Esame di Meccanica Quantistica 28/01/2025

Esercizio 1. La dinamica di una particella di spin 3/2 è generata dalla Hamiltoniana

$$\hat{H} = \frac{\omega}{\hbar}\left(\hat{S}_x^2 + a\hat{S}_y^2\right), \tag{1}$$

dove $\hat{S}_i$ sono le componenti cartesiane dell'operatore di spin $\hat{\mathbf{S}}$ e $\hat{S}^2$ il suo modulo quadro. Il coefficiente a è reale positivo.

a) Ricavare l'espressione matriciale degli operatori $\hat{S}_x, \hat{S}_y$ ed $\hat{S}_z$ nella rappresentazione degli autoket di $\hat{S}_z$. Quali sono gli autovalori degli operatori $\hat{S}_x$ e $\hat{S}_y$?

b) Sia $|\psi\rangle$ lo stato tale che $\hat{S}_x|\psi\rangle = \frac{3}{2}\hbar|\psi\rangle$. Si determini l'espressione di questo stato in termini degli autoket di $\hat{S}_z$.

c) Si determini a in maniera tale che l'operatore $\hat{S}_z(t)$ in rappresentazione di Heisenberg sia indipendente dal tempo. Si usi tale valore in tutte le domande successive.

d) Si determinino gli autovalori di H specificando la degenerazione e una base di autoket per ogni livello.

e) Al tempo $t = 0$ il sistema viene preparato nello stato $|\psi\rangle$ definito precedentemente. Quale è la probabilità, al generico tempo t, di ottenere il risultato $+\frac{3}{2}\hbar$ come risultato di una misura di $\hat{S}_x$?

f) Si considerino ora due particelle identiche di spin 3/2 non interagenti. La Hamiltoniana di singola particella è quella specificata sopra, quindi la Hamiltoniana di spin del sistema di due particelle è data da

$$\hat{H}_2 = \hat{H} \otimes \hat{1} + \hat{1} \otimes \hat{H} \tag{2}$$

Assumendo che la funzione d'onda degli stati sia il prodotto di una funzione d'onda spaziale simmetrica per scambio e di uno spinore per le due particelle, si determinino gli autovalori di $\hat{H}_2$ ed una base per gli autoket di spin possibili.

Esercizio 2. Si considerino due particelle di spin 1/2 e di masse m_1 e $m_2 = 2m_1$ che interagiscono con Hamiltoniana

$$H = H_0 + H_1, \quad H_0 = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(r), \quad H_1 = \frac{\omega}{\hbar}(J^2 + 2\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2),$$

dove $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, $r = |\boldsymbol{r}|$, $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ sono gli spin delle due particelle, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare orbitale, $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$. Si consideri il problema nel sistema del centro di massa.
Lo spettro della Hamiltoniana H_0 nel sistema del centro di massa è supposto essere noto: le energie sono date da $E_0 < E_1 < E_2 < \ldots$; il livello fondamentale ha degenerazione 4, il primo livello eccitato ha degenerazione 12; entrambi i livelli sono discreti.

a) Assumendo $\hbar\omega \ll E_i - E_{i-1}$ per tutti gli $i \geq 1$, si calcolino le energie e le degenerazioni dei primi 5 livelli di H.

b) Se $|\psi_0\rangle$ è uno autostato di H_0 con energia E_0, vale $\langle\psi_0|r^2|\psi_0\rangle = a_0^2$, dove a_0 è supposto noto. Si calcolino i valori medi di x^2, y^2, z^2, su tutti gli stati corrispondenti al livello fondamentale ed al primo livello eccitato di H. **(continua nella pagina seguente)**

c) Si determinino tutti gli stati tali che: (i) una misura di energia fornisce sempre un risultato inferiore a $E_2 - 3\hbar\omega$; (ii) in una misura di L_z non viene mai osservato $L_z = 0$; (iii) in una misura di S_z non viene mai osservato $S_z = 0$; (iv) in una misura di J_z non vengono mai osservati $\pm 2\hbar$. Si calcoli il valor medio di H su tutti tali stati.

d) Tra tutti gli stati $|\psi\rangle$ individuati al punto c), si determinino quelli per cui $\langle\psi|L_x^2 S_x^2|\psi\rangle$ assume il valore minimo possibile.

Esercizio 1

(a) Calcoliamo preliminarmente le matrici di S_+, S_-

Dato che $\langle l\, m+1 | S_+ | l\, m \rangle = \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}$

abbiamo ($l=\frac{3}{2}$ nella formula precedente)

$$\langle \tfrac{3}{2}\ \tfrac{3}{2} | S_+ | \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2} \rangle = \hbar\sqrt{\frac{15}{4}-\frac{3}{4}} = \sqrt{3}\,\hbar$$

$$\langle \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2} | S_+ | \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2} \rangle = \hbar\sqrt{\frac{15}{4}+\frac{1}{4}} = 2\hbar$$

$$\langle \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{1}{2} | S_+ | \tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2} \rangle = \hbar\sqrt{\frac{15}{4}-\frac{3}{4}} = \sqrt{3}\,\hbar$$

Quindi

$$S_+ = \hbar\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = S_+^{\dagger} = \hbar\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-) = \hbar/2\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_y = -\frac{i}{2}(S_+ - S_-) = -\frac{i\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalori $\pm\frac{3}{2}\hbar, \pm\frac{1}{2}\hbar$ [come S_z]

L'operatore S_z è diagonale

$$S_z = \hbar\begin{pmatrix} 3/2 & & & 0 \\ & 1/2 & & \\ & & -1/2 & \\ 0 & & & -3/2 \end{pmatrix}$$

(b)

Vogliamo $|\psi\rangle = (a, b, c, d)$ tale che $S_x|\psi\rangle = \frac{3}{2}\hbar|\psi\rangle$

$$\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \frac{3}{2}\hbar\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}b = 3a \\ \sqrt{3}a + 2c = 3b \\ 2b + \sqrt{3}d = 3c \\ \sqrt{3}c = 3d \end{cases} \qquad b = \sqrt{3}a \quad c = \sqrt{3}d$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}a + 2\sqrt{3}d = 3\sqrt{3}a \\ 2\sqrt{3}a + \sqrt{3}d = 3\sqrt{3}d \end{cases} \qquad d = a$$

Quindi il vettore è $(a, \sqrt{3}a, \sqrt{3}a, a) = |\psi\rangle$

$\langle\psi|\psi\rangle = 8|a|^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ (con opportuna scelta di fase)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|\frac{3}{2}\right\rangle_z + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\left|\frac{1}{2}\right\rangle_z + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_z + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left|-\frac{3}{2}\right\rangle_z$$

(c) $\hat{S}_z(t)$ non dipende da t se e solo se $[S_z, H] = 0$

Calcoliamo

$$[S_z, S_x^2] = S_x[S_z, S_x] + [S_z, S_x]S_x$$
$$= i\hbar(S_xS_y + S_yS_x)$$

$$[S_z, S_y^2] = S_y[S_z, S_y] + [S_z, S_y]S_y$$
$$= -i\hbar S_yS_x - i\hbar S_xS_y = -i\hbar(S_xS_y + S_yS_x)$$

Quindi

$$[S_z, H] = \frac{\omega}{\hbar}(i\hbar)(S_xS_y + S_yS_x)(1 - a)$$

~~Quindi~~ Verifichiamo che $S_xS_y + S_yS_x \neq 0$ [questa combinazione è nulla solo per lo spin 1/2]

$$S_x S_y = -\frac{i\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{i\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} -3 & 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S_y S_x = (S_x S_y)^{+} = \frac{i\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} -3 & 0 & -2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$S_x S_y + S_y S_x = \frac{i\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4\sqrt{3} \\ 4\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Dato che $S_x S_y + S_y S_x \neq 0$, necessariamente $a = 1$

d) Per $a = 1$ $\quad H = \frac{\omega}{\hbar}\left(S^2 - S_z^2\right) = \frac{15}{4}\hbar\omega - \frac{\omega}{\hbar}S_z^2$

Livelli

S.F.: $\quad S_z = \pm\frac{3}{2}\hbar \qquad E = \frac{15}{4}\hbar\omega - \frac{9}{4}\hbar\omega = \frac{3}{2}\hbar\omega$ $\quad$ deg 2

I ecc $\quad S_z = \pm\frac{\hbar}{2} \qquad E = \frac{15}{4}\hbar\omega - \frac{1}{4}\hbar\omega = \frac{7}{2}\hbar\omega$ $\quad$ deg. 2

e)

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-iE_0 t/\hbar}\left(\left|\tfrac{3}{2}\right\rangle_z + \left|-\tfrac{3}{2}\right\rangle_z\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-iE_1 t/\hbar}\left(\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_z + \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_z\right)$$

$$E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad E_1 = \frac{7}{2}\hbar\omega \qquad E_1 - E_0 = 2\hbar\omega$$

(a meno di fase) $$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\left|\tfrac{3}{2}\right\rangle_z + \left|-\tfrac{3}{2}\right\rangle_z\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}\, e^{-2i\omega t}\left(\left|\tfrac{1}{2}\right\rangle_z + \left|-\tfrac{1}{2}\right\rangle_z\right)$$

La probabilità richiesta è

$$P = \left|{}_x\left\langle \tfrac{3}{2} \middle| \psi(t)\right\rangle\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{8} e^{-2i\omega t} + \frac{3}{8} e^{-2i\omega t}\right|^2$$

$$= \frac{1}{16}\left|1 + 3e^{-2i\omega t}\right|^2 = \frac{1}{16}\left(1 + 9 + 2\cos 2\omega t\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(10 + 2\cos 2\omega t\right) = \frac{1}{8}\left(5 + 3\cos \omega t\right)$$

Come atteso $P = 1$ per $t = 0$.

f) In assenza del principio di Pauli gli stati sono

i) $\left|\pm\tfrac{3}{2}\right\rangle_1 \left|\pm\tfrac{3}{2}\right\rangle_2$ (tutte le combinazioni di segni)

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{3}{2}\hbar\omega = 3\hbar\omega \qquad [4 \text{ STATI}]$$

ii) $\left|\pm\tfrac{3}{2}\right\rangle_1 \left|\pm\tfrac{1}{2}\right\rangle_2$ e $\left|\pm\tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\pm\tfrac{3}{2}\right\rangle_2$ (tutte le combinazioni)

$$E = \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{7}{2}\hbar\omega = 5\hbar\omega \qquad [8 \text{ STATI}]$$

iii) $\left|\pm\tfrac{1}{2}\right\rangle_1 \left|\pm\tfrac{1}{2}\right\rangle_2$ (tutte le combinazioni)

$$E = \frac{7}{2}\hbar\omega + \frac{7}{2}\hbar\omega = 7\hbar\omega \qquad [4 \text{ STATI}]$$

Se la parte spaziale è simmetrica la parte di spin è antisimmetrica

stati 1) un solo stato antisimmetrico

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{3}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{3}{2}\right\rangle_2-\left|-\frac{3}{2}\right\rangle_1\left|\frac{3}{2}\right\rangle_2\right)$$

stati 2) 4 stati antisimmetrici

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{3}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2-\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{3}{2}\right\rangle_2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{3}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2-\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{3}{2}\right\rangle_2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|-\frac{3}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2-\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{3}{2}\right\rangle_2\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|-\frac{3}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2-\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{3}{2}\right\rangle_2\right)$$

stati 3) 1 stato antisimmetrico

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_2-\left|-\frac{1}{2}\right\rangle_1\left|\frac{1}{2}\right\rangle_2\right.$$

SPETTRO: $\begin{cases} E=3\hbar\omega & \text{non degenere} \\ E=5\hbar\omega & \text{deg. } 4 \\ E=7\hbar\omega & \text{non degenere} \end{cases}$

ADDENDO

Alla domanda c) abbiamo verificato esplicitamente che $A=S_xS_y+S_yS_x$ non sia l'operatore nullo

Più formalmente basta notare che $A=\frac{1}{2i}(S_+^2-S_-^2)$

Se lo spin è ≥ 1 è immediato verificare $A\neq 0$

Per lo spin $1/2$ $S_+^2=S_-^2=0$ e $A=0$ come atteso

D'altra parte per lo spin $1/2$ $S_x^2=S_y^2=\frac{\hbar^2}{4}\mathbb{I}$ e

$H=\frac{\omega}{\hbar}(1+a)\frac{\hbar^2}{4}\mathbb{I}$ commuta con ogni operatore per ogni a

Alla domanda c) si poteva pure ragionare nel seguente modo, riscrivendo

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\left(S_x^2 + a\, S_y^2 \right) \qquad S_x^2 = S^2 - S_z^2 - S_y^2$$

$$= \frac{\omega}{\hbar}\left[S^2 - S_z^2 + (a-1)\, S_y^2 \right]$$

Quindi

$$[H, S_z] = \frac{\omega}{\hbar}(a-1)\left[S_z, S_y^2 \right]$$

Si noti che $[S_z, S_y] \neq 0$ non implica necessariamente $[S_z, S_y^2] \neq 0$

Infatti se $[A, B] \neq 0$ si può benissimo avere $[A, B^2] = 0$ oppure $[A^2, B] = 0$

Esempio $A = I$ (inversione spaziale)
$B = \hat{x}$

Vale $[I, \hat{x}] \neq 0$ ma $[I, \hat{x}^2] = [I^2, \hat{x}] = 0$

Esercizio 2

Per interpretare i dati sullo spettro di Ho notiamo che nel CM

$$H_0 = \frac{p^2}{2\mu} + V(r)$$

che è la Hamiltoniana per un problema con potenziale centrale. Ragioniamo innanzitutto in ASSENZA DI SPIN. Ricordiamo i risultati generali. Le energie dei livelli sono $\{\mathcal{E}_{p,\ell}\}$ $p:0,1\ldots$ ed ℓ è il valore del momento angolare. Vale

i) $\mathcal{E}_{0,\ell} < \mathcal{E}_{1,\ell} < \mathcal{E}_{2,\ell} \ldots$
Ad ogni energia $\mathcal{E}_{p,\ell}$ è associata una <u>UNICA</u> funzione radiale $R_{p,\ell}(r)$. Quindi vi è una base $R_{p,\ell} Y_\ell^m$: $(2\ell+1)$ stati

ii) $\mathcal{E}_{0,0} < \mathcal{E}_{0,1} < \mathcal{E}_{0,2} < \mathcal{E}_{0,3}$
[diseguagliante strette, mai "=", dato che il contributo centrifugo è strettamente positivo]

IN <u>ASSENZA DI SPIN</u>

$E_0 = \mathcal{E}_{0,0}$ livello con $L=0$ NON DEGENERE

per il I eccitato 3 possibilità

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{1,0} \quad \text{se } \mathcal{E}_{1,0} < \mathcal{E}_{0,1} & \text{livello con } L=0 \text{ non deg.} \\ \mathcal{E}_{0,1} \quad \text{se } \mathcal{E}_{1,0} > \mathcal{E}_{0,1} & \text{livello con } L=1 \text{ deg } 3 \\ \mathcal{E}_{1,0} = \mathcal{E}_{0,1} & \text{livello con } L=0,1 \text{ deg. } 4 \end{cases}$$

[degenerazione accidentale come nel caso Coulombiano]

Consideriamo ora lo spin. Dato che masse sono diverse le particelle sono distinguibili. Quindi vi sono sempre 4 STATI DI SPIN POSSIBILI

Quindi

STATO FOND: $E = \mathcal{E}_{0,0}$ $\quad L=0 \quad$ deg. $1 \times 4 = 4$

<u>I ecc</u>:

tre possibilità

$$E_1 = \begin{cases} \mathcal{E}_{1,0} & L=0 \quad \text{deg.} \quad 1\times 4 = 4 \\ \mathcal{E}_{0,1} & L=1 \quad \text{deg} \quad 3 \times 4 = 12 \\ \mathcal{E}_{1,0} = \mathcal{E}_{0,1} & L=0 \ \& \ L=1 \quad \text{deg} \quad 4 * 4 = 16 \end{cases}$$

Sapendo che il I eccitato ha degenerazione 12 concludiamo che il I eccitato è uno stato con $L=1$

SPETTRO DI H_0

$E_0 \ \underline{\ L=0\ }$ deg 4

$E_1 \ \underline{\ L=1\ }$ deg. 12

(a)

$$H_1 = \frac{\omega}{\hbar}\left(J^2 + S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) = \frac{\omega}{\hbar}\left(J^2 + S^2\right) - \frac{3}{2}\hbar\omega$$

dove $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$.

