p_i + [if(q), p_i] + \frac{1}{2!} [if(q), [if(q), p_i]] + \dots$$

Ora

(3)

$$[f(q), p_i] = i \hbar \partial_i f(q) = - \hbar \partial_i f(q)$$

$$[if(q), [f(q), p_i]] = [f(q), -\hbar \partial_i f(q)] = 0$$

↳ sono solo funzioni di $\vec{q}$

Quindi

$$U p_i U^\dagger = p_i - \hbar \partial_i f(q)$$

Vogliamo ora che sia

$$U p_i U^\dagger = p_i - e \partial_i \chi$$

da cui $p_i - \hbar \partial_i f(q) = p_i - e \partial_i \chi \Rightarrow \hbar f(q) = e \chi$

$$f = \frac{e}{\hbar} \chi$$

Quindi $U = \exp\left(\frac{ie}{\hbar} \chi\right)$

DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA IN RAPPR. SCHRÖDINGER

Se $\psi(q)$ è una funzione d'onda, calcoliamo

$$\begin{aligned} U p_i U^\dagger \psi &= e^{ie\chi/\hbar} (-i\hbar \frac{d}{dx_i}) (e^{-ie\chi/\hbar} \psi) \\ &= e^{ie\chi/\hbar} (-i\hbar) \left(\frac{d\psi}{dx_i} e^{-ie\chi/\hbar} - \frac{ie}{\hbar} \partial_i \chi e^{-ie\chi/\hbar} \psi \right) \\ &= -i\hbar \left(\frac{d\psi}{dx_i} - \frac{ie}{\hbar} \partial_i \chi \psi \right) \\ &= i\hbar \frac{d\psi}{dx_i} - e \partial_i \chi \psi = p_i \psi - e \partial_i \chi \psi \\ &= (p_i - e \partial_i \chi) \psi \end{aligned}$$

NOTA: (utile dopo) [se χ dipende da t , il risultato vale ancora]

TRASF. CON χ CHE DIPENDE DA U

(4)

Vale sempre (anche se χ dipende da t)

$$e^{iex/\hbar} p_i (e^{-iex/\hbar} \psi) = (p_i - e\partial_i \chi) \psi$$

Quindi

$$\begin{aligned} e^{iex/\hbar} H e^{-iex/\hbar} \psi &= U H U^\dagger \psi \\ &= U \left[\frac{1}{2m} (\bar{p} - e\bar{A})^2 + e\phi \right] U^\dagger \psi \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} U(p_i - eA_i) U^\dagger &= U p_i U^\dagger - e U A_i U^\dagger \\ &= (p_i - e\partial_i \chi) - eA_i \\ &= (p_i - eA'_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(p_i - eA_i)(p_i - eA_i) U^\dagger &= \\ &= U(p_i - eA_i)(U^\dagger U)(p_i - eA_i) U^\dagger \\ &= (p_i - eA'_i)(p_i - eA'_i) \end{aligned}$$

Infine

$$U\phi U^\dagger = \phi = \phi' + \frac{\partial \chi}{\partial t}$$

Quindi

$$\begin{aligned} e^{iex/\hbar} H e^{-iex/\hbar} \psi &= \\ &= \left[\frac{1}{2m} (p - eA')^2 + e\phi' + e\frac{\partial \chi}{\partial t} \right] \psi \quad (*) \\ &= \left[H' + e\frac{\partial \chi}{\partial t} \right] \psi \end{aligned}$$

Questa equazione vale per qualsiasi ψ e $\chi(\vec{x}, t)$.

Se χ non dipende da t , si tratta della
riderivazione di un risultato generale della
teoria delle trasf. canoniche: (3)

Se ψ'_n soddisfa $H' \psi'_n = E_n \psi'_n$

allora $\psi_n = e^{-iex/\hbar} \psi'_n$ soddisfa a

$$H \psi_n = E_n \psi_n$$

In fatti la relazione precedente con $\psi = \psi'_n$
fornisce [rel. (*) pagina ④]

$$e^{+iex/\hbar} H e^{-iex/\hbar} \psi'_n = H' \psi'_n$$

↓

$$e^{+iex/\hbar} H \psi_n = E_n \psi'_n$$

$$H \psi_n = e^{-iex/\hbar} E_n \psi'_n = E_n \psi_n$$

EVOLUZIONE TEMPORALE

Facciamo vedere che le trasformazioni di gauge
non cambiano l'evoluzione temporale.

Supponiamo:

① al tempo $t=0$ il sistema si trova in $\psi_0 = \psi_{ini}$
ed evolve con Hamiltoniano H . Quindi $\psi(t)$
soddisfa a $\psi(t=0) = \psi_0 = \psi_{ini}$
e l'equazione $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi$

② al tempo $t=0$ il sistema si trova in
 $\psi'_0 = e^{-iex/\hbar} \psi_{ini}$ ed evolve con Hamiltoniana H'
ossia

$$i\hbar \frac{\partial \psi'(t)}{\partial t} = H' \psi'$$

Allora:

$$\psi'(t) = e^{ie\chi(t)/\hbar} \psi(t)$$

NOTA: Consideriamo funzioni χ che dipendono sia da $\vec{x}$ sia da t .

