

Momenti angolare in coordinate sferiche

10

$$\vec{p}f = -i\hbar \left( \hat{u}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\hat{u}_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\hat{u}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right)$$

$$\vec{r} = r \hat{u}_r$$

$$\vec{L}f = -i\hbar r \hat{u}_r \times \left( \hat{u}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\hat{u}_\theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\hat{u}_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right)$$

$$= -i\hbar \left[ \hat{u}_r \times \hat{u}_\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \hat{u}_r \times \hat{u}_\phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right]$$

$$= -i\hbar \left[ \hat{u}_\phi \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\hat{u}_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right]$$

$$= -i\hbar \left[ \hat{u}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hat{u}_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] f \quad \text{[prodotto scalare]}$$

$$L^2 f = -\hbar^2 \left[ \hat{u}_\phi \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{\hat{u}_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \left[ \hat{u}_\phi \frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\hat{u}_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right]$$

$$= -\hbar^2 \left[ \overbrace{\hat{u}_\phi \cdot \hat{u}_\phi}^{=1} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \overbrace{\hat{u}_\phi \cdot \frac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial \theta}}^{=0} \frac{\partial f}{\partial \theta} - \underbrace{\hat{u}_\phi \cdot \hat{u}_\theta}_{=0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) - \hat{u}_\phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} \right]$$

$$= -\hbar^2 \left[ \frac{\hat{u}_\theta}{\sin \theta} \cdot \hat{u}_\phi \frac{\partial^2 f}{\partial \phi \partial \theta} - \frac{\hat{u}_\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} + \frac{\hat{u}_\theta}{\sin \theta} \cdot \frac{\hat{u}_\theta}{\sin \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\hat{u}_\theta}{\sin \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \phi} \right]$$

$$= -\hbar^2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{u}_\phi \cdot \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{u}_\theta \cdot \frac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right]$$

Ora

$$\hat{u}_\phi \cdot \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{u}_\phi \cdot \hat{u}_\theta) - \frac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial \theta} \cdot \hat{u}_\theta = 0$$

[ $\hat{u}_\phi$  dipende solo da  $\phi$ ]

Per calcolare  $\hat{u}_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}$

$$\hat{u}_\theta \cdot \frac{\partial \hat{u}_\phi}{\partial \phi} = + \frac{\partial}{\partial \phi} (\hat{u}_\theta \cdot \hat{u}_\phi) - \hat{u}_\phi \cdot \frac{\partial \hat{u}_\theta}{\partial \phi} =$$

$$= - \frac{\hat{u}_\phi}{M_\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (M_\theta \hat{u}_\theta) \quad [M_\theta = r \text{ non dipende da } \phi]$$

$$= - \frac{1}{M_\theta} \frac{\partial M_\phi}{\partial \theta} \quad \left[ \hat{u}_i \frac{\partial}{\partial \xi_j} (M_j \hat{u}_j) = \frac{\partial M_i}{\partial \xi_j} \text{ con } i=\phi, j=\theta \right]$$

$$= - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta) = -\cos \theta$$

Quindi

$$L^2 f = -\hbar^2 \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right]$$

Quindi

$$p_r^2 f = -\frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) - \frac{\hbar^2}{r^2} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \right]$$
$$= -\frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf) + \frac{L^2}{r^2} f$$

Definiamo  $p_r$  come  $p_r f = -\frac{\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf)$

$$p_r^2 f = -\hbar^2 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[ r \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf) \right] = -\frac{\hbar^2}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (rf)$$

Quindi

$$p^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2}$$

Derivazione classica della relazione  $\vec{p} = p_r \hat{r} + \frac{L}{r^2} \hat{\phi}$  (10)

$$L = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L^2 = |\vec{r} \times \vec{p}|^2 = r^2 p^2 \sin^2 \theta \quad \theta \text{ angolo tra } \vec{r} \text{ e } \vec{p}$$

$$= r^2 p^2 (1 - \cos^2 \theta)$$

$$= r^2 p^2 - (r p \cos \theta)^2 = r^2 p^2 - (\vec{r} \cdot \vec{p})^2$$

Definiamo  $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r}$  (vettore lungo  $\vec{r}$ ) e  $p_r = \hat{r} \cdot \vec{p}$