- stati di energia E_0 per H_0

Vi sono 4 stati con parte spaziale $L=0$ e parte di spin χ_{spin}. Una base è

$$|\overset{n}{0}\,\overset{l}{0}\,\overset{m}{0}\rangle|\overset{S}{0}\,\overset{S_z}{0}\rangle , \quad |0\,0\,0\rangle|1\,S_z\rangle$$

Dato che $L=0$, $J = 1,0$. Quindi il livello si separa in

- $L=0 \quad S=0 \quad J=0 \qquad E = E_0 - \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad$ deg. 1
- $L=0 \quad S=1 \quad J=1 \qquad E = E_0 + 4\hbar\omega - \frac{3}{2}\hbar\omega \qquad$ deg. 3

$\qquad = E_0 + \frac{5}{2}\hbar\omega$

∘ stati con energia E_1 per H_0

Una base è (per H_0)

$$|1\,1\,m\rangle|0\,0\rangle \qquad L=1 \quad S=0 \longrightarrow J=1$$

$$|1\,1\,m\rangle|1\,S_z\rangle \qquad L=1 \quad S=1 \;\begin{cases} J=2 \\ J=1 \\ J=0 \end{cases}$$

Quindi le energie sono

$L=1 \quad S=0 \quad J=1 \qquad E = E_1 + \frac{\omega}{\hbar}\hbar^2(2) - \frac{3}{2}\hbar\omega = E_1 + \frac{\hbar\omega}{2}$

$L=1 \quad S=1 \quad J=2 \qquad E = E_1 + \hbar\omega\, 8 - \frac{3}{2}\hbar\omega = E_1 + \frac{13}{2}\hbar\omega$

$L=1 \quad S=1 \quad J=1 \qquad E = E_1 + \hbar\omega\, 4 - \frac{3}{2}\hbar\omega = E_1 + \frac{5}{2}\hbar\omega$

$L=1 \quad S=1 \quad J=0 \qquad E = E_1 + \hbar\omega\, 2 - \frac{3}{2}\hbar\omega = E_1 + \frac{\hbar\omega}{2}$

Quindi (spettro): $n\ \ell\ s\ J\ J_z$

$E = E_1 + \frac{\hbar\omega}{2} \qquad \begin{cases} |1\,2\,1\,0\,1\,J_z\rangle & \text{deg } 3 \\ |1\,2\,1\,1\,0\,0\rangle & \text{deg } 1 \end{cases} \Big\}$ deg. 4

$E = E_1 + \frac{5}{2}\hbar\omega \qquad |1\,2\,1\,1\,1\,J_z\rangle$ deg. 3

$E = E_1 + \frac{13}{2}\hbar\omega \qquad |1\,2\,1\,1\,2\,J_z\rangle$ deg. 5

b)

Gli autostati di H_0 (energia E_0) e gli autostati di H corrispondenti ai due livelli più bassi sono tutti della forma $\psi(r)\chi_{spin}$ con $\psi(r)$ uguale per tutti gli stati. Inoltre $\psi(r)$ dipende solo da $|r|$ dato che è uno stato con $\ell=0$. Quindi

$$\langle\psi_0|r^2|\psi_0\rangle = \int d^3r\, |\psi(r)|^2 r^2$$

$$\langle \text{autost di } H | \begin{matrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{matrix} | \text{autostati di } H\rangle = \int d^3r\, |\psi(r)|^2 \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$$

Dato che $\psi(r)$ non dipende dagli angoli segue $\langle x^2\rangle = \langle y^2\rangle = \langle z^2\rangle$. Tenuto conto che $\langle r^2\rangle = \langle x^2+y^2+z^2\rangle = a_0^2 \longrightarrow$

$$\langle \text{autost } H\,|\,x^2\,|\,\text{autost } H\rangle = \frac{1}{3}a_0^2$$
$$\langle \text{autost } H\,|\,y^2\,|\,\text{autost } H\rangle = \frac{1}{3}a_0^2$$
$$\langle \text{autost } H\,|\,z^2\,|\,\text{autost } H\rangle = \frac{1}{3}a_0^2$$

Si poteva ottenere lo stesso risultato IN MODO <u>MOLTO PIÙ LABORIOSO</u> facendo il calcolo esplicito.

Se $\int d^3r\,|\psi(r)|^2 r^2 = a_0^2 \Rightarrow \int_0^\infty r^2 dr\,|\psi(r)|^2 r^2 = \frac{a_0^2}{4\pi}$

Quindi

$$\int d^3r\,|\psi(r)|^2 x^2 = \int r^2 dr\,|\psi(r)|^2 r^2 \int d\Omega \sin^2\theta \cos^2\phi$$
$$= \frac{a_0^2}{4\pi}\int_{-1}^{1} d\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)\int_0^{2\pi} d\phi\,\frac{1+\cos 2\phi}{2}$$
$$= \frac{a_0^2}{4\pi}\cdot 2\int_0^1 dx\,(1-x^2)\cdot\frac{2\pi}{2}$$
$$= \frac{a_0^2}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{a_0^2}{3}$$

$$\int d^3r\,|\psi(r)|^2 y^2 = \int r^2 dr\,|\psi(r)|^2 r^2 \int d\Omega \sin^2\theta \sin^2\phi =$$
$$(\text{come sopra}) = \frac{a_0^2}{3}$$

$$\int d^3r\,|\psi(r)|^2 z^2 = \int r^2 dr\,|\psi(r)|^2 r^2 \int d\Omega \cos^2\theta$$
$$= \frac{a_0^2}{4\pi}\,2\pi\int d\cos\theta\,\cos^2\theta = \frac{a_0^2}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{a_0^2}{3}$$

(c)

La condizione $E < E_2 - 3\hbar\omega$ implica che devono essere considerati solo gli stati dei primi 5 livelli di H che sono combinazioni lineari degli autostati di H_0 (primi due livelli). Dato che le informazioni sugli stati riguardano L_z, S_z, $J_z = L_z + S_z$ è comodo vedere lo stato cercato come combinazione degli stati

$$\begin{array}{l} \quad\; n\;\ell\;m\quad s\;S_z \\ \begin{cases} |1\,0\,0\,0\rangle|0\,0\rangle \\ |1\,0\,0\,0\;|1\,S_z\rangle \\ |1\,1\,1\,m\rangle|0\,0\rangle \\ |1\,1\,1\,m\rangle|1\,S_z\rangle \end{cases} \end{array}$$

Dato che $L_z = 0$ non è mai osservato, abbiamo

$$m = \pm 1 \quad e \quad \ell = 1$$

Dato che $S_z = 0$ non è mai osservato, abbiamo

$$S_z = \pm 1 \quad e \quad S = 1$$

Dato che una misura di J_z non fornisce mai $\pm 2\hbar$ deve valere $m + S_z \neq 2$ e $m + S_z \neq -2$.

Vi sono quindi due soli stati possibili

$$|1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle \quad e \quad |1\;1\;-1\rangle|1\;1\rangle$$

Quindi gli stati possibili sono

$$|\psi\rangle = \alpha|1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle + \beta|1\;1\;-1\rangle|1\,1\rangle$$

con $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ affinchè $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

~~Calcoliamo~~ Esprimiamo $|\psi\rangle$ nella base

$|n\, l\, s\, j\, j_z\rangle_J$

Tabelle CG 1×1:

$$|1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{6}}\,|1\,1\,1\,2\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|1\,1\,1\,1\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\,1\,1\,0\,0\rangle$$

$$|1\,1\,-1\rangle|1\,1\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{6}}\,|1\,1\,1\,2\,0\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,|1\,1\,1\,1\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\,1\,1\,0\,0\rangle$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{6}}(\alpha+\beta)|1\,1\,1\,2\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{2}}(\alpha-\beta)|1\,1\,1\,1\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}(\alpha+\beta)|1\,1\,1\,0\,0\rangle$$

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{6}|\alpha+\beta|^2\left(E_1+\frac{13}{2}\hbar\omega\right) + \frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2\left(E_1+\frac{5}{2}\hbar\omega\right) + \frac{1}{3}|\alpha+\beta|^2\left(E_1+\frac{\hbar\omega}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{6}|\alpha+\beta|^2\left(3E_1+\frac{15}{2}\hbar\omega\right) + \frac{1}{2}\left(E_1+\frac{5}{2}\hbar\omega\right)|\alpha-\beta|^2$$

$$= \left(|\alpha+\beta|^2+|\alpha-\beta|^2\right)\frac{1}{2}\left(E_1+\frac{5}{2}\hbar\omega\right)$$

$$= \left(|\alpha|^2+|\beta|^2+\alpha^*\beta+\alpha\beta^*+|\alpha|^2+|\beta|^2-\alpha^*\beta-\alpha\beta^*\right)\frac{1}{2}\left(E_1+\frac{5\hbar\omega}{2}\right)$$

$$= \left(|\alpha|^2+|\beta|^2\right)\left(E_1+\frac{5}{2}\hbar\omega\right) = E_1+\frac{5}{2}\hbar\omega$$

d)

$$\langle\psi|L_x^2 S_x^2|\psi\rangle = \left\| L_x S_x|\psi\rangle \right\|^2$$

Se

$$|\psi\rangle = \alpha|1\,1\,1\rangle|1\,-1\rangle + \beta|1\,1\,-1\rangle|1\;1\rangle$$

calcoliamo

$$L_+|\psi\rangle = \beta\hbar\sqrt{2}\,|1\,1\,0\rangle|1\;1\rangle$$

$$L_-|\psi\rangle = \alpha\hbar\sqrt{2}\,|1\,1\,0\rangle|1\,-1\rangle$$

Quindi

$$L_x|\psi\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|\psi\rangle = \hbar\frac{\sqrt{2}}{2}|1\,1\,0\rangle\left(\alpha|1\,-1\rangle + \beta|1\;1\rangle\right)$$

Se $\chi = \alpha|1\,-1\rangle + \beta|1\;1\rangle$ è la parte di Spin

$$S_x\chi = \frac{S_+}{2}\chi + \frac{S_-}{2}\chi$$

$$= \frac{\hbar}{2}\sqrt{2}\,\alpha|1\;0\rangle + \frac{\hbar}{2}\sqrt{2}\,\beta|1\,0\rangle$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar(\alpha+\beta)|1\,0\rangle$$

Quindi

$$L_xS_x|\psi\rangle = \hbar\frac{\sqrt{2}}{2}|1\,1\,0\rangle \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\hbar(\alpha+\beta)|1\,0\rangle$$

$$= \frac{\hbar^2}{2}(\alpha+\beta)|1\,1\,0\rangle|1\,0\rangle$$

Quindi

$$\langle\psi|L_x^2S_x^2|\psi\rangle = \frac{\hbar^4}{4}|\alpha+\beta|^2$$

Il valore minimo si ottiene per $\alpha+\beta=0$, $\alpha=-\beta$

Dato che $|\alpha|^2+|\beta|^2=1$ segue $\alpha=-\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ a meno di fase comune

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\overset{n\,\ell\,m}{|1\,1\,1\rangle}\overset{s\;s_z}{|1\,-1\rangle} - |1\,1\,-1\rangle|1\,1\rangle\Big]$$

Esame di Meccanica Quantistica 14/02/2025

Esercizio 1. Si consideri il seguente potenziale unidimensionale,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < -L \\ V_{buca}(x) & \text{per } -L < x < 0 \\ V_1 & \text{per } x > 0\,, \end{cases}$$

con $V_{buca}(x) < 0$ e $V_1 > 0$. Si vogliono determinare le proprietà di $V(x)$ attraverso opportuni esperimenti di scattering. Si inviano in particolare degli elettroni emessi con impulso $p > 0$ da una sorgente posta a $x = -\infty$. La preparazione dello stato iniziale è tale per cui la descrizione di tutti i processi di scattering considerati può essere ricavata a partire dalle autofunzioni dell'Hamiltoniana.

a) In un primo esperimento, si pone un rilevatore di elettroni a $x = x_0 \gg L$. Si osserva che per impulsi minori di un certo valore soglia p_s non vi sono conteggi nel rivelatore. Sapendo che $p_s c = 50\,\text{keV}$, dove c è la velocità della luce, si calcoli il valore di V_1 in keV. Si utlizzi $m_e c^2 = 500$ keV, dove m_e è la massa dell'elettrone.

b) Per $V_{buca}(x) = 0$, determinare i coefficienti di riflessione $R(p)$ e trasmissione $T(p)$ per valori dell'impulso $p > p_s$. Disegnare il grafico di $R(p)$ e $T(p)$.

c) Si consideri ora $p < p_s$ con $V_{buca}(x)$ generico. Facendo uso della corrente di densità di probabilità, si dimostri che l'onda riflessa non ha attenuazione (ovvero $R = 1$) ma presenta in generale uno sfasamento φ rispetto all'onda incidente. Si calcoli lo sfasamento nel caso $V_{buca}(x) = 0$. Lo sfasamento è definito come la differenza delle fasi delle ampiezze complesse dell'onda riflessa e dell'onda incidente.

d) Modellizzando $V_{buca}(x) = -V_0$ con $V_0 > 0$, calcolare lo sfasamento come funzione dell'energia dell'onda incidente per $V_1 \gg E$, $V_1 \gg V_0$, ossia nel limite $V_1 \to \infty$. Si verifichi che se $V_0 = 0$ esso si riduce all'espressione calcolata in precedenza per $E/V_1 \to 0$.