In $\psi_0 = \exp\left(\frac{ie}{\hbar}\chi(0)\right) \psi_{ini}$, χ è calcolata al tempo $t=0$

DIMOSTRAZIONE:

Consideriamo $\hat{\psi}(t) = e^{ie\chi(t)/\hbar} \psi(t)$

e notiamo che

$$\hat{\psi}(t=0) = e^{ie\chi(0)/\hbar} \psi(0) = e^{ie\chi(0)/\hbar} \psi_{ini}$$

Faremo vedere sotto che

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = H' \hat{\psi}(t) \quad (*)$$

Quindi $\hat{\psi}$ e ψ' soddisfano la stessa equazione differenziale e coincidono al tempo $t=0$.

Quindi coincidono ad ogni tempo per l'unicità della soluzione dell'equazione differenziale.

Facciamo vedere che vale (*)

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left[e^{ie\chi(t)/\hbar} \psi(t) \right] \\ &= i\hbar \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} e^{ie\chi/\hbar} + \frac{ie}{\hbar} \frac{\partial \chi}{\partial t} \psi e^{ie\chi/\hbar} \right] \\ &= i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} e^{ie\chi/\hbar} + (-e) \frac{\partial \chi}{\partial t} \hat{\psi} \\ &= (H\psi) e^{ie\chi/\hbar} - e \frac{\partial \chi}{\partial t} \hat{\psi} \end{aligned}$$

Infine (formula di p. 4 con $\hat{\psi}$ al posto di ψ) (7)

$$e^{+iex/\hbar} H(e^{-iex/\hbar} \hat{\psi}) = \left(H' + \frac{e\partial x}{\partial t} \right) \hat{\psi}$$

$$e^{+iex/\hbar} H\psi = \left(H' + \frac{e\partial x}{\partial t} \right) \hat{\psi}$$

Sostituendo

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t} = \left(H' + e \frac{\partial x}{\partial t} \right) \hat{\psi} - e \frac{\partial x}{\partial t} \hat{\psi} = H \hat{\psi}$$

Abbiamo ottenuto la relazione voluta.

Nella discussione dell'equivalenza dello spettro di H' e H abbiamo considerato trasformazioni di gauge che non dipendono da t .

Per capire il motivo consideriamo campi $\bar{E}$ e $\bar{B}$ indipendenti dal tempo. In questo caso possiamo assumere $\bar{A}$ e ϕ indipendenti da t e

$$\bar{E} = -\nabla\phi, \quad \bar{B} = \nabla \times \bar{A}$$

Data una particella di massa m che si muove sotto l'azione di $\bar{E}$ e $\bar{B}$, il lavoro lungo una traiettoria (da $\bar{x}_0$ al tempo t_0 ad $\bar{x}_1$ al tempo t_1) è dato da

$$L = \int \bar{F} \cdot d\bar{x} = \int q(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}) \cdot \bar{v} dt = q \int (-\nabla\phi) \cdot \bar{v} dt =$$

$$= -q \int \nabla\phi \cdot d\bar{x} = -q(\phi(x_1) - \phi(x_0))$$

Per il teorema dell'energia cinetica quindi

$$\frac{1}{2}mv^2(t_1) - \frac{1}{2}mv^2(t_0) = q(\phi(x_1) - \phi(x_0))$$

$$\text{ossia } E(t_1) = E(t_0) \text{ con } E(t) = \frac{1}{2}mv^2(t) + q\phi(x(t))$$

Se definiamo $mv = \bar{p} - e\bar{A}$ abbiamo che

H coincide con l'energia

Cambiamo ora i potenziali, in modo però che riproducano gli stessi $\bar{E}$ e $\bar{B}$. ~~mostro~~ Assumiamo che i nuovi potenziali dipendano dal tempo:

$$\phi'(x, t), \quad \bar{A}'(x, t)$$

Dato che i campi sono gli stessi esiste $\chi(\bar{x}, t)$ tale che

$$\phi'(x, t) = \phi(x) - \frac{\partial \chi(x, t)}{\partial t}$$

$$\bar{A}'(x, t) = \bar{A}(x) + \nabla \chi(x, t)$$

Possiamo definire una quantità

$$E'(t) = \frac{1}{2}mv^2 + q\phi(x(t), t)$$

che coincide con la Hamiltoniana quando $\bar{v}$ viene sostituita da $\bar{p}$.

LA QUANTITÀ $E'(t)$ NON È CONSERVATA e quindi non può essere identificata con l'energia.

Infatti

$$E'(t) = E(t) - q \frac{\partial \chi(x(t), t)}{\partial t}$$

Quindi

$$\begin{aligned} E'(t_1) - E'(t_0) &= E(t_1) - E(t_0) - q \frac{\partial \chi(x(t_1), t_1)}{\partial t} + q \frac{\partial \chi(x(t_0), t_0)}{\partial t} \\ &= q \left(\frac{\partial \chi(x(t_0), t_0)}{\partial t} - \frac{\partial \chi(x(t_1), t_1)}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Dato che $\frac{\partial \chi}{\partial t}$ NECESSARIAMENTE DIPENDE da t (per ipotesi $\phi'(\bar{x}, t)$ dipende da t), $E'(t_1) - E'(t_0) \neq 0$.

Quindi: i) H' non è l'energia e perciò non deve avere lo stesso spettro di H

ii) $H' + q \frac{\partial \chi}{\partial t}$ È L'ENERGIA. Ma questa quantità H esattamente lo stesso spettro di H
[qui serve l'aver notato che la trasformazione rimane canonica anche quando χ dipende da t]