Quindi

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = r \hat{r} \cdot \vec{p} = r p_r$$

$$\text{e } L^2 = r^2 p^2 - r^2 p_r^2 \quad \text{Quindi} \quad \frac{L^2}{r^2} = p^2 - p_r^2 \quad p^2 = p_r^2 + \frac{L^2}{r^2}$$

HERMITICITA' DI  $p_r$

Spazio di Hilbert:  $\{f(r) \text{ definita in } [0, +\infty]\} = \mathcal{H}$

$$\langle f | g \rangle = \int_0^\infty dr r^2 f^* g$$

$p_r$  è hermitiano nel dominio  $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{H} : f(0) \text{ finito}\}$

Infatti

$$\langle f | p_r | g \rangle = \int_0^\infty dr r^2 f^* \left( \frac{-i\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (rg) =$$

$$= -i\hbar \int_0^\infty dr (rf^*) \frac{\partial}{\partial r} (rg) =$$

$$= -i\hbar \left[ \underbrace{r^2 f^* g}_0 \right]_0^\infty + i\hbar \int_0^\infty dr rg \frac{\partial}{\partial r} (rf^*)$$

$$= i\hbar \int_0^\infty dr r^2 g \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf^*)$$

$$\langle g | p_r | f \rangle^* = \int_0^\infty dr r^2 g \frac{i\hbar}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rf^*)$$

]} = \text{uguali}

Le armoniche sferiche sono definite sulla sfera di raggio 1

• Spazio di Hilbert

$\mathcal{H}_S = \{ \text{funzioni } f(\theta, \varphi) \text{ definite sulla sfera} \}$

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int d\Omega \psi_1^*(\theta, \varphi) \psi_2(\theta, \varphi) \quad \begin{aligned} d\Omega &= \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= d\cos \theta d\varphi \end{aligned}$$

• Definizione di armonica sferica  $Y_l^m(\theta, \varphi)$

(a) sono le autofunzioni comuni di  $L^2$  e  $L_z$  in  $\mathcal{H}$

$$L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$L_z Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar m Y_l^m(\theta, \varphi)$$

La definizione RICHIEDE (la dimostrazione sarà fatta successivamente) che per ogni valore di  $l$  e  $m$  vi sia UNA SOLA autofunzione (modulo costante moltiplicativa complessa)

(b) Le armoniche sferiche sono normalizzate

$$\int d\Omega |Y_l^m(\theta, \varphi)|^2 = 1$$

Le condizioni (a) e (b) definiscono  $Y_l^m$  a meno di una fase (diversa per ogni  $m, l$ ).

(c) La fase relativa in un multipletto (armoniche con lo stesso  $l$ ) è fissata dalla richiesta che

$$\langle l, m+1 | L_+ | l, m \rangle = \int d\Omega Y_l^{m+1*} (L_+ Y_l^m)$$

sia REALE POSITIVO

La condizione (c) lascia ancora una libertà di fare. Possiamo ridefinire  $Y_e^m \rightarrow e^{i\alpha_e} Y_e^m$  ( $\alpha_e$  dipende solo da  $l$ )

(d) convenzione fase globale: si specifica la fase di  $Y_e^l$

• Dipendenza da  $\varphi$

Dato che  $L_z Y_e^m(\theta, \varphi) = \hbar m Y_e^m(\theta, \varphi)$

$$\Rightarrow Y_e^m(\theta, \varphi) = F_{lm}(\theta) e^{im\varphi}$$

• Stato massimale

Per calcolare  $Y_e^l(\theta, \varphi)$  utilizziamo il fatto che  $L_+ Y_e^l = 0$

$$\text{Quindi } e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) Y_e^l = 0$$

Dato che  $Y_e^l(\theta, \varphi) = F_{ee} e^{il\varphi}$  abbiamo

$$\left( \frac{\partial}{\partial \theta} - l \cot \theta \right) F_{ee} e^{il\varphi} = 0$$

ossia  $F_{ee}' = l \cot \theta F_{ee}$

$$\frac{F_{ee}'}{F_{ee}} = l \cot \theta \quad \frac{d}{d\theta} \ln F_{ee} = l \cot \theta$$

$$\ln F_e = \int d\theta l \cot \theta + \text{costante}$$

$$= l \log |\sin \theta| + \text{costante}$$

$$F_e = C \sin^l \theta$$

Quindi  $Y_l^l = C \sin^l \theta e^{il\phi}$

(3)