Esercizio 2. La funzione d'onda spinoriale di una particella di spin 1 e massa m, libera di muoversi in una dimensione, è data da

$$\psi = A e^{-x^2/(2\sigma^2)} \left(e^{ikx} \chi_+ + i\sqrt{2} e^{-ikx} \chi_- \right),$$

dove gli spinori normalizzati $\chi_\pm$ sono autofunzioni di S_z con autovalore $\pm\hbar$.

a) Si calcoli la costante A in modo che ψ sia normalizzata. Se viene effettuata una misura di S_z su ψ, quali valori sono ottenuti e con quale probabilità?

b) Si calcolino i valori medi $\langle\psi|x|\psi\rangle$ e $\langle\psi|p|\psi\rangle$.

c) Il sistema evolve con Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + bxS_z.$$

Se $b = m^\alpha \hbar^\beta \omega^\gamma$, si determinino gli esponenti α, β, γ con argomenti dimensionali. Se $\psi(t)$ è l'evoluto temporale di ψ, si calcoli $\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle$.

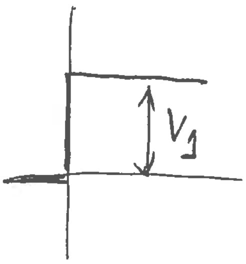
d) Si esprimano le derivate temporali dei valori medi $\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle$ e $\langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle$, in termini dei valori medi stessi. Si risolvano tali equazioni, determinando $\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle$ e $\langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle$ al variare di t.

Esercizio 1

a) Il valore soglia è definito da

$$\frac{p_s^2}{2m_e} = V_1 \quad \text{per cui} \quad V_1 = \frac{(p_s c)^2}{2m_e c^2} = \frac{50^2}{2\cdot 500} = \frac{2500}{1000} = 2.5\,\text{ke}$$

b)



Risolvendo l'equazione di Schrödinger per $x<0$ e $x>0$ otteniamo

$$x<0 \quad \psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \qquad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$x>0 \quad \psi = Ce^{i\lambda x} + De^{-i\lambda x} \qquad \lambda = \sqrt{\frac{2m(E-V_1)}{\hbar^2}}$$

Dato che la sorgente è posta in $x=-\infty$ dobbiamo porre $D=0$. Imponendo la continuità di ψ e ψ' per $x=0$ otteniamo

$$\begin{cases} A+B=C \\ ik(A-B) = i\lambda C \end{cases} \qquad \begin{cases} A+B=C \\ A-B = \frac{\lambda}{k} C \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A = \left(1+\frac{\lambda}{k}\right)C \\ 2B = \left(1-\frac{\lambda}{k}\right)C \end{cases} \qquad \begin{aligned} C &= \frac{2}{1+\lambda/k}A \\ B &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{k}\right)C = \frac{1-\lambda/k}{1+\lambda/k}A \end{aligned}$$

Correnti $\quad J_{inc} = \frac{\hbar k}{m}|A|^2 \quad J_{rifl} = \frac{\hbar k}{m}|B|^2 \quad J_{trasm} = \frac{\hbar\lambda}{m}|C|^2$

$$T = \frac{J_{trasm}}{J_{inc}} = \frac{\lambda}{k}\frac{|C|^2}{|A|^2} = \frac{4\lambda/k}{(1+\lambda/k)^2}$$

$$R = \frac{J_{rifl}}{J_{inc}} = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(1-\lambda/k)^2}{(1+\lambda/k)^2}$$

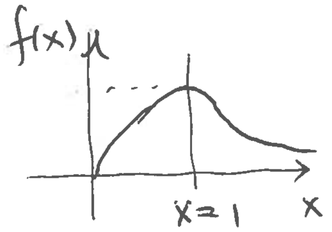
$T+R=1$ (check)

Grafico di T

Dato che $\frac{\lambda}{k} = \sqrt{1 - \frac{V_1}{E}}$, $E \geq V_1$, $\frac{\lambda}{k}$ varia tra $\lambda/k = 0$ $[E = V_1]$ e $\lambda/k = 1$ $[E = \infty]$

Grafico di $f(x) = \frac{4x}{(1+x)^2}$ $\qquad f(0) = 0 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

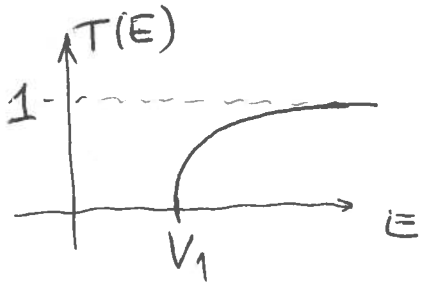
$$f'(x) = \frac{4}{(1+x)^2} - \frac{8x}{(1+x)^3} = \frac{4}{(1+x)^3}\left[1+x-2x\right] = \frac{4(1-x)}{(1+x)^3}$$

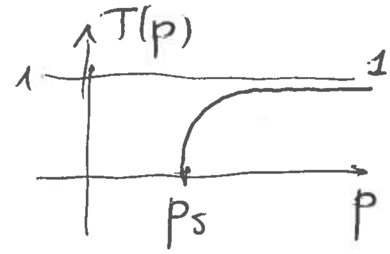


$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \qquad f(1) = 1$

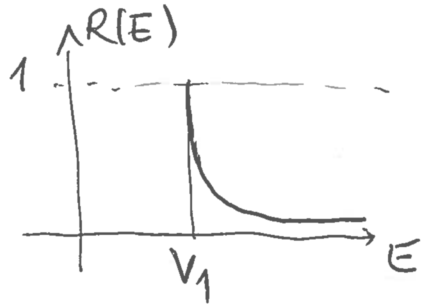
$f(x)$ è crescente per $x \in [0,1]$

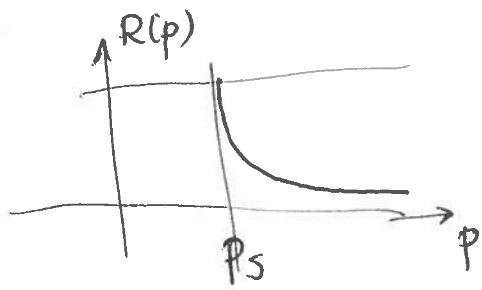
Come atteso T è funzione crescente di $\frac{\lambda}{k}$ e quindi di E che assume i valori $T=0$ per $E = V_1$ e $T = 1$ per $E = \infty$. Per $E \approx V_1$ $\quad T \approx 4\frac{\lambda}{k} = 4\sqrt{1 - \frac{V_1}{E}} \approx 4\frac{\sqrt{E - V_1}}{\sqrt{V_1}}$

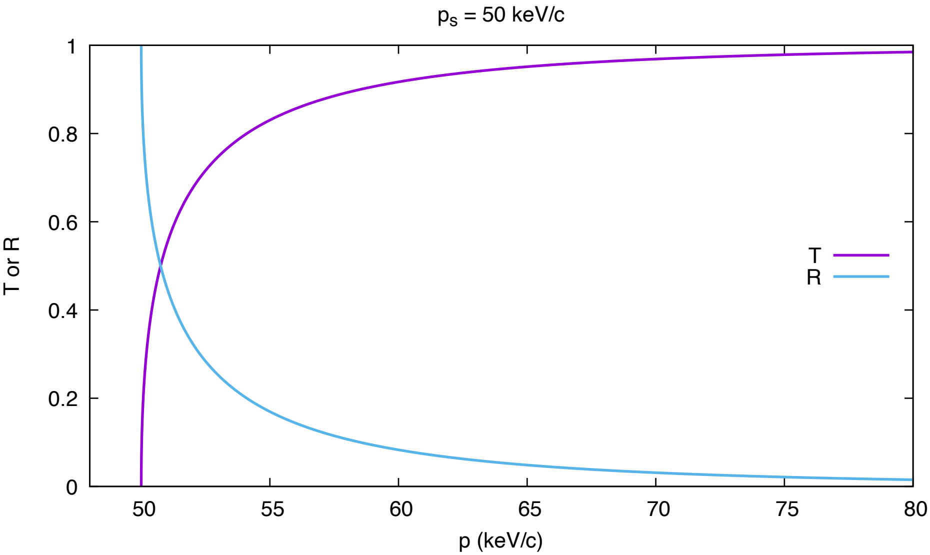




Dato che $R = 1 - T$

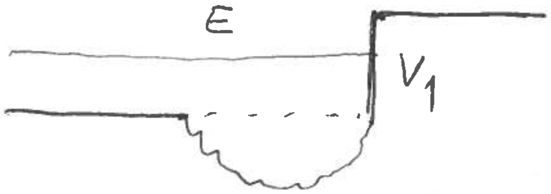






p_s = 50 keV/c
T or R
p (keV/c)
T
R
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
50
55
60
65
70
75
80

c)



Dato che $E<V_1$ non vi è trasmissione, $T=0$. $[J_{trasm}=0]$

Quindi $R=1-T=1$

Per $x<-L$ $\quad \psi = Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$

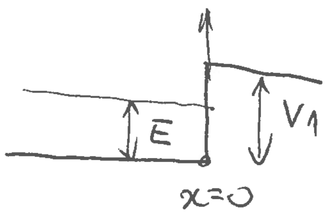
$$= A\left(e^{ikx}+\frac{B}{A}e^{-ikx}\right)$$

In generale B/A è complesso con modulo 1

Infatti $R=\left|\frac{B}{A}\right|^2=1 \Longrightarrow \quad \frac{B}{A}=e^{+i\varphi}$

$$\psi = A\left(e^{ikx}+e^{-ikx+i\varphi}\right)$$

Calcolo di φ per $V_{buca}(x)=0$



Per $E<V_1$

$x>0 \quad \psi(x)=Ce^{-\lambda x} \qquad \lambda=\sqrt{\frac{2m(V_1-E)}{\hbar^2}}$

$x<0 \quad \psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx} \qquad k=\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

La continuità di ψ e ψ' a $x=0$ impone

$$\begin{cases} A+B=C \\ ik(A-B)=-\lambda C \end{cases} \qquad \begin{cases} A+B=C \\ A-B=\frac{i\lambda}{k}C \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2A=\left(1+i\frac{\lambda}{k}\right)C \\ 2B=\left(1-i\frac{\lambda}{k}\right)C \end{cases} \qquad \frac{B}{A}=\frac{1-i\frac{\lambda}{k}}{1+i\frac{\lambda}{k}}$$

Definiamo a, α tali che

$$1 + i\frac{\lambda}{k} = a e^{i\alpha} \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 + \frac{\lambda^2}{k^2} \\ a\cos\alpha = 1 \\ a\sin\alpha = \frac{\lambda}{k} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \sqrt{1 + \frac{\lambda^2}{k^2}} \\ \tan\alpha = \frac{\lambda}{k} \end{cases} \qquad \alpha = \arctan\left(\frac{\lambda}{k}\right)$$

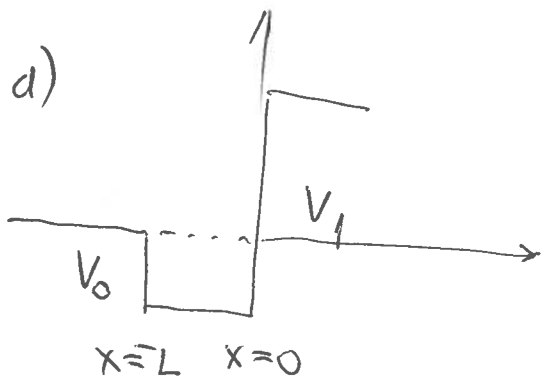
Quindi

$$\frac{B}{A} = \frac{a e^{-i\alpha}}{a e^{+i\alpha}} = e^{-2i\alpha}$$

Segue $\quad \varphi = -2\alpha = -2\arctan\frac{\lambda}{k}$

$$= -2\arctan\sqrt{\frac{V_1}{E} - 1}$$

d)



Soluzione generica per $E < V_1$ $(p < p_s)$

$$\begin{cases} x < -L & \psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx} \\ -L < x < 0 & \psi = Ce^{i\mu x} + De^{-i\mu x} \\ x > 0 & \psi = Fe^{-\lambda x} \end{cases}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\mu = \sqrt{\frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2m(V_1-E)}{\hbar^2}}$$

Per $x=0$ la continuità di ψ e ψ' impone

$$\begin{cases} C+D = F \\ i\mu(C-D) = -\lambda F \end{cases} \qquad \begin{cases} C+D = F \\ C-D = i\dfrac{\lambda}{\mu} F \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2C = \left(1+i\dfrac{\lambda}{\mu}\right) F \\ 2D = \left(1-\dfrac{i\lambda}{\mu}\right) F \end{cases} \qquad \frac{D}{C} = \frac{1-\dfrac{i\lambda}{\mu}}{1+\dfrac{i\lambda}{\mu}}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \sqrt{\frac{V_1-E}{V_0+E}} = \sqrt{\frac{1-E/V_1}{\dfrac{V_0}{V_1}+\dfrac{E}{V_1}}} \longrightarrow +\infty$$

per $V_1 \gg (E, V_0)$ (ossia per $V_1 \to \infty$ a fisso E, V_0)

Quindi $D/C = -1$ nel limite

Quindi per $-L<x<0$ abbiamo

$$\psi = C(e^{i\mu x} - e^{-i\mu x})$$

con $\psi(0)=0$. Questo risultato corrisponde al caso $V_1 = +\infty$ (barriera infinita) [Si poteva ovviamente dire immediatamente]

Per $x=-L$ la continuità di ψ e ψ' impone

$$\begin{cases} Ae^{-ikL} + Be^{ikL} = Ce^{-i\mu L} - Ce^{i\mu L} = -2iC\sin\mu L \\ ik(Ae^{-ikL} - Be^{ikL}) = i\mu C(e^{-i\mu L} + e^{i\mu L}) = 2i\mu C\cos\mu L \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ae^{-ikL} + Be^{ikL} = -2iC\sin\mu L \\ Ae^{-ikL} - Be^{ikL} = 2\dfrac{\mu}{k} C\cos\mu L \end{cases}$$

$$2Ae^{-ikL} = 2C\left(\frac{\mu}{k}\cos\mu L - i\sin\mu L\right)$$

$$2Be^{ikL} = -2C\left(\frac{\mu}{k}\cos\mu L + i\sin\mu L\right)$$

$$\frac{B}{A} = -\,e^{-2ikL}\,\frac{\frac{\mu}{k}\cos\mu L + i\sin\mu L}{\frac{\mu}{k}\cos\mu L - i\sin\mu L}$$

Definiamo, analogamente a quanto fatto alle domande c), b, β tali che

$$\frac{\mu}{k}\cos\mu L + i\sin\mu L = b\,e^{i\beta} \qquad b \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{cases} b^2 = \frac{\mu^2}{k^2}\cos^2\mu L + \sin^2\mu L \\ b\cos\beta = \frac{\mu}{k}\cos\mu L \\ b\sin\beta = \sin\mu L \end{cases} \qquad \tan\beta = \frac{k}{\mu}\tan\mu L \qquad \beta = \arctan\left(\frac{k}{\mu}\tan\mu L\right)$$

Quindi $\frac{B}{A} = -\,e^{-2ikL}e^{2i\beta}$ $\qquad \varphi = \pi - 2kL + 2\beta$

$\uparrow$ [da $(-1) = e^{i\pi}$]

Nel limite $V_0 = 0$ abbiamo $\mu = k$, $\tan\beta = \tan\mu L = \tan kL$ e quindi $\beta = kL$, Quindi $\varphi = \pi$

Consideriamo ora la soluzione alle domanda c)

$$\varphi = -2\arctan\sqrt{\frac{V_1}{E} - 1}$$

Per $V_1/E \to +\infty$ $\quad \varphi = -2\cdot\frac{\pi}{2} = -\pi$, equivalente a $\varphi = \pi$

Il controllo si poteva pure fare direttamente sul rapporto B/A. Per $V_0 = 0$ la soluzione diventa

$$\frac{B}{A} = -e^{-2ikL}\,\frac{\mu/k\cos\mu L + i\sin\mu L}{\frac{\mu}{k}\cos\mu L - i\sin\mu L} = \quad (\mu = k)$$

$$= -e^{-2ikL}\,\frac{\cos kL + i\sin kL}{\cos kL - i\sin kL} =$$

$$= -e^{-2ikL}\,\frac{e^{ikL}}{e^{-ikL}} = -1$$

La soluzione al punto c) è

$$\frac{B}{A} = \frac{1 - i\,\lambda/k}{1 + i\,\lambda/k} = \quad \left(\frac{\lambda}{k} \to +\infty\right)$$

$$= -1 \qquad \text{come sopra}$$

Esercizio 2

a)

Definiamo $f_+(x) = a e^{-x^2/2\sigma^2} e^{ikx}$ con a tale da rendere $f_+(x)$ normalizzata

$$\int dx\, |f_+(x)|^2 = |a|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-x^2/\sigma^2} = |a|^2 \sigma \sqrt{\pi} \Rightarrow a = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\,\pi^{1/4}}$$

Quindi $$f_+(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\,\pi^{1/4}} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{ikx}$$

$$f_-(x) = f_+(x)^* = \frac{1}{\sqrt{\sigma}\,\pi^{1/4}} e^{-x^2/2\sigma^2} e^{-ikx}$$

Quindi

$$\psi = A \sqrt{\sigma}\,\pi^{1/4} \left(f_+(x) \chi_+ + i\sqrt{2} f_-(x) \chi_- \right)$$

Quindi

$$\langle \psi | \psi \rangle = |A|^2 \sigma \sqrt{\pi} \left[\int dx\, \underset{1}{\underset{\shortparallel}{|f_+(x)|^2}} + 2 \int dx\, \underset{1}{\underset{\shortparallel}{|f_-(x)|^2}} \right]$$

$$= 3 |A|^2 \sigma \sqrt{\pi}$$

Quindi possiamo prendere $A = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{\sigma}\,\pi^{1/4}}$

Segue

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{3}} f_+(x) \chi_+ + i \sqrt{\frac{2}{3}} f_-(x) \chi_-$$

Segue

$$\text{Prob}(S_z = +\hbar) = \frac{1}{3}$$

$$\text{Prob}(S_z = -\hbar) = \frac{2}{3}$$

b)

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \frac{1}{3}\int dx\, x\,|f_+(x)|^2 + \frac{2}{3}\int dx\, x\,|f_-(x)|^2 = 0$$

funzioni pari

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \frac{1}{3}\int dx\, f_+^*(x)\, p\, f_+(x) + \frac{2}{3}\int dx\, f_-^*(x)\, p\, f_-(x)$$

Ora

$$\int dx\, f_+^*(x)\, p\, f_+(x) = -i\hbar \int dx\, f_+^*(x)\, f_+'(x)$$

$$= -i\hbar \int dx\, f_+^*(x)\left(-\frac{2x}{\sigma^2} + ik\right) f_+(x)$$

$$= -i\hbar \int dx \left(-\frac{2x}{\sigma^2}|f_+(x)|^2 + ik|f_+(x)|^2\right)$$

$$= \frac{2i\hbar}{\sigma^2}\underbrace{\int dx\, x\,|f_+(x)|^2}_{=0} + \hbar k \underbrace{\int dx\,|f_+(x)|^2}_{=1} = \hbar k$$

Analogamente

$$\int dx\, f_-^*(x)\, p\, f_-(x) = -\hbar k$$

Quindi

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \frac{\hbar k}{3} - \frac{2}{3}\hbar k = -\frac{\hbar k}{3}$$

c)

Notiamo che $[S_z, H] = 0$. Quindi

$$\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle = \langle\psi(0)|S_z|\psi(0)\rangle$$

$$= \frac{1}{3}\hbar + \frac{2}{3}(-\hbar) = -\frac{\hbar}{3}$$

d)

Ricordiamo per qualsiasi operatore A

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(0)|e^{iHt/\hbar}A e^{-iHt/\hbar}\psi(t)\rangle$$

$$=\frac{i}{\hbar}\langle\psi(t)|[H,A]|\psi(t)\rangle$$

$$[H,p]=\left[\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+bxS_z\,,p\right]$$

$$=\frac{1}{2}m\omega^2\, i\hbar\, 2x+b\, i\hbar\, S_z$$

$$=i\hbar\left[m\omega^2x+bS_z\right]$$

Quindi

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle=-m\omega^2\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle$$

$$-b\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle$$

$$=-m\omega^2\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle+\frac{b\hbar}{3}$$

$$[H,x]=\left[\frac{p^2}{2m},x\right]=\frac{1}{2m}(-i\hbar)2p=-i\hbar\frac{p}{m}$$

Quindi

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle=\langle\psi(t)|\frac{p}{m}|\psi(t)\rangle$$

equazioni di Hamilton per la Hamiltoniana H

Per risolvere queste equazioni notiamo che

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle=\frac{1}{m}\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle$$

$$=-\omega^2\langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle+\frac{b\hbar}{3m}$$

Si tratta di un oscillatore armonico con forza costante

Se definiamo $x(t) = \langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle$
$p(t) = \langle\psi(t)|p|\psi(t)\rangle$

abbiamo
$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega^2 x + \dfrac{b\hbar}{3m} \\ p = m\dot{x} \end{cases}$$

La soluzione corrisponde a oscillazioni armoniche attorno al punto di equilibrio $x_{eq} = \dfrac{b\hbar}{3m\omega^2}$

Quindi
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{b\hbar}{3m\omega^2} + C\cos\omega t + D\sin\omega t \\ p(t) = -mC\omega\sin\omega t + mD\omega\cos\omega t \end{cases}$$

Per calcolare C, D imponiamo

$$x(t=0) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{b\hbar}{3m\omega^2}$$

$$p(t=0) = -\frac{\hbar k}{3} \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{\hbar k}{3m\omega}$$

Quindi
$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{b\hbar}{3m\omega^2}(1-\cos\omega t) - \dfrac{\hbar k}{3m\omega}\sin\omega t \\ p(t) = \dfrac{b\hbar}{3\omega}\sin\omega t - \dfrac{\hbar k}{3}\cos\omega t \end{cases}$$

Analisi dimensionale [punto c)]

bxS_z deve avere le unità di una energia.

Quindi

$$[b][x][S_z] = [E]$$

$$[b][L][\hbar] = [E]$$

$$[m]^{\alpha}[t]^{\beta}[\omega]^{\gamma}[L][\hbar] = [E]$$

$$[m]^{\alpha}[mL^2T^{-1}]^{\beta+1}[T]^{-\gamma}[L] = [mL^2T^{-2}]$$

Quindi

$$\begin{cases} \alpha+\beta+1 = 1 & [m] \\ 2(\beta+1)+1 = 2 & [L] \\ -(\beta+1)-\gamma = -2 & [T] \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta = 1/2 \\ \beta = -1/2 \\ \gamma = -\beta+1 = 3/2 \end{cases}$$

$$b = m^{1/2}\hbar^{-1/2}\omega^{3/2}$$

METODO PIÙ VELOCE:

In un oscillatore armonico vi è una scala di lunghezza $\xi = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ e una scala di energia $\hbar\omega$

Quindi possiamo scrivere

$$b x S_z = (b\xi\hbar)\left(\frac{x}{\xi}\right)\left(\frac{S_z}{\hbar}\right)$$

$(b\xi\hbar)$ è una energia. Quindi $b\xi\hbar = \hbar\omega$

ossia $b = \frac{\omega}{\xi} = \omega\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = m^{1/2}\hbar^{-1/2}\omega^{3/2}$

Si noti che

$$\frac{b\hbar}{3m\omega^2} = \frac{b}{3\omega}\left(\frac{\hbar}{m\omega}\right) = \frac{1}{3\omega}\,\frac{\omega}{\xi}\cdot\xi^2 = \frac{\xi}{3}$$

per cui

$$x(t) = \xi\left[\frac{1}{3}(1-\cos\omega t) - \frac{k\xi}{3}\sin\omega t\right] \quad (k\xi \text{ è adimensionale})$$

$$p(t) = m\omega\xi\left[\frac{1}{3}\sin\omega t - \frac{k\xi}{3}\cos\omega t\right] \quad m\omega\xi = \frac{\hbar}{\xi}$$

Soluzione in rappresentazione di Heisenberg

E' anche possibile rispondere alla domanda d) utilizzando la rappresentazione di Heisenberg

Se $x_H(t)$, $p_H(t)$, $S_{zH}(t)$ sono gli operatori abbiamo

$$\begin{cases} \dfrac{dx_H}{dt} = \dfrac{1}{m} p_H \\ \dfrac{dp_H}{dt} = -m\omega^2 x_H - b S_{zH} \\ \dfrac{dS_{zH}}{dt} = 0 \end{cases}$$

Ne segue $S_{zH}(t) = S_z$

$$\frac{d^2 x_H}{dt} = -\omega^2 x_H - \frac{b}{m} S_z$$

da cui $x_H = -\dfrac{b}{m\omega^2} S_z + C\cos\omega t + D\sin\omega t$

dove C e D sono operatori che vengono determinati imponendo

$$x = x_H(t=0) = -\frac{b}{m\omega^2} S_z + C \Rightarrow C = \left(x + \frac{b}{m\omega^2} S_z\right)$$

$$p = p_H(t=0) = m D\omega \qquad D = \frac{p}{m\omega}$$

Quindi

$$\begin{cases} x_H(t) = -\dfrac{b}{m\omega^2} S_z (1-\cos\omega t) + x\cos\omega t + \dfrac{p}{m\omega}\sin\omega t \\ p_H(t) = -\dfrac{b}{\omega} S_z \sin\omega t - m\omega x \sin\omega t + p\cos\omega t \end{cases}$$

Prendendo il valor medio si ottiene il risultato precedente

Esame di Meccanica Quantistica 14/05/2025

Esercizio 1. Si consideri una particella di massa m e spin 0 vincolata a muoversi in una dimensione. Si considerino le seguenti Hamiltoniane:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_0 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0(\hat{x}), \qquad V_0(\hat{x}) = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2 \\
\hat{H}_1 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_1(\hat{x}), \qquad V_1(\hat{x}) = \hbar^\alpha m^\beta \omega^\gamma \, e^{-\frac{\hat{x}^2}{2x_0^2}} \\
\hat{H}_2 &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_2(\hat{x}), \qquad V_2(\hat{x}) = \hbar^\delta m^\eta \omega^\xi \, \hat{x} e^{-\frac{\hat{x}^2}{2x_0^2}} \\
\hat{H}_3 &= \hat{H}_0 + V_1(\hat{x})
\end{aligned}$$

con $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

a) Determinare $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta$ e ξ.

b) Studiare qualitativamente lo spettro degli operatori $\hat{H}_1$, $\hat{H}_2$ e $\hat{H}_3$ indicando gli intervalli di energia dove lo spettro è continuo o discreto, la degenerazione degli autovalori e la natura delle autofunzioni (se esse corrispondano a stati di scattering o a stati legati).

Si consideri ora una particella di spin 1/2 la cui Hamiltoniana è la seguente:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \epsilon \hat{V}(\hat{x}), \qquad V(\hat{x}) = V_1(\hat{x})|+\rangle\langle+| + V_2(\hat{x})|-\rangle\langle-|$$

con $0 < \epsilon \ll 1$ e $\hat{S}_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$.

c) Si calcoli la correzione al livello fondamentale al primo ordine in ϵ.

d) Si calcolino i commutatori $[\hat{S}_z, \hat{H}]$, $[\hat{S}_x, \hat{H}]$ e $[\hat{p}, \hat{H}]$.

Esercizio 2. Due particelle identiche di spin 1 sono confinate su un cerchio di raggio R che giace nel piano xy ed è centrato nell'origine. La Hamiltoniana del sistema è

$$H = a(L_{1z}^2 + L_{2z}^2) - \gamma S_z,$$

dove S_z è la componente z dello spin totale $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$. Si supponga $a, \gamma > 0$.

a) Si ricavi lo spettro (senza degenerazioni) di H per $\gamma = 0$. Si ricavi quindi l'energia e la degenerazione dei primi 10 livelli di H per $0 < \gamma \ll a$.

b) Si determini lo stato $|\Psi\rangle$ delle due particelle tale che: i) è autostato di S_z con autovalore $-\hbar$; ii) è autostato di $L_{1z} + L_{2z}$ con autovalore $-\hbar$; iii) è autostato di S^2; il corrispondente autovalore è il più piccolo possibile tra quelli coerenti con la condizione i). iv) Tra tutti gli stati che soddisfano a i), ii), iii), lo stato $|\Psi\rangle$ è quello per cui $\langle\Psi|H|\Psi\rangle$ assume il valore piú piccolo possibile.

c) Al tempo $t = 0$ la Hamiltoniana diventa

$$H = a(L_{1z}^2 + L_{2z}^2) - \gamma S_x$$

Se $|\Psi(t = 0)\rangle = |\Psi\rangle$, dove $|\Psi\rangle$ è lo stato determinato al punto b), si calcoli $\langle\Psi(t)|S_z|\Psi(t)\rangle$.