Il modulo di  $C$ ,  $|C|$ , è fissato dalle condizioni

$$\int d\Omega |Y_l^l|^2 = 1 \quad (\text{normalizzazione})$$

La fase è arbitraria

CONVENZIONE PDG:  $C = (-1)^l |C|$

[questa è la proprietà (d) indicata nella definizione delle armoniche sferiche]

Il calcolo fatto DIMOSTRA anche che  $Y_l^l(\theta, \phi)$  è l'unica modulo costanti moltiplicative. Dato che

$$Y_l^m = \text{costante} \times L_-^{l-m} Y_l^l$$

possiamo anche concludere che per ogni  $m, l$ , esiste una sola autofunzione come assunto nella definizione

• Ricorsione per  $F_{lm}(\theta)$

Deve valere

$$L_- Y_l^m = C_{lm} Y_l^{m-1} \quad C_{lm} = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m-1)}$$

Quindi

$$\begin{aligned} Y_l^{m-1} &= \frac{1}{C_{lm}} L_- Y_l^m \\ &= \frac{1}{C_{lm}} \hbar e^{-i\phi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) [F_{lm}(\theta) e^{im\phi}] \\ &= \frac{\hbar}{C_{lm}} e^{-i\phi} e^{im\phi} \left( -\frac{\partial}{\partial \theta} - m \cot \theta \right) F_{lm} \end{aligned}$$

$$Y_l^{m-1} = \frac{\hbar}{C_{lm}} \left[ -\frac{\partial F_{lm}}{\partial \theta} - m \cot \theta F_{lm} \right] e^{+i(m-1)\varphi}$$

Quindi

$$F_{l,m-1} = \frac{\hbar}{C_{lm}} \left( -\frac{\partial F_{lm}}{\partial \theta} - m \cot \theta F_{lm} \right)$$

Va notato che, con le nostre convenzioni  $F_{lm}$  è reale. La ricorrenza mostra che  $F_{lm}(\theta)$  è REALE per ogni  $\theta$

• Connessione con i polinomi omogenei.

Sia  $Q_l(x,y,z)$  un polinomio omogeneo di grado  $l$   
[omogeneo: tutti i monomi sono di grado  $l$ , in formule

$$Q_l(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^l Q_l(x, y, z) \text{ per ogni } \lambda]$$

Definiamo

$$\bar{Q}(x,y,z) = L_l Q_l(x,y,z) \Rightarrow \bar{Q} \text{ è un polinomio omogeneo di grado } l.$$

DIMOSTRAZIONE.

$$L_x = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}$$

La derivata abbassa il grado del polinomio di 1; dato che ogni derivata è accompagnata dalle moltiplicazioni per una coordinata il grado non cambia

Definiamo ora  $P_l^m = r^l Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(x, y, z)$

Facciamo vedere che  $P_l^m(x, y, z)$  è (i) un polinomio omogeneo di grado  $l$ ; (ii) è un polinomio armonico  
ovvero  $\nabla^2 P_l^m = 0$

$$(i) \quad Y_l^l = C \sin^l \theta e^{i l \phi}$$

(5)

$$P_l^l = C r^l \sin^l \theta e^{i l \phi}$$

$$= C (r \sin \theta e^{i \phi})^l$$

$$= C (r \sin \theta \cos \varphi + i r \sin \theta \sin \varphi)^l = C (x + i y)^l$$

$P_l^l$  è omogeneo di grado  $l$

Consideriamo ora

$$P_l^{l-1} = r^l Y_l^{l-1} = r^l \frac{1}{C_{ll}} L_- Y_l^l \quad [L_- \text{ non agisce su } r]$$

$$= \frac{1}{C_{ll}} L_- (r^l Y_l^l) = \frac{1}{C_{ll}} L_- P_l^l$$

$L_-$  trasforma polinomi omogenei di grado  $l$  in polinomi omogenei dello stesso grado

Quindi anche  $P_l^{l-1}$  è omogeneo di grado  $l$

Iterando si dimostra lo stesso per  $P_l^m$

$$ii) \quad \nabla^2 P_l^m = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r P_l^m) - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} P_l^m$$