Esercizio 1

a)

Per determinare gli esponenti è sufficiente notare che possiamo definire una combinazione di $\hbar, \omega, m$ con le dimensioni di un'energia — è semplicemente $\hbar\omega$ — ed una combinazione con le dimensioni di una lunghezza — $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$

Dato che $e^{-x^2/2x_0^2}$ è ADIMENSIONALE, $[\hbar^\alpha m^\beta \omega^\gamma]$ ha le dimensioni di una energia. Quindi

$$\hbar^\alpha m^\beta \omega^\gamma = \hbar\omega \qquad \alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 1$$

Analogamente

$$V_2(x) = \underbrace{\hbar^\delta m^\eta \omega^\xi x_0}_{\text{dimensioni energia}} \underbrace{\left[\frac{x}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2}\right]}_{\text{adimensionale}}$$

Quindi $\hbar^\delta m^\eta \omega^\xi x_0 = \hbar\omega$

$$\hbar^\delta m^\eta \omega^\xi = \frac{\hbar\omega}{x_0} = \hbar\omega\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} = \hbar^{1/2} m^{1/2} \omega^{3/2}$$

$$\delta = \frac{1}{2}, \ \eta = \frac{1}{2}, \ \xi = \frac{3}{2}$$

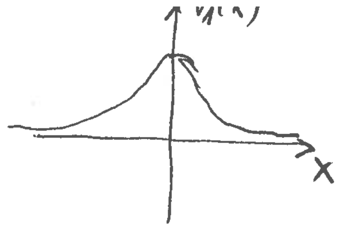
b)

Per capire la natura dello spettro è necessario studiare il comportamento del potenziali. Stati L_2 (discreti) sono possibili per quei valori di E per cui TUTTI i moti classici sono limitati.

Inoltre deve valere $E \geq V_{min}$, dove V_{min} è il minimo del potenziale

TEO DI NON DEGENERAZIONE: STATI LEGATI SONO NON DEGENERI

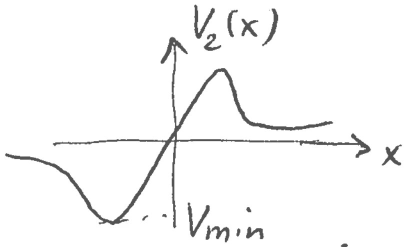
$\boxed{H_1}$



$V_{min} = 0$, nessuna orbita limitata

Quindi:
- non vi sono autostati per $E \leq 0$
- per $E > 0$ spettro continuo, stati di diffusione (non in $L_2(\mathbb{R})$). La degenerazione è 2.

$\boxed{H_2}$ $V_2(x) = \hbar\omega \dfrac{x}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2}$



Per calcolare V_{min} calcoliamo le soluzioni di $V_2'(x) = 0$

$$V_2'(x) = \frac{\hbar\omega}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2} + \frac{\hbar\omega x}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2}\left(-\frac{x}{x_0^2}\right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{x_0} e^{-x^2/2x_0^2}\left(1 - \frac{x^2}{x_0^2}\right) \qquad V_2'(x) = 0 \Longrightarrow x = \pm x_0$$

$$V_{min} = V_2(-x_0) = -\hbar\omega e^{-1/2} = -\frac{\hbar\omega}{\sqrt{e}} < 0$$

Notiamo che orbite limitate esistono per $V_{min} < E < 0$.
Quindi:
- non vi sono autostati per $E \leq V_{min} = -\dfrac{\hbar\omega}{\sqrt{e}}$
- spettro discreto non degenere con stati $L_2(\mathbb{R})$ (stati legati) per $V_{min} < E \leq 0$
- spettro continuo, stati di diffusione (non in $L_2(\mathbb{R})$), degenerazione 2 per $E > 0$

$\boxed{H_3}$ $V_3 = \dfrac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \hbar\omega e^{-x^2/2x_0^2}$

Per calcolare il minimo calcoliamo

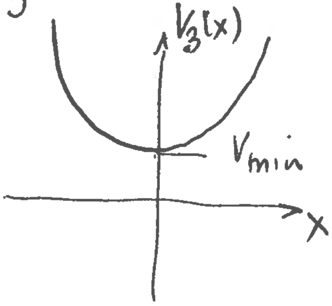
$$V_3'(x) = m\omega^2 x - \frac{\hbar\omega x}{x_0^2} e^{-x^2/2x_0^2} \qquad \frac{\hbar\omega}{x_0^2} = m\omega^2$$

$$= m\omega^2 x \left(1 - e^{-x^2/x_0^2}\right)$$

Quindi

$$V_3'(x) = 0 \text{ se } \begin{cases} x = 0 \\ e^{-x^2/x_0^2} = 1 \implies x = 0 \end{cases}$$

$V_3(x)$ ha un solo punto stazionario (minimo) in $x = 0$



$V_{min} = V_3(0) = \hbar\omega$

Tutte le orbite classiche sono limitate.
Quindi

- non vi sono autostati per $E \leq \hbar\omega$
- spettro discreto, non degenere con stati $L_2(\mathbb{R})$ (stati legati) per $E > \hbar\omega$

c)
Per $\epsilon = 0$, il sistema è un oscillatore armonico.
Lo spettro è quindi $|n\rangle|\pm\rangle$, dove $|n\rangle$ è l'autofunzione del livello n dell'oscillatore e $|+\rangle, |-\rangle$ sono i due autostati dello spin. Ogni livello ha degenerazione 2.

Per calcolare l'effetto della perturbazione dobbiamo calcolare gli autovalori della matrice della perturbazione

$$V = \begin{pmatrix} \langle 0|V_1|0\rangle & 0 \\ 0 & \langle 0|V_2|0\rangle \end{pmatrix}$$

dove abbiamo scelto la base $|0\rangle|+\rangle, |0\rangle|-\rangle$

La funzione d'onda dello stato fondamentale è

$$\psi_0 = \pi^{-1/4} x_0^{-1/2} e^{-x^2/2x_0^2}$$

Quindi

$$\langle 0|V_1|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{x_0}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\hbar\omega\, e^{-x^2/2x_0^2}\right) e^{-x^2/x_0^2}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{\sqrt{\pi}x_0}\int dx\, e^{-\frac{3}{2}\frac{x^2}{x_0^2}} \qquad y = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{x}{x_0}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{\sqrt{\pi}x_0}\, x_0\sqrt{\frac{2}{3}}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dy\, e^{-y^2}}_{\sqrt{\pi}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\omega$$

$$\langle 0|V_2|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{x_0}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \underbrace{\left(\hbar\omega\frac{x}{x_0}e^{-x^2/2x_0^2}\right) e^{-x^2/x_0^2}}_{\text{dispari in } x} = 0$$

Quindi la matrice della perturbazione è

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\omega \\ 0 \end{cases}$$

Quindi lo stato fondamentale si separa in due livelli di energia

$$\frac{\hbar\omega}{2}, \quad \frac{\hbar\omega}{2} + \epsilon\sqrt{\frac{2}{3}}\hbar\omega$$

d)

~~Per calcolare i commutatori è utile riscrivere $V(x)$ in termini dell'operatore di spin S_z.~~

Vi sono vari metodi per rispondere alla domanda

Metodo diretto

Per calcolare $[S_z, H]$ e $[S_x, H]$ notiamo che

$$[S_z, H] = \epsilon [S_z, V] \qquad [S_x, H] = \epsilon [S_x, V]$$

Ora

$$[S_z, |+\rangle\langle+|] = S_z |+\rangle\langle+| - |+\rangle\langle+| S_z = 0$$
$$[S_z, |-\rangle\langle-|] = S_z |-\rangle\langle-| - |-\rangle\langle-| S_z = 0$$

Quindi $[S_z, H] = \epsilon [S_z, V] = 0$

Nel caso di S_x scriviamo $S_x = \frac{1}{2}(S_+ + S_-)$

$$[S_x, V] = \frac{1}{2}[S_+, V] + \frac{1}{2}[S_-, V]$$
$$= \frac{1}{2}\left\{ V_1 S_+ |+\rangle\langle+| + V_2 S_+ |-\rangle\langle-| - V_1 |+\rangle\langle+| S_+ - V_2 |-\rangle\langle-| S_+ \right\} + (\text{analogo con } S_-)$$

Ovviamente $S_+|+\rangle = S_-|-\rangle = 0$. Bisogna invece essere attenti nel calcolo di $\langle\pm|S_+$ e $\langle\pm|S_-$ dato che S_+ e S_- <u>NON</u> sono hermitiani.

Per ogni $|\psi\rangle$

$$\langle+|S_+|\psi\rangle = (|+\rangle, S_+|\psi\rangle) = (S_+^\dagger|+\rangle, |\psi\rangle)$$
$$= (S_-|+\rangle, |\psi\rangle) = \hbar(|-\rangle, |\psi\rangle) = \langle-|\psi\rangle\hbar$$

Quindi $\langle+|S_+ = \langle-|\hbar$

Analogamente $\langle-|S_- = \langle+|\hbar$ e

$$\langle-|S_+ = 0 \qquad \langle+|S_- = 0$$

Quindi

$$[S_x, V] = \frac{1}{2}\left(V_2 |+\rangle\langle-| - V_1 |+\rangle\langle-|\right)\hbar \quad \text{(da } S_+)$$
$$+ \frac{1}{2}\left(V_1 |-\rangle\langle+| - V_2 |-\rangle\langle+|\right)\hbar \quad \text{(da } S_-)$$
$$= \frac{\hbar}{2}(V_2 - V_1)\left(|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right)$$

Quindi

$$[S_x, H] = \frac{\epsilon\hbar}{2}(V_2 - V_1)\left(|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+|\right)$$

In forma matriciale

$$|+\rangle\langle-| - |-\rangle\langle+| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Quindi possiamo pure scrivere

$$[S_x, H] = \frac{\epsilon\hbar}{2}(V_2 - V_1)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Infine

$$[p, H] = [p, \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2] + [p, \epsilon V]$$

Dato che $[p, f(x)] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x}$

$$[p, H] = -i\hbar m\omega^2 x + \epsilon|+\rangle\langle+|\,[p, V_1] + \epsilon|-\rangle\langle-|\,[p, V_2]$$
$$= \left(m\omega^2 x + \epsilon|+\rangle\langle+|\frac{dV_1}{dx} + \epsilon|-\rangle\langle-|\frac{dV_2}{dx}\right)(-i\hbar)$$

METODO FORMALE

È utile riscrivere $V(x)$ in termini dell'operatore S_z e dell'Identità nello spazio dello spin

Nella base $|+\rangle, |-\rangle$ (rappresentazione dello spin con S_z diagonale)

$$|+\rangle\langle+| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle\langle-| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ per cui

$$Id + \frac{2S_z}{\hbar} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Id - \frac{2S_z}{\hbar} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Segue

$$V_1(x)|+\rangle\langle+| + V_2(x)|-\rangle\langle-| =$$

$$= V_1(x)\frac{1}{2}\left(Id + \frac{2S_z}{\hbar}\right) + V_2(x)\frac{1}{2}\left(Id - \frac{2S_z}{\hbar}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(V_1(x) + V_2(x))\, Id + \frac{S_z}{\hbar}(V_1(x) - V_2(x))$$

Sottintendendo, come usuale, l'operatore identità Id, abbiamo

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m^2\omega^2 x^2 + \frac{\epsilon}{2}(V_1 + V_2) + \frac{\epsilon S_z}{\hbar}(V_1 - V_2)$$

Segue

$$[S_z, H] = 0$$

$$[S_x, H] = \left[S_x, \frac{\epsilon S_z}{\hbar}(V_1 - V_2)\right] = [S_x, S_z]\frac{\epsilon}{\hbar}(V_1 - V_2)$$

$$= i\hbar\, \epsilon_{132}\, S_y \frac{\epsilon}{\hbar}(V_1 - V_2) = -i S_y (V_1 - V_2)\epsilon$$

$$[p, H] = \left[p, \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right] + \left[p, \frac{\epsilon}{2}(V_1 + V_2)\right] + \left[p, \frac{\epsilon S_z}{\hbar}(V_1 - V_2)\right]$$

$$= -i\hbar\left[m\omega^2 x + \frac{\epsilon}{2}\left(\frac{dV_1}{dx} + \frac{dV_2}{dx}\right) + \frac{\epsilon S_z}{\hbar}\left(\frac{dV_1}{dx} - \frac{dV_2}{dx}\right)\right]$$

(abbiamo usato $[p, f(x)] = -i\hbar \frac{df}{dx}$)

Era possibile rispondere alla domanda, utilizzando la rappresentazione matriciale dello spin:

$$[S_z, H] = [S_z, V] = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon V_1 & 0\\ 0 & \epsilon V_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\epsilon V_1 & 0\\ 0 & \epsilon V_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\frac{\hbar}{2} = 0$$

$$[S_x, H] = [S_x, V] = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon V_1 & 0\\ 0 & \epsilon V_2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\epsilon V_1 & 0\\ 0 & \epsilon V_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\frac{\hbar}{2}$$

$$= \frac{\epsilon\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & V_2\\ V_1 & 0\end{pmatrix} - \frac{\epsilon\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & V_1\\ V_2 & 0\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\epsilon\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & V_2 - V_1\\ V_1 - V_2 & 0\end{pmatrix} = \frac{\epsilon\hbar}{2}(V_1 - V_2)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

che coincide con il risultato precedente dato che

$$-iS_y = -i\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Infine

$$[p, V] = \epsilon[p, V_1]\,|+\rangle\langle+| + \epsilon[p, V_2]\,|-\rangle\langle-|$$

$$= -i\hbar\epsilon\frac{dV_1}{dx}|+\rangle\langle+| - i\hbar\epsilon\frac{dV_2}{dx}|-\rangle\langle-|$$

che si può pure scrivere come $\rightarrow = -i\hbar\epsilon\begin{pmatrix}\frac{dV_1}{dx} & 0\\ 0 & \frac{dV_2}{dx}\end{pmatrix}$

Quindi

$$[p, H] = -i\hbar\left[m\omega^2 x + \epsilon\frac{dV_1}{dx}|+\rangle\langle+| + \epsilon\frac{dV_2}{dx}|-\rangle\langle-|\right]$$

ESERCIZIO 2

Prendiamo una base formata da autofunzioni di L_{1z}, L_{2z}, S^2, S_z con $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$: $|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 |S\, S_z\rangle$

Qui $m_1 \in \mathbb{Z}$ (tutti gli interi positivi e negativi, 0 incluso)
Dato che le due particelle hanno spin 1, S può assumere i valori 0,1,2.
Per particelle non identiche la base considerata è una base di autofunzioni di H

$$H |m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 |S\, S_z\rangle = E |m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 |S\, S_z\rangle$$
$$E = \hbar^2 a (m_1^2 + m_2^2) - \gamma S_z$$

Per determinare funzioni compatibili con il principio di Pauli, definiamo una base spaziale ~~di~~ con autofunzioni dell'operatore di scambio

$|m\, m\rangle_S = |m\rangle_1 |m\rangle_2$ (stato con $m_1 = m_2$) è simmetrico

Gli stati $|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2$ e $|m_2\rangle_1 |m_1\rangle_2$ non sono autostati dell'op. di scambio. Definiamo $(m_1 \neq m_2)$

$$|m_1 m_2\rangle_S = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 + |m_2\rangle_1 |m_1\rangle_2 \right) \quad \text{simmetrica}$$

$$|m_1 m_2\rangle_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|m_1\rangle_1 |m_2\rangle_2 - |m_2\rangle_1 |m_1\rangle_2 \right) \quad \text{antisimmetrica}$$

Qui abbiamo ordinato m_1, m_2 in modo che $\underline{m_1 > m_2}$

Ora

- $|0\,0\rangle$ e $|2\, S_z\rangle$ sono simmetrici sotto scambio
- $|1\, S_z\rangle$ è antisimmetrico sotto scambio
- La funzione d'onda totale (spazio + spin) deve essere SIMMETRICA (Pauli)

Quindi sono accettabili solo

$|m_1 m_2\rangle_S |00\rangle \qquad m_1 \geq m_2$

$|m_1 m_2\rangle_S |2 S_z\rangle \qquad m_1 \geq m_2 \qquad -2,-1,0,1,2 = S_z$

$|m_1 m_2\rangle_A |1 S_z\rangle \qquad m_1 > m_2 \qquad S_z = -1,0,1$

Quindi per ogni coppia (m_1, m_2) con $m_1 \geq m_2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, vi sono stati compatibili con il principio di Pauli. Lo spettro è quindi

$$E = a\hbar^2(m_1^2+m_2^2) - \gamma\hbar S_z \underset{\gamma=0}{=} a\hbar^2(m_1^2+m_2^2)$$

Notiamo anche che per ogni m_1, m_2 vi è uno stato che ha spin 2. Quindi ogni livello presente per $\gamma=0$ si separa in 5 sottolivelli (corrispondenti a $S_z=-2,-1,0,1,2$) quando $\gamma \neq 0$.

Perciò per calcolare i primi 10 livelli di H è sufficiente considerare i due livelli più bassi presenti per $\gamma=0$.

Dato che $E=\hbar^2 a(m_1^2+m_2^2)$, $m_1 \geq m_2$ i livelli più bassi corrispondono a

fond. $\quad m_1 = m_2 = 0$

I ecc. $\quad \begin{cases} m_1 = +1 & m_2 = 0 \\ m_1 = 0 & m_2 = -1 \end{cases}$

Per $\gamma \neq 0$ lo stato fondamentale si separa in

$|00\rangle_S |2\,-2\rangle$	$E = 2\hbar\gamma$	non deg.
$|00\rangle_S |2\,-1\rangle$,	$E = \hbar\gamma$	non deg.
$|00\rangle_S |2\,0\rangle$, $|00\rangle_S |00\rangle$	$E = 0$	deg $= 2$
$|00\rangle_S |2\,1\rangle$	$E = -\hbar\gamma$	non deg.
$|00\rangle_S |2\,2\rangle$	$E = -2\hbar\gamma$	non deg.

Per il I ecc gli stati possibili sono

$$|1\,0\rangle_S |2\,S_z\rangle \qquad |0\,-1\rangle_S |2\,S_z\rangle$$
$$|1\,0\rangle_A |1\,S_z\rangle \qquad |0\,-1\rangle_A |1\,S_z\rangle$$
$$|1\,0\rangle_S |0\,0\rangle \qquad |0\,-1\rangle_A |0\,0\rangle$$

Quindi

$E = \hbar^2 a - 2\hbar\gamma \quad |1\,0\rangle_S |2\,2\rangle, |0\,-1\rangle_S |2\,2\rangle \qquad$ deg $= 2$

$E = \hbar^2 a - \hbar\gamma \quad \begin{cases} |1\,0\rangle_S |2\,1\rangle, |0\,-1\rangle_S |2\,1\rangle \\ |1\,0\rangle_A |1\,1\rangle, |0\,-1\rangle_A |1\,1\rangle \end{cases} \qquad$ deg $= 4$

$E = \hbar^2 a \quad \begin{cases} |1\,0\rangle_S |2\,0\rangle, |0\,-1\rangle_S |2\,0\rangle \\ |1\,0\rangle_A |1\,0\rangle, |0\,-1\rangle_S |1\,0\rangle \\ |1\,0\rangle_S |0\,0\rangle, |0\,-1\rangle_S |0\,0\rangle \end{cases} \qquad$ deg $= 6$

$E = \hbar^2 a + \hbar\gamma \quad \begin{cases} |1\,0\rangle_S |2\,-1\rangle, |0\,-1\rangle_S |2\,-1\rangle \\ |1\,0\rangle_A |1\,-1\rangle, |0\,-1\rangle_A |1\,-1\rangle \end{cases} \qquad$ deg $= 4$

$E = \hbar^2 a + 2\hbar\gamma \quad |1\,0\rangle_S |2\,-2\rangle, |0\,-1\rangle_S |2\,-2\rangle \qquad$ deg $= 2$

b)

Dato che $S_z = -1$, lo stato ψ ha spin $S = 1$. Quindi la funzione d'onda spaziale deve essere antisimmetrica ~~ossia deve essere $|m_1 m_2\rangle_A$~~ Consideriamo come base le autofunzioni di H. Soddisfano i) e iii) ed il principio di Pauli gli stati $|m_1\,m_2\rangle_A |1\,-1\rangle$. Ora

$$(L_{1z} + L_{2z}) |m_1\,m_2\rangle_A |1\,-1\rangle = \hbar(m_1 + m_2) |m_1\,m_2\rangle_A |1\,-1\rangle$$

Quindi $m_1 + m_2 = -1$, $m_2 = -1 - m_1$

Quindi gli stati rilevanti sono

$$|m\,-1-m\rangle |1\,-1\rangle$$

La condizione $m_1 > m_2 \Rightarrow m > -1 - m \Rightarrow 2m > -1,\ m \geq 0.$

Quindi $\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\text{autostato con } E_m = \hbar a [m^2 + (m+1)^2] + \hbar\gamma}$

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} c_m |m \; -1-m\rangle |1 -1\rangle \qquad \left(\sum |c_m|^2 = 1\right)$$

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} |c_m|^2 E_m$$

Il valore minimo (consistente con $\sum |c_m|^2 = 1$) si ottiene prendendo $c_0 = 1$, $c_m = 0$ per $m \geq 1$, ossia prendendo come stato φ quello di energia più bassa tra tutti quelli compatibili con i), ii), iii).

Quindi

$$|\psi\rangle = \overset{m_1 \; m_2}{|0 \; -1\rangle_A} \overset{S \; S_z}{|1 \; -1\rangle}$$

c) Scriviamo $H = H_0 - \gamma S_x$ $\qquad H_0 = a(L_{1z}^2 + L_{2z}^2)$ (parte spaziale)

$$\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle = \langle\psi| e^{iHt/\hbar} S_z e^{-iHt/\hbar} |\psi\rangle$$

Ora

$$\left.\begin{aligned} e^{iHt/\hbar} &= e^{iH_0t/\hbar} e^{-i\gamma S_x t/\hbar} \\ e^{iH_0t/\hbar} S_z e^{-iH_0t/\hbar} &= S_z \end{aligned}\right\} \text{ dato che } [S_x, H_0] = 0$$

Quindi

$$\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle = \langle\psi| e^{-i\gamma S_x t/\hbar} S_z e^{i\gamma S_x t/\hbar} |\psi\rangle$$

$$= \langle 1 -1| e^{-i\gamma S_x t/\hbar} S_z e^{i\gamma S_x t/\hbar} |1 -1\rangle$$

Si tratta quindi di risolvere il problema nello spazio dello spin

Per risolvere il problema si può ragionare in vari modi

METODO DELLE ROTAZIONI

Se $\theta = \gamma t$, vogliamo calcolare

$$e^{-i\theta S_x/\hbar} S_z e^{i\theta S_x/\hbar} = F(\theta)$$

Ora $e^{i\theta S_z/\hbar}$ è l'operatore di rotazione di un angolo θ intorno all'asse x. Se $\theta \ll 1$ (infinitesimo)

$$F(\theta) \approx (1 - i\theta S_x/\hbar) S_z (1 + i\theta S_x/\hbar) + O(\theta^2)$$

$$= S_z - \frac{i\theta}{\hbar}[S_x, S_z] + O(\theta^2)$$

$$= S_z - \frac{i\theta}{\hbar} i\hbar(-S_y) = S_z - \theta S_y$$

Per θ non infinitesimo vale

$$F(\theta) = \cos\theta\, S_z - \sin\theta\, S_y$$

Quindi

$$\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle = \cos\gamma t \langle\psi|S_z|\psi\rangle - \sin\gamma t \langle\psi|S_y|\psi\rangle$$

Ora $\langle\psi|S_y|\psi\rangle = \langle 1\,-1|\frac{1}{2i}(S_+ - S_-)|1\,-1\rangle = 0$

$$\langle\psi|S_z|\psi\rangle = \langle 1\,-1|S_z|1\,-1\rangle = -\hbar$$

Segue

$$\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle = -\hbar\cos\gamma t$$

CON LE EQUAZIONI DEL MOTO DI HEISENBERG

$$\frac{d}{dt}F(\theta) = -\frac{i\gamma}{\hbar} e^{-i\gamma S_x t/\hbar}[S_x, S_z] e^{i\gamma S_x t/\hbar}$$

$$= -i\frac{\gamma}{\hbar} e^{-i\gamma S_x t/\hbar}(-i\hbar S_y) e^{i\gamma S_x t/\hbar}$$

$$= -\gamma e^{-i\gamma S_x t/\hbar} S_y e^{i\gamma S_x t/\hbar}$$

Se definiamo $G(\gamma t) = e^{-i\gamma S_x t/\hbar} S_y e^{i\gamma S_x t/\hbar}$

$$\frac{d}{dt} F(\gamma t) = -\gamma G(\gamma t)$$

Si ha poi

$$\frac{d}{dt} G(\gamma t) = -\frac{i\gamma}{\hbar} e^{-i\gamma S_x t/\hbar} [S_x, S_y] e^{i\gamma S_x t/\hbar}$$

$$= \gamma e^{-i\gamma S_x t/\hbar} S_z e^{i\gamma S_x t/\hbar} = \gamma F(\gamma t)$$

Quindi

$$\frac{d^2}{dt^2} F(\gamma t) = -\gamma \frac{dG(\gamma t)}{dt} = -\gamma^2 F(\gamma t)$$

$$\begin{cases} F(\gamma t) = A\cos\gamma t + B\sin\gamma t \\ G(\gamma t) = -\frac{1}{\gamma} \dot F(\gamma t) = A\sin\gamma t - B\cos\gamma t \end{cases}$$

Dato che $F(0) = S_z = A$ e $G(0) = S_y = -B$

$$F(\gamma t) = S_z \cos\gamma t - S_y \sin\gamma t$$ [Abbiamo, de facto, ridimostrato la relazione per le rotazioni]

Come prima $\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle = -\hbar\cos\gamma t$

METODO DIRETTO

Utilizziamo le autofunzioni di S_x nella base delle autofunzioni di S_z : $\{|1\rangle_z, |0\rangle_z, |-1\rangle_z\}$
[calcolo in fondo]

$$|1\rangle_x = \frac{1}{2}|1\rangle_z + \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle_z + \frac{1}{2}|-1\rangle_z$$

$$|0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle_z$$

$$|-1\rangle_x = -\frac{1}{2}|1\rangle_z + \frac{\sqrt{2}}{2}|0\rangle_z - \frac{1}{2}|-1\rangle_z$$

Lo stato al tempo $t=0$ è $|-1\rangle_z$

$$|-1\rangle_z = |1\rangle_x \, {}_x\langle 1|-1\rangle_z + |0\rangle_x \, {}_x\langle 0|-1\rangle_z + |-1\rangle_x \, {}_x\langle -1|-1\rangle_z$$

$$= \frac{1}{2}|1\rangle_x - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_x - \frac{1}{2}|-1\rangle_x$$

$$e^{i\gamma S_x/\hbar t}|-1\rangle_z =$$

$$= \frac{1}{2}e^{i\gamma t}|1\rangle_x - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_x - \frac{1}{2}e^{-i\gamma t}|-1\rangle_x \quad = A$$

Ora

$$S_z|1\rangle_x = \frac{\hbar}{2}|1\rangle_z - \frac{\hbar}{2}|-1\rangle_z = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle_z\right]$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|0\rangle_x$$

$$S_z|0\rangle_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|1\rangle_z + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}|-1\rangle_z$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle_z + |-1\rangle_z\right) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle_x - |-1\rangle_x\right)$$

$$S_z|-1\rangle_x = -\frac{\hbar}{2}|1\rangle_z + \frac{\hbar}{2}|-1\rangle_z = -\frac{\hbar}{\sqrt{2}}|0\rangle_x$$

Quindi

$$S_z e^{i\gamma S_x/\hbar t}|-1\rangle_z =$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}e^{i\gamma t}|0\rangle_x - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle_x + \frac{1}{2}e^{-i\gamma t}|0\rangle_x\right]$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_x + \cos\gamma t\,|0\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle_x\right] = B$$

Il risultato è il prodotto scalare di A e B

$$\langle \psi t|S_z|\psi t\rangle = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-i\gamma t} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\gamma t - \frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\gamma t}\right]$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\gamma t - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\gamma t\right] = -\hbar\cos\gamma t$$

Calcolo degli autostati di S_x [per $s=1$]

Per determinare la matrice associata a S_x notiamo che

$$S_+ = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2}\hbar \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2}\hbar & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\hbar & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Base</u>: $\{|1\rangle_z, |0\rangle_z, |-1\rangle_z\}$

Gli autovalori sono (OVVIAMENTE), $0, \pm\hbar$.

AUTOVETTORE CON AUTOVALORE $+\hbar$

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} b = a \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a+c) = b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b = c \end{cases} \longrightarrow \quad v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} b, b, \frac{\sqrt{2}}{2} b\right)$$

NORM: $\langle v|v\rangle = \frac{1}{2}|b|^2 + |b|^2 + \frac{1}{2}|b|^2 = 2|b|^2$

Scegliamo $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|+1\rangle_x = \frac{1}{2}|1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_z + \frac{1}{2}|-1\rangle_z$$

AUTOVETTORE CON AUTOVALORE $-\hbar$

Come prima con un segno "$-$"

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} b = -a \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a+c) = -b \\ \frac{\sqrt{2}}{2} b = -c \end{cases}$$

$$v = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} b, b, -\frac{\sqrt{2}}{2} b\right)$$

$$\langle v|v\rangle = 2|b|^2$$

Scegliamo $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|-1\rangle_x = -\frac{1}{2}|1\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_z - \frac{1}{2}|-1\rangle_z$$

Autovettore CON AUTOVALORE NULLO

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} b = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}(a+c) = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \end{cases}$$

$$v = (a, 0, -a) \qquad \langle v|v\rangle = |a|^2 + |a|^2 = 2|a|^2$$

Scegliamo $a = 1/\sqrt{2}$

$$|0\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|-1\rangle_z$$

Esame di Meccanica Quantistica 01/07/2025

Esercizio 1. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω centrato nell'origine. Al tempo $t = 0$ la particella ha funzione d'onda normalizzata

$$\psi(x) = A(1 + i\rho\sqrt{2})^2 e^{-\rho^2/2} \qquad \rho = \frac{x}{x_0} \qquad x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}.$$

a) Si calcoli la costante A ed il valore medio dell'energia al variare del tempo.

b) Si calcolino i valori medi di x e p al variare del tempo.

c) Il sistema viene perturbato aggiungendo alla Hamiltoniana H_0 dell'oscillatore armonico il termine

$$V(x) = \lambda m\omega^2 (x - 2x_0)^2.$$

Si calcoli l'energia dello stato fondamentale della Hamiltoniana $H = H_0 + V$, al primo ordine in λ assumendo $|\lambda| \ll 1$.

d) Si determinino i valori di λ per cui lo spettro di H è limitato inferiormente. Per tali valori, si calcoli lo spettro di H esattamente. Si verifichi la correttezza del risultato ottenuto al punto c), sviluppando il risultato esatto per l'energia dello stato fondamentale al primo ordine in λ.