Ora

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r P_l^m) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r^{l+1} Y_l^m) = l(l+1) r^{l-1} Y_l^m$$

$$\frac{L^2}{\hbar^2 r^2} P_l^m = \frac{L^2}{\hbar^2 r^2} (r^l P_l^m) = r^{l-2} \frac{L^2}{\hbar^2} Y_l^m = l(l+1) r^{l-2} Y_l^m$$

$$\text{Sommando si ottiene } \nabla^2 P_l^m = 0$$

• Comportamento sotto coniugio

(6)

Definiamo l'operazione di CONIUGIO \* (da non confondere con l'aggiunto)

$$L_x = -i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_x^* = +i\hbar \left( y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) = -L_x$$

$$L_y = -i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$L_y^* = +i\hbar \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) = -L_y$$

$$L_z = -i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$L_z^* = i\hbar \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -L_z$$

$$(L^2)^* = +L^2$$

$$L_z Y_e^m = \hbar m Y_e^m$$

$$\Rightarrow L_z^* Y_e^{m*} = \hbar m Y_e^{m*}$$

$$L^2 Y_e^m = \hbar^2 l(l+1) Y_e^m$$

$$L^{2*} Y_e^{m*} = \hbar^2 l(l+1) Y_e^{m*}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L_z Y_e^{m*} = -\hbar m Y_e^{m*} \\ L^2 Y_e^{m*} = \hbar^2 l(l+1) Y_e^{m*} \end{cases}$$

$Y_e^{m*}$  è autofunzione di  $L^2$  e  $L_z$  con autovalori  $\hbar^2 l(l+1)$  e  $-\hbar m$ .

Dato che le armoniche sferiche sono NON DEGENERI

$$Y_e^{m*} = k Y_e^{-m}$$

$|k|=1$  dato che sono normalizzate

$$F_{em} e^{-im\phi} = k F_{e,-m} e^{-im\phi}$$

$$F_{em} = k F_{e,-m}$$

Dato che  $F_{em}$  è reale  $k = \pm 1$

Facciamo vedere che vale

$$Y_e^{m*} = (-1)^m Y_e^{-m}$$

Osserviamo

(7)

$$L_- Y_e^m = C_{lm} Y_e^{m-1}$$

con lo stesso coefficiente  $C_{lm}$

$$L_+ Y_e^{-m} = C_{lm} Y_e^{-m+1}$$

Segue (iterando)

$$\begin{cases} L_-^m Y_e^m = D Y_e^0 \\ L_+^m Y_e^{-m} = D Y_e^0 \end{cases}$$

con lo stesso coefficiente  $D$

Notiamo che  $D$  è reale e  $Y_e^0 = F_{e0}(\theta)$  è reale. Quindi:

$$\begin{cases} L_-^m Y_e^m = D Y_e^0 \\ (L_+^m)^* (Y_e^{-m})^* = D Y_e^0 \end{cases} \Rightarrow L_-^m Y_e^m = (L_+^m)^* (Y_e^{-m})^*$$

$$\text{Ora } L_+^* = (L_x + iL_y)^* = -L_x - i(-L_y) = -L_x + iL_y = -L_-$$

$$(L_+^m)^* = (-1)^m L_-^m$$

$$L_-^m Y_e^m = (-1)^m L_- (Y_e^{-m})^*$$

$$\text{Segue } (Y_e^{-m})^* = (-1)^m Y_e^m$$

Se  $\Pi$  è l'operatore di parità

$$\Pi \psi(x, y, z) = \psi(-x, -y, -z) \quad \Pi^2 = \mathbb{1}$$

$$\Pi \vec{r} \Pi = -\vec{r} \quad \Pi \vec{p} \Pi = -\vec{p}$$

$$\begin{aligned} \Pi L_x \Pi &= \Pi (y p_z - z p_y) \Pi \\ &= \Pi y \underbrace{\Pi \Pi}_{\mathbb{1}} p_z \Pi - \Pi z \underbrace{\Pi \Pi}_{\mathbb{1}} p_y \Pi \\ &= (-y)(-p_z) - (-z)(-p_y) = L_x \end{aligned}$$