Esercizio 2. Si consideri un elettrone la cui Hamiltoniana è data da

$$\hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{\alpha}{\hat{r}},$$

dove $\alpha = e^2$ nel sistema di Gauss e $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0)$ nel sistema internazionale. Lo stato del sistema è descritto dalla seguente funzione d'onda

$$\langle \mathbf{r}|\psi\rangle = \mathcal{N}\left(e^{-\frac{r}{a_0}}|+\rangle + \frac{i}{4\sqrt{2}}\cos\theta\,\frac{r}{a_0}e^{-\frac{r}{2a_0}}|-\rangle\right) \ ,$$

dove $a_0 \equiv \frac{\hbar^2}{m\alpha}$ è il raggio di Bohr, r è la coordinata radiale, θ l'angolo polare, $\mathcal{N} > 0$ una costante di normalizzazione e $\hat{S}_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$.

a) Si calcoli la costante di normalizzazione $\mathcal{N}$ e si faccia un grafico qualitativo della densità di probabilità radiale $P(r)$ ($P(r)$ soddisfa la condizione di normalizzazione $\int_0^{+\infty} P(r)dr = 1$).

b) Se si effettuano misure degli operatori $\hat{S}_z$, $\hat{L}^2$, $\hat{J}_z$ e $\hat{J}^2$, che valori si possono ottenere e con quali probabilità?

c) Si determini la probabilità di trovare la particella nel primo ottante $(x > 0, y > 0, z > 0)$.

Si consideri ora la perturbazione

$$\hat{V} = \lambda\frac{E_I}{\hbar a_0}\hat{\mathbf{S}}\cdot\hat{\mathbf{r}} \ ,$$

con $0 < \lambda \ll 1$ e $E_I \equiv \frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$.

d) Si calcolino i commutatori $[\hat{L}_z, \hat{V}]$, $[\hat{S}_z, \hat{V}]$, $[\hat{J}_z, \hat{V}]$ e $[\hat{H}_0, \hat{V}]$.

e) Si calcoli la correzione all'energia del livello fondamentale di $\hat{H}_0$ al primo ordine in λ.

Esercizio 1

a) La funzione d'onda $\psi(x)$ è un polinomio di 2° grado in ρ per $e^{-\rho^2/2}$, quindi è una combinazione lineare delle autofunzioni dello oscillatore armonico $\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x)$.

$$\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-\rho^2/2}$$

$$\psi_1 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \sqrt{2}\rho\, e^{-\rho^2/2}$$

$$\psi_2 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2}}(2\rho^2-1)\, e^{-\rho^2/2}$$

Abbiamo

$$\psi(x) = A(1+2i\rho\sqrt{2}-2\rho^2)e^{-\rho^2/2}$$

$$= -A(2\rho^2-1)e^{-\rho^2/2} + 2iA\rho\sqrt{2}e^{-\rho^2/2}$$

$$= -A\left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{1/4}\sqrt{2}\,\psi_2 + A\left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{1/4} 2i\,\psi_1(x)$$

$$= -A\left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{1/4}\left(\sqrt{2}\psi_2 - 2i\psi_1\right)$$

La condizione di normalizzazione è

$$|A|\left(\frac{\hbar\pi}{m\omega}\right)^{1/2}(2+4) = 1 \qquad A = -\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4}$$

Quindi

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\sqrt{2}\psi_2 - 2i\psi_1\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\psi_2 - \sqrt{\frac{2}{3}}\,i\,\psi_1$$

$$\langle\psi|H|\psi\rangle = \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{2}\hbar\omega + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}\hbar\omega = \left(\frac{5}{6}+1\right)\hbar\omega = \frac{11}{6}\hbar\omega$$

Ovviamente tale valor medio non dipende da t

b)

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-iE_2 t/\hbar} \psi_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} i e^{-iE_1 t/\hbar} \psi_1$$

$$\underset{\text{(modulo fase)}}{=} \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} i \, e^{i(E_2 - E_1)t/\hbar} \psi_1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \psi_2 - \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\omega t} i \psi_1$$

In notazione di Dirac $\quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |2\rangle - i\sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\omega t} |1\rangle$

Ora

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \langle 2| + i\sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\omega t} \langle 1| \right) x \left(\frac{1}{\sqrt{3}} |2\rangle - i\sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\omega t} |1\rangle \right)$$

$$= \frac{1}{3} \langle 2|x|2\rangle + \frac{2}{3} \langle 1|x|1\rangle + i \frac{\sqrt{2}}{3} e^{-i\omega t} \langle 1|x|2\rangle$$

$$- i \frac{\sqrt{2}}{3} e^{i\omega t} \langle 2|x|1\rangle$$

Ora $\quad \langle 2|x|2\rangle = \langle 1|x|1\rangle = 0 \quad$ per parità

Per calcolare $\langle 2|x|1\rangle$ e $\langle 1|x|2\rangle = \langle 2|x|1\rangle^*$

utilizziamo

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (ip + m\omega q) \qquad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} (-ip + m\omega q)$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} (a + a^+)$$

$$\langle 2|x|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left(\langle 2|a + a^+|1\rangle \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \left(0 + \sqrt{2} \right) = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Quindi

$$\langle\psi|x|\psi\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \, i \frac{\sqrt{2}}{3} \left(e^{-i\omega t} - e^{i\omega t} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \, i(-2i) \sin\omega t = \frac{2\sqrt{2}}{3} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \sin\omega t$$

Il calcolo di $\langle\psi|p|\psi\rangle$ si può fare utilizzando le equazioni di Hamilton

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi|mq|\psi\rangle$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, m\omega \cos\omega t$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{m\hbar\omega}\,\cos\omega t$$

Si può pure fare per calcolo diretto

Ricordando $\langle 1|p|1\rangle = \langle 2|p|2\rangle = 0$ per parità abbiamo

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = i\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i\omega t}\langle 1|p|2\rangle - i\frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\omega t}\langle 2|p|1\rangle$$

Ora $p = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\hbar\omega}\,(a-a^+)$

Quindi

$$\langle 2|p|1\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\omega\hbar}\,\langle 2|a-a^+|1\rangle$$
$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}\sqrt{m\omega\hbar}\,(0-\sqrt{2}) = +i\sqrt{m\omega\hbar}$$

$$\langle 1|p|2\rangle = \langle 2|p|1\rangle^* = -i\sqrt{m\omega\hbar}$$

Quindi

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = +\sqrt{m\hbar\omega}\left[\frac{\sqrt{2}}{3}e^{-i\omega t} + \frac{\sqrt{2}}{3}e^{i\omega t}\right]$$
$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{m\hbar\omega}\,\cos\omega t$$

c)

$$\Delta E = \lambda m\omega^2\left(\langle 0|x^2|0\rangle - 4x_0\underbrace{\langle 0|x|0\rangle}_{=0 \text{ per parità}} + 4x_0^2\right)$$

Ora $\langle 0|x^2|0\rangle = \| x|0\rangle \|^2$

$$x|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\, a^{\dagger}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,|1\rangle$$

Quindi

$$\Delta E = \lambda m\omega^2 \left[\frac{1}{2}\frac{\hbar}{m\omega} + 4x_0^2 \right]$$

$$= \lambda m\omega^2 \left(\frac{1}{2}+4\right) x_0^2 = \frac{9}{2}\lambda m\omega^2 x_0^2 = \frac{9}{2}\lambda\hbar\omega$$

d)

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + \lambda m\omega^2 (x-2x_0)^2$$

Il potenziale è un polinomio quadratico ossia una ~~pabola~~ parabola. È quindi limitato inferiormente se il coefficiente del termine x^2 è positivo

Dato che $\frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \lambda m\omega^2 x^2 = \frac{1}{2}(1+2\lambda)m\omega^2 x^2$

La condizione è $(1+2\lambda)>0$ ossia $\lambda > -\frac{1}{2}$

Se $\lambda > -\frac{1}{2}$ si tratta di un oscillatore armonico che oscilla intorno ad x_{eq} con x_{eq} dato da

$\left[V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + \lambda m\omega^2(x-x_0)^2 \text{ è il potenziale} \right]$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=x_{eq}} = 0 \Rightarrow m\omega^2 x_{eq} + 2\lambda m\omega^2(x_{eq}-2x_0) = 0$$

$$x_{eq} + 2\lambda(x_{eq}-2x_0) = 0$$

$$x_{eq} = \frac{4\lambda x_0}{1+2\lambda}$$

Abbiamo poi

$$V(x_{eq}) = \frac{1}{2} m\omega^2 \left(\frac{4\lambda}{1+2\lambda}\right)^2 x_0^2 + \lambda m\omega^2 \left(\frac{4\lambda}{1+2\lambda} - 2\right)^2 x_0^2$$

$$= \underset{[=\hbar\omega]}{m\omega^2 x_0^2} \left[\frac{1}{2}\left(\frac{4\lambda}{1+2\lambda}\right)^2 + \lambda \frac{4}{(1+2\lambda)^2} \right]$$

$$= \hbar\omega \frac{1}{(1+2\lambda)^2}\left(8\lambda^2 + 4\lambda\right) = \hbar\omega \frac{4\lambda(1+2\lambda)}{(1+2\lambda)^2} = \hbar\omega \frac{4\lambda}{(1+2\lambda)}$$

Dato che

$$V(x) = V(x_{eq}) + \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_{eq}} (x - x_{eq}) + \frac{1}{2} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{x_{eq}} (x - x_{eq})^2$$

$$= \frac{1}{2}(1+2\lambda) m\omega^2 X^2 + \hbar\omega \frac{4\lambda}{1+2\lambda}$$

con $X = x - x_{eq}$

Se definiamo $\Omega = \omega\sqrt{1+2\lambda}$ lo spettro esatto è

$$E_n = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) + \hbar\omega \frac{4\lambda}{1+2\lambda}$$

Al primo ordine in λ

$$\Omega = \omega(1 + \lambda + O(\lambda^2))$$

$$E_n = \hbar\omega(1+\lambda)\left(n + \frac{1}{2}\right) + 4\lambda\hbar\omega + O(\lambda^2)$$

STATO FOND:

$$E_0 = \hbar\omega(1+\lambda)\frac{1}{2} + 4\lambda\hbar\omega + O(\lambda^2)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega\lambda\left(\frac{1}{2} + 4\right) + O(\lambda^2)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega\lambda\frac{9}{2} + O(\lambda^2) \qquad \underline{\text{OK}}$$

Esercizio 2

Riscriviamo la funzione d'onda data in termini delle autofunzioni del problema Coulombiano

$$R_{10} = \frac{2}{a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{(2a_0)^{3/2}} \frac{r}{a_0} e^{-r/(2a_0)}$$

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta$$

Quindi

$$e^{-r/a_0} = R_{10} Y_0^0 \frac{a_0^{3/2}}{2} \sqrt{4\pi}$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \cos\theta \frac{r}{a_0} e^{-r/2a_0} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \sqrt{3}\; 2\sqrt{2}\, a_0^{3/2} R_{21} Y_1^0$$

$$= \frac{1}{2} a_0^{3/2} \sqrt{4\pi}\, R_{21} Y_1^0$$

Quindi

$$\psi = N \frac{a_0^{3/2}}{2} \sqrt{4\pi} \left(\psi_{100} |+\rangle + i \psi_{210} |-\rangle \right)$$

$$\underset{(n\ell m)}{\psi_{100}} = R_{10} Y_0^0 \qquad \underset{(n\ell m)}{\psi_{210}} = R_{21} Y_1^0$$

Imponendo la normalizzazione di ψ:

$$|N|^2 \frac{a_0^3}{4} \cdot 4\pi \,(1+1) = 1$$

$$|N|^2 a_0^3\, 2\pi = 1 \qquad N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a_0^{3/2}} \quad \left(\text{con opportuna scelta di fase}\right)$$

Quindi

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{100} |+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \psi_{210} |-\rangle$$

Per calcolare la densità di probabilità notiamo che

probabilità che la particella sia in un guscio con $a<r<b$ ed abbia spin con $S_z = +\frac{\hbar}{2}$:

$$\int_{guscio} d^3r \, \frac{1}{2} |\psi_{100}|^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b dr\, r^2 \int d\Omega \, R_{10}^2 \, |Y_{00}|^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b dr\, r^2 R_{10}^2 \qquad \left[\int d\Omega |Y_0^0|^2 = 1 \right]$$

analogamente la probabilità che la particella sia in un guscio con $a<r<b$ ed abbia spin $S_z = -\frac{\hbar}{2}$

$$\int_{guscio} d^3r \, \frac{1}{2} |\psi_{210}|^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b dr\, r^2 \int d\Omega \, R_{21}^2 \, |Y_1^0|^2 = \frac{1}{2} \int_a^b dr\, r^2 R_{21}^2$$

Quindi la probabilità di che la particella si trovi in $r \in [a,b]$ indip. dallo spin è

$$P(a<r<b) = \frac{1}{2} \int_a^b dr\, r^2 \left(R_{10}^2 + R_{21}^2 \right)$$

La DENSITÀ DI PROBABILITÀ è quindi

$$P(r) = \frac{1}{2} r^2 \left(R_{10}^2 + R_{21}^2 \right)$$

Quindi

$$P(r) = \frac{r^2}{2}\left[\frac{4}{a_0^3} e^{-2r/a_0} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{8a_0^3}\,\frac{r^2}{a_0^2}\, e^{-r/a_0} \right]$$

$$= \frac{1}{a_0}\left[2x^2 e^{-2x} + \frac{1}{48} x^4 e^{-x} \right] \qquad x = r/a_0$$

$$= \frac{1}{a_0} f(x) \qquad \boxed{x \geq 0}$$

Calcoliamo

$$f'(x) = 4x e^{-2x} - 4x^2 e^{-2x} + \left(\frac{1}{12} x^3 - \frac{1}{48} x^4\right) e^{-x}$$