Stesso vale per le altre componenti:  $\Pi \vec{L} \Pi = \vec{L}$   
ossia  $\Pi \Pi \vec{L} \Pi = \Pi \vec{L} \Rightarrow \vec{L} \Pi = \Pi \vec{L} \Rightarrow [\vec{L}, \Pi] = 0$

L'operatore  $\Pi$  è ben definito sulla sfera (sotto parità un punto della sfera unitaria viene mappato in un punto della sfera unitaria) e quindi possiamo considerare la sua restrizione su  $\mathcal{H}_S$

Le armoniche sferiche non sono degeneri in  $\mathcal{H}_S$  e quindi sono autofunzioni di  $\Pi$

$$\Pi Y_{lm} = \lambda_{lm} Y_{lm} \quad \text{con } \lambda_{lm} = \pm 1$$

Dato che  $[\Pi, \vec{L}] = 0$  e quindi  $[\Pi, L_+] = [\Pi, L_-] = 0$   
gli autovalori non dipendono da  $m$ , ossia

$$\Pi Y_{\ell}^m = \lambda_{\ell} Y_{\ell}^m$$

Calcolo  $\lambda_{\ell}$

• I dimostrazione

Dato che  $P_{\ell}^m(x, y, z)$  è omogeneo di grado  $\ell$

$$\Pi P_{\ell}^m = (-1)^{\ell} P_{\ell}^m \quad [P_{\ell}^m = r^{\ell} Y_{\ell}^m]$$

Quindi

$$\Pi(r^l Y_e^m) = (-1)^l r^l Y_e^m$$

Sotto parità  $r \rightarrow r$  e quindi

$$\Pi Y_e^m = (-1)^l Y_e^m$$

• II dimostrazione

In coordinate sferiche  $(\theta, \phi) \xrightarrow{\Pi} (\pi - \theta, \pi + \phi)$

Quindi

$$\begin{aligned}\Pi Y_e^l(\theta, \phi) &= \Pi(C \sin^l \theta e^{il\phi}) \\ &= C \sin^l(\pi - \theta) e^{il(\pi + \phi)} \\ &= e^{il\pi} C \sin^l \theta e^{il\phi} = (-1)^l Y_e^l(\theta, \phi)\end{aligned}$$

Quindi  $\lambda_l = (-1)^l$ .

COMPORTAMENTO SOTTO INVERSIONE PIANO XY

Se  $I_{xy} \psi(x, y, z) = \psi(-x, -y, z)$  abbiamo

$$\begin{aligned}I_{xy} x I_{xy} &= -x & I_{xy} y I_{xy} &= -y & I_{xy} z I_{xy} &= z \\ I_{xy} p_x I_{xy} &= -p_x & I_{xy} p_y I_{xy} &= -p_y & I_{xy} p_z I_{xy} &= p_z\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}I_{xy} L_x I_{xy} &= I_{xy} (y p_z - z p_y) I_{xy} = (-y p_z - z(-p_y)) = -L_x \\ I_{xy} L_y I_{xy} &= I_{xy} (z p_x - x p_z) I_{xy} = z(-p_x) - (-x) p_z = -L_y \\ I_{xy} L_z I_{xy} &= I_{xy} (x p_y - y p_x) I_{xy} = (-x)(-p_y) - (-y)(-p_x) = +L_z\end{aligned}$$

Segue  $I_{xy} L^2 I_{xy} = L^2$

Quindi  $[I_{xy}, L^2] = [I_{xy}, L_z] = 0$

NOTA  $[I_{xy}, L_x] \neq 0$   $[I_{xy}, L_y] \neq 0$

Come per la parità possiamo concludere

$$I_{xy} Y_e^m = \lambda_{em} Y_e^m$$

Ci aspettiamo che gli autovalori dipendano da  $m$   
dato che  $I_{xy}$  NON commuta con  $L_x, L_y$

In coordinate sferiche  $(\theta, \varphi) \rightarrow (\theta, \varphi + \pi)$

$$\begin{aligned} I_{xy} Y_e^m &= I_{xy} (F_{em}(\theta) e^{im\phi}) = \\ &= F_{em}(\theta) e^{im(\phi + \pi)} = \\ &= F_{em}(\theta) e^{im\phi} e^{im\pi} = (-1)^m Y_e^m \end{aligned}$$

COMPORTAMENTO SOTTO INVERSIONE  $z$

$$I_z \psi(x, y, z) = \psi(x, y, -z)$$

Dato che  $I_z = \pi I_{xy}$

$$I_z Y_e^m = \pi I_{xy} Y_e^m = (-1)^{\ell+m} Y_e^m$$

Consideriamo un vettore  $V_i$  con regole di commutazione

$$[L_i, V_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} V_k$$

Facciamo vedere che soddisfa proprietà analoghe a quelle di uno stato con momento angolare 1

$$\textcircled{1} \text{ L'analogo di } L^2 |1m\rangle = \hbar^2 2 |1m\rangle$$

$$\sum_i [L_i, [L_i, V_j]] =$$

$$\sum_{ik} [L_i, i\hbar \epsilon_{ijk} V_k] = \sum_{ik} i\hbar \epsilon_{ijk} [L_i, V_k]$$

$$= \sum_{ikh} i\hbar \epsilon_{ijk} \epsilon_{ikh} i\hbar V_h$$

$$= -\hbar^2 \sum_{ikh} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ikh} V_h$$

$$\uparrow \epsilon_{ijk} = -\epsilon_{ikj}$$

$$= \hbar^2 \sum_{ikh} \epsilon_{ikj} \epsilon_{ikh} V_h$$

$$= \hbar^2 \sum_h V_h \sum_{ik} \epsilon_{ikj} \epsilon_{ikh}$$

Valutiamo l'ultima somma

$$\sum_{ik} \epsilon_{ikj} \epsilon_{ikh} \left[ \begin{array}{l} \text{Per avere un risultato non nullo} \\ \text{dobbiamo avere } i \neq k \neq j \\ i \neq k \neq h \end{array} \right]$$

Questo è impossibile se  $j \neq h$

Esempio  $j=1, h=2$ .

Per avere  $i \neq k \neq j$ ,  $ik$  possono assumere solo i valori  $i=2, k=3$  oppure  $i=3, k=2$

In entrambi i casi  $\epsilon_{ikh} = 0$  dato  $k=h=2, i=h=2$

Quindi

(2)

$$\sum_{1k} \epsilon_{1kj} \epsilon_{1kh} = A \delta_{jh}$$

Per calcolare  $A$  supponiamo  $j=h=1$

$$\sum_{1k} \epsilon_{1kj} \epsilon_{1kj} = \sum_{1k} (\epsilon_{1k1})^2 = \epsilon_{231}^2 + \epsilon_{321}^2 = 2$$

Quindi  $\sum_{1k} \epsilon_{1kj} \epsilon_{1kh} = 2 \delta_{jh}$

Quindi

$$\sum_i [L_i, [L_i, V_j]] = \hbar^2 \sum_h V_h 2 \delta_{jh} = 2 \hbar^2 V_j$$

Sugli operatori  $\sum_i [L_i, [L_i, 0]]$  è come applicare  $L^2 = \sum_i L_i^2$  a  $\psi$

② Autovalori di  $L_z$

Definiamo  $V_+ = V_x + i V_y$      $V_- = V_x - i V_y$

$$\begin{aligned} [L_z, V_+] &= [L_z, V_x] + i [L_z, V_y] \\ &= i \hbar \epsilon_{312} V_y + i i \hbar \epsilon_{321} V_x \\ &= i \hbar V_y - \hbar (-1) V_x = \hbar V_+ \end{aligned}$$

$$[L_z, V_z] = 0$$

$$[L_z, V_-] = -\hbar V_-$$

$V_+$  corrisponde a  $\left. \begin{array}{l} |1\ 1\rangle \\ |1\ 0\rangle \\ |1\ -1\rangle \end{array} \right\}$

$V_+, V_z, V_-$   
sono chiamate  
componenti  
SFERICHE  
di  $\vec{V}$ .

# NORMALIZZAZIONE

I vettori  $V_+$ ,  $V_-$  sono definiti a meno di costante moltiplicativa

$$\text{Dato che } L_+ |10\rangle = \sqrt{2}\hbar |11\rangle \quad L_- |11\rangle = \sqrt{2}\hbar |10\rangle$$

$$L_+ |1-1\rangle = \sqrt{2}\hbar |10\rangle \quad L_- |10\rangle = \sqrt{2}\hbar |1-1\rangle$$

Fissiamo le normalizzazioni in modo che

$$[L_+, V_-] = \sqrt{2}\hbar V_+$$

$$[L_+, V_+] = \sqrt{2}\hbar V_-$$

$$[L_-, V_+] = \sqrt{2}\hbar V_-$$

$$[L_-, V_-] = \sqrt{2}\hbar V_+$$

Quindi  $V_+ = k_1(V_x + iV_y)$   $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  da determinare

$$V_- = k_2(V_x - iV_y)$$

$$[L_+, V_-] = [L_x, V_-] + i[L_y, V_-]$$

$$= i\epsilon_{132}\hbar V_y + i\epsilon_{231}\hbar V_x$$

$$= -\hbar V_x - i\hbar V_y = -\hbar V_+ / k_1 \Rightarrow -\frac{1}{k_1} = \sqrt{2}$$

$$k_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$[L_+, V_+] = k_2[L_x + iL_y, V_x - iV_y]$$

$$= k_2(-i[L_x, V_y] - i[L_y, V_x])$$

$$= k_2(-i\epsilon_{132}\hbar V_z + i(-\epsilon_{231}\hbar V_z))$$

$$= 2k_2\hbar V_z$$

$$2k_2 = \sqrt{2} \quad k_2 = +\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$[L_-, V_+] = k_1[L_x - iL_y, V_x + iV_y]$$

$$= k_1(i[L_x, V_y] - i[L_y, V_x])$$

$$= 2k_1 i\epsilon_{132}\hbar V_z = -2\hbar k_1 V_z = \sqrt{2}\hbar V_z$$

$$\begin{aligned}
 [L_{-1}, V_2] &= [L_x + iL_y, V_z] \\
 &= i\hbar (-V_y + iV_x) \\
 &= \hbar (+V_x - iV_y) = \hbar/k_2 V_- = \sqrt{2} \hbar V_-
 \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{cases}
 V_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}} (V_x + iV_y) \\
 V_0 = V_z \\
 V_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (V_x - iV_y)
 \end{cases}$$

Notare che

$$Y_{11}^1 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x+iy}{r} \right)$$

$$Y_{11}^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left( \frac{z}{r} \right)$$

$$Y_{11}^{-1} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{x-iy}{r} \right)$$

$$Y_{11}^m = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \frac{1}{r} \times \text{componenti sferiche di } \vec{r}$$

Operatore di rotazione

Vogliamo calcolare  $U$  tale che

$$U\psi(r, \theta, \varphi) = \psi(r, \theta, \varphi') = \psi(r, \theta, \varphi - \alpha)$$

Si tratta di una traslazione in  $\varphi$  e quindi possiamo prendere

$$U = \exp\left(-\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

In fatti

$$e^{-\alpha \frac{\partial}{\partial \varphi}} f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\alpha)^n \frac{d^n f}{d\varphi^n} = (\text{serie di Taylor})$$

$$= f(\varphi - \alpha)$$

D'altro canto  $iL_z = i(-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}) = \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$

Quindi  $U = \exp\left(-\frac{i\alpha}{\hbar} L_z\right)$

Come si trasformano gli operatori

$$\begin{aligned} U x U^\dagger \psi(r, \theta, \varphi) &= \\ &= e^{-i\alpha L_z / \hbar} r \sin \theta \cos \varphi e^{i\alpha L_z / \hbar} \psi(r, \theta, \varphi) \\ &= e^{-i\alpha L_z / \hbar} r \sin \theta \cos \varphi \psi(r, \theta, \varphi + \alpha) \\ &= r \sin \theta \cos(\varphi - \alpha) \psi(r, \theta, \varphi) \\ &= (r \sin \theta \cos \varphi \cos \alpha + r \sin \theta \sin \varphi \sin \alpha) \psi(r, \theta, \varphi) \\ &= (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \psi(r, \theta, \varphi) \end{aligned}$$

Quindi  $U x U^\dagger = x \cos \alpha + y \sin \alpha = X'$

Analogamente  $U y U^\dagger = -x \sin \alpha + y \cos \alpha = Y'$

$$U z U^\dagger = z = Z'$$

Noniemo che

$$\begin{aligned} U x_+ U^\dagger &= U(x+iy) U^\dagger = \\ &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + i(-x \sin \alpha + y \cos \alpha) \\ &= x e^{-i\alpha} + iy e^{-i\alpha} = e^{-i\alpha} x_+ \end{aligned}$$

$$U x_- U^\dagger = U(x-iy) U^\dagger = e^{i\alpha} x_-$$

Rotazioni attorno ad asse generico (6)

$$U = \exp\left(-\frac{i\alpha}{\hbar} L_z\right)$$

è l'operatore per rotazioni attorno all'asse  $z$ . La stessa formula vale per rotazioni attorno ad assi arbitrari.

Se  $\hat{n}$  è il vettore dell'asse di rotazione

$$U = \exp\left(-\frac{i\alpha}{\hbar} \vec{L} \cdot \hat{n}\right)$$

## Regole di commutazione dei vettori (7)

PER DEFINIZIONE, un vettore si trasforma sotto rotazioni come il vettore  $\vec{r}$ .

Quindi deve valere, per ogni vettore  $V$ ,

$$\begin{cases} UV_+ U^\dagger = e^{-i\alpha} V_+ \\ UV_- U^\dagger = e^{i\alpha} V_- \end{cases}$$

Per  $\alpha$  piccolo  $U = 1 - \frac{i\alpha}{\hbar} L_z + O(\alpha^2)$ .

$$\begin{aligned} UV_+ U^\dagger &= \left(1 - \frac{i\alpha}{\hbar} L_z\right) V_+ \left(1 + \frac{i\alpha}{\hbar} L_z\right) + O(\alpha^2) = \\ &= V_+ - \frac{i\alpha}{\hbar} L_z V_+ + \frac{i\alpha}{\hbar} V_+ L_z + O(\alpha^2) = \\ &= V_+ - \frac{i\alpha}{\hbar} [L_z, V_+] + O(\alpha^2) \end{aligned}$$

Quindi deve valere

$$V_+ - \frac{i\alpha}{\hbar} [L_z, V_+] = (1 - i\alpha) V_+ = V_+ - i\alpha V_+ + O(\alpha^2)$$

$$\text{Segue } -\frac{i\alpha}{\hbar} [L_z, V_+] = -i\alpha V_+ \Rightarrow [L_z, V_+] = \hbar V_+$$

Analogamente

$$UV_- U^\dagger = e^{i\alpha} V_- \Rightarrow [L_z, V_-] = -\hbar V_-$$

$$UV_z U^\dagger = V_z \Rightarrow [L_z, V_z] = 0$$

Le regole di commutazione  $[L_z, V_i]$  sono fissate dal fatto che  $\vec{V}$  è un vettore.

Rotazioni attorno a  $x$  e  $y$  fissano  $[L_x, V_i]$  e  $[L_y, V_i]$

## REGOLE DI SELEZIONE PER L'AUTOVALORE DI $L_z$

a) Se  $[L_z, V_+] = \hbar V_+$   
abbiamo

$$\langle \ell' m' | [L_z, V_+] | \ell m \rangle = \langle \ell' m' | \hbar V_+ | \ell m \rangle$$

$$\langle \ell' m' | (L_z V_+ - V_+ L_z) | \ell m \rangle = \hbar \langle \ell' m' | V_+ | \ell m \rangle$$

$$\hbar (m' - m) \langle \ell' m' | V_+ | \ell m \rangle = \hbar \langle \ell' m' | V_+ | \ell m \rangle$$

$$\hbar (m' - m - 1) \langle \ell' m' | V_+ | \ell m \rangle = 0$$

$$\text{Quindi se } m' \neq m+1 \Rightarrow \langle \ell' m' | V_+ | \ell m \rangle = 0$$

b)  
Analogamente, se  $[L_z, V_-] = -\hbar V_-$   
abbiamo

$$\hbar (m' - m - 1) \langle \ell' m' | V_- | \ell m \rangle = 0$$

$$\text{Quindi se } m' \neq m-1 \Rightarrow \langle \ell' m' | V_- | \ell m \rangle = 0$$

c) Analogamente da  $[L_z, V_z] = 0$

abbiamo

$$\hbar (m' - m) \langle \ell' m' | V_z | \ell m \rangle = 0$$

$$\text{Quindi, se } m' \neq m \Rightarrow \langle \ell' m' | V_z | \ell m \rangle = 0$$