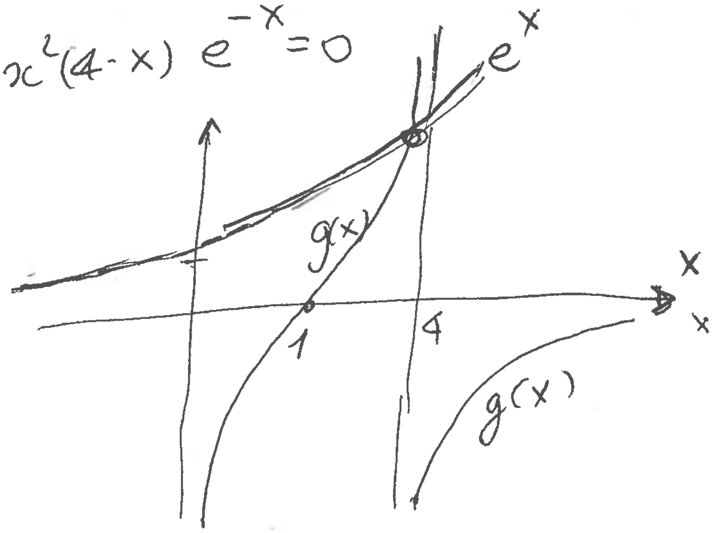
$$= 4x(1-x) e^{-2x} + \frac{x^3}{48}(4-x) e^{-x}$$

$f'(x) = 0$ per $x = 0$ e per

$$192(1-x) e^{-2x} + x^2(4-x) e^{-x} = 0$$

$$\underbrace{-\frac{192(1-x)}{x^2(4-x)}}_{} = e^x$$

$$g(x) = e^x$$

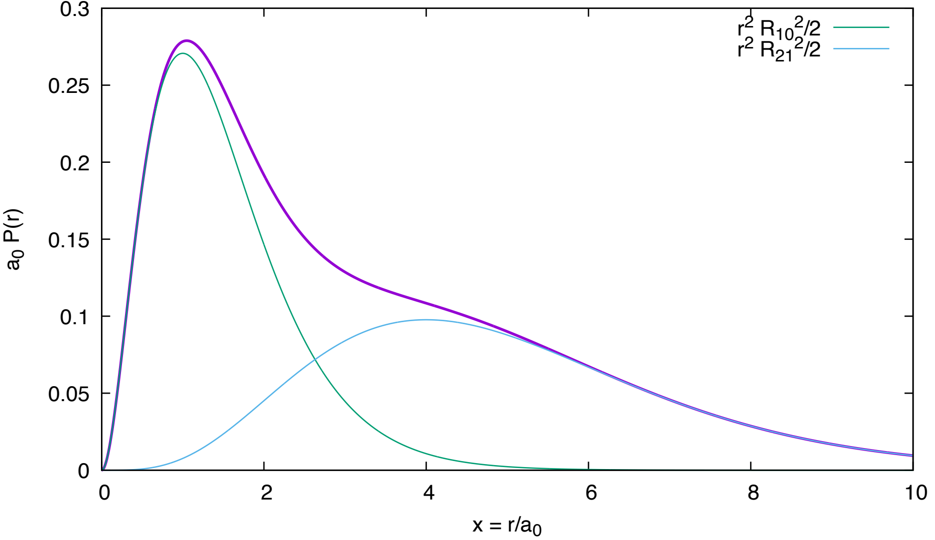


Vi è una sola intersezione con $1 \leq x \leq 4$
[quindi zero di $f'(x)/x$]

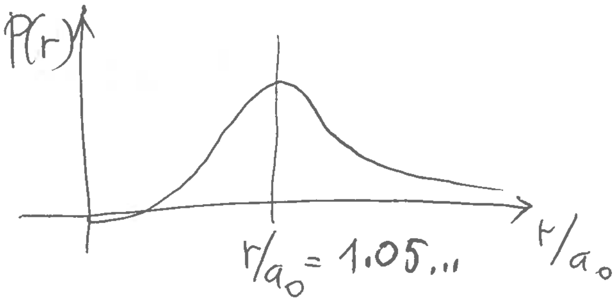
Quindi

$$0 = f'(x) \Rightarrow \begin{cases} 0 = x & \text{minimo} \\ x = x_{int} & \text{massimo} \quad 1 \leq x_{int} < 4 \end{cases}$$

[Numericamente $x_{int} = 1.04818$]



$r^2 R_{10}{}^2/2$
$r^2 R_{21}{}^2/2$
a_0 P(r)
x = r/a_0
0
0.05
0.1
0.15
0.2
0.25
0.3
0
2
4
6
8
10



b)

Misura di S_z

$$\text{Prob}\left(S_z = \frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}\left(S_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Misura di L^2

$$\text{Prob}\left(L^2 = 0\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}\left(L^2 = 2\hbar^2\right) = \frac{1}{2}$$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ L=0}}{\psi_{100}} |+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ L=1}}{\psi_{210}} |-\rangle$$

Misura di J_z (dato che lo stato ha $L_z = 0$ è equivalente a S_z)

$$\text{Prob}\left(J_z = \frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Prob}\left(J_z = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Misura di J^2

Dobbiamo cambiare base. Riscriviamo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \underset{n\, \ell\, \ell_z\, s_z}{|1\,0\,0\,\tfrac{1}{2}\rangle} + \frac{i}{\sqrt{2}} \underset{n\, \ell\, \ell_z\, s_z}{|2\,1\,0\,-\tfrac{1}{2}\rangle}$$

Ora $|1\,0\,0\,\frac{1}{2}\rangle = \overset{n\,\ell\,j\,j_z}{|1\,0\,\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle_J}$

$$|2\,1\,0\,-\tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|2\,1\,\tfrac{3}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle_J + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|2\,1\,\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle_J \qquad \left(\text{tabelle CG } 1 \times \tfrac{1}{2}\right)$$

Quindi

$$\text{Prob}\left(J^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Prob}\left(J^2 = \frac{15}{4}\hbar^2\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

c)

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{10}\, Y_{00} |+\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}} R_{21}\, Y_1^0 |-\rangle$$

Mediando su r (coordinata radiale) e lo spin

$$\text{Prob}(x>0, y>0, z>0) = \frac{1}{2}\int_{\text{Iott}} |Y_{00}|^2 d\Omega + \frac{1}{2}\int_{\text{Iott}} |Y_1^0|^2 d\Omega$$

$$\int_{\text{Iott}} |Y_0^0|^2 d\Omega = \frac{1}{8}$$

$$\int_{\text{Iott}} |Y_1^0|^2 d\Omega = \frac{3}{4\pi}\int_0^{\pi/2} d\cos\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \cos^2\theta$$

$$= \frac{3}{8}\int_0^1 dx\, x^2 = \frac{1}{8}$$

Quindi

$$\text{Prob}(x>0, y>0, z>0) = \frac{1}{8}$$

d) Posto $\mu = \lambda \frac{E_I}{\hbar a_0}$

- $[L_z, V] = \mu [L_z, \bar{S}\cdot\bar{r}] =$

$$= \mu S_x [L_z, x] + \mu S_y [L_z, y]$$

$$= \mu S_x i\hbar \epsilon_{312}\, y + \mu S_y i\hbar \epsilon_{321}\, x$$

$$= i\hbar\mu (S_x y - S_y x)$$

Più in generale

$$[L_i, V] = [L_i, \mu S\cdot r] = \mu \sum_j S_j [L_i, r_j]$$

$$= i\hbar \sum_j S_j \epsilon_{ijk} r_k = i\hbar (\bar{S}\times\bar{r})_i$$

- $[S_z, V] =$ uguale a prima

$$= \mu[S_z, S_x]x + \mu[S_z, S_y]y$$
$$= i\hbar\mu(S_y x - S_x y)$$

$$[S_i, V] = i\hbar(\bar{r} \times \bar{S})_i$$

- $[J_z, V] = 0$ dato che V è uno scalare.

Ovviamente si può pure scrivere

$$[J_z, V] = [L_z, V] + [S_z, V] =$$
$$= i\hbar\mu(S_x y - S_y x) + i\hbar\mu(S_y x - S_x y) = 0$$

- $[H, V] = [\frac{p^2}{2m}, \mu\bar{S}\cdot r]$

$$= \frac{\mu}{2m}\sum_i [p^2, S_i r_i]$$
$$= \frac{\mu}{2m}\sum_{ij} S_i[p_j^2, r_i]$$
$$= \frac{\mu}{2m}\sum_{ij} S_i\left(p_j[p_j, r_i] + [p_j, r_i]p_j\right)$$
$$= \frac{\mu}{2m}\sum_{ij} S_i(-i\hbar\delta_{ij})\,2p_j$$
$$= -i\hbar\frac{\mu}{m}\bar{S}\cdot\bar{p}$$

e)

Per parità $\langle\psi_{100}|\vec{r}|\psi_{100}\rangle = 0$

Quindi

$$\Delta E = \langle\psi_{100}|V|\psi_{100}\rangle = 0$$ [lo spin non conta]

Esame di Meccanica Quantistica 17/07/2025

Esercizio 1. Una particella di spin 1/2 si muove sulla superficie di una sfera di raggio R con Hamiltoniana

$$H = \frac{L^2}{2I} + \alpha J_y^2 \,, \tag{1}$$

dove I è il momento di inerzia, α è un parametro reale, $\vec{L}$ è il momento angolare orbitale e $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ è il momento angolare totale.

a) Si determini per quali valori di α lo spettro degli autovalori di H è limitato inferiormente.

b) Si assuma in questa domanda e nelle successive $\alpha = 1/I$. Si calcolino le energie dei primi 3 livelli energetici, la loro degenerazione e le corrispondenti autofunzioni (o autoket).

c) Si determinino tutti gli stati $|\psi\rangle$ normalizzati tali che: i) una misura di energia dà sempre un risultato minore di $(11/4)\hbar^2/I$; ii) la probabilità che una misura di J^2 dia come risultato $15\hbar^2/4$ è $1/3$; iii) una misura di J_y dà sempre $\hbar/2$ come risultato; iv) la probabilità che una misura di energia dia come risultato $(5/4)\hbar^2/I$ è $1/3$.

d) Si calcoli la probabilità che una misura di L_y sugli stati $|\psi\rangle$ dia 0 come risultato.

e) Tra tutti gli stati $|\psi\rangle$ determinati al punto c) si trovi quello per cui il valor medio $\langle\psi|\frac{y}{R}|\psi\rangle$ è minimo.

Esercizio 2. Si consideri un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω centrato nell'origine. Il sistema si trova nel seguente stato quantistico normalizzato:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \mathcal{N} e^{-\alpha(x-\beta)^2 + i\frac{\gamma x}{\hbar}} \,,$$

dove $\mathcal{N}, \alpha, \beta$ e γ sono delle costanti reali; inoltre $\mathcal{N} > 0$ e $\alpha > 0$.

a) Determinare le dimensioni di $\mathcal{N}, \alpha, \beta$ e γ. Determinare $\mathcal{N}$ come funzione di α, β e γ.

b1) Determinare per quali valori di α, β e γ lo stato $|\psi\rangle$ è autostato dell'operatore di distruzione (detto anche di discesa) $\hat{a}$. In caso tali valori esistano, si determini l'autovalore di $\hat{a}$ corrispondente a $|\psi\rangle$.
b2) Si risponda alla domanda del punto b1) considerando l'operatore $\hat{a}^\dagger$.

c) Se si effettua una misura di energia su $|\psi\rangle$, con che probabilità si può ottenere il valore $E = \frac{\hbar\omega}{2}$? Si calcoli tale probabilità per $\alpha = 3m\omega/(2\hbar)$, $\beta = 0$ e valori generici di γ.

d) Si calcolino i valori medi di $\hat{x}, \hat{p}$ e dell'operatore parità $\hat{\mathcal{P}}$ al variare del tempo per valori generici di α, β e γ.

ESERCIZIO 1

a)

Calcoliamo innanzitutto lo spettro.
Una base di autofunzioni è data da

$$| L \; J \; J_y >$$

Dato che $J = L \pm \frac{1}{2}$, J può assumere solo valori seminteri. Inoltre dato J, L può essere pari solo a $J-\frac{1}{2}$ e $J+\frac{1}{2}$

Abbiamo quindi due famiglie di autofunzioni date da

$$\begin{cases} |J-\frac{1}{2} \; J \; J_y > & \frac{1}{2}-J \leq J_y \leq J-\frac{1}{2} \\ |J+\frac{1}{2} \; J \; J_y > & -\frac{1}{2}-J \leq J_y \leq J+\frac{1}{2} \end{cases}$$

Si noti che usiamo una base di autofunzioni di J_y e non J_z, ma questo è irrilevante dato che J_y e J_z hanno lo stesso spettro.

Quindi

$$|J-\frac{1}{2} \; J \; J_y> \longrightarrow E^{(1)} = \frac{1}{2I}\hbar^2 (J-\frac{1}{2})(J+\frac{1}{2}) + \alpha\hbar^2 J_y^2$$
$$= \frac{\hbar^2}{2I}(J^2-\frac{1}{4}) + \alpha\hbar^2 J_y^2$$

$$|J+\frac{1}{2} \; J \; J_y> \longrightarrow E^{(2)} = \frac{\hbar^2}{2I}(J+\frac{1}{2})(J+\frac{3}{2}) + \alpha\hbar^2 J_y^2$$

Il momento di inerzia è positivo. Quindi per $\alpha \geq 0$ abbiamo sempre $E>0$. Supponiamo ora $\alpha<0$.

A J fissato

$$\min_{J_y} E^{(1)}(J, J_y) = \frac{\hbar^2}{2I}(J^2-\frac{1}{4}) + \alpha\hbar^2(J-\frac{1}{2})^2 = \mathcal{E}^{(1)}(J)$$

$$\min_{J_y} E^{(2)}(J, J_y) = \frac{\hbar^2}{2I}(J+\frac{1}{2})(J+\frac{3}{2}) + \alpha\hbar^2(J+\frac{1}{2})^2 = \mathcal{E}^{(2)}(J)$$

Abbiamo

$$\mathcal{E}^{(1)}(J) = \left(J-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\hbar^2}{2I}\left(J+\frac{1}{2}\right)+\alpha\hbar^2\left(J-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \left(J-\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{\hbar^2}{2I}+\alpha\hbar^2\right)J+\frac{1}{2}\left(\frac{\hbar^2}{2I}-\alpha\hbar^2\right)\right]$$

Questa quantità è limitata inferiormente per

$$\frac{\hbar^2}{2I}+\alpha\hbar^2 \geq 0 \qquad \alpha\hbar^2 \geq -\frac{\hbar^2}{2I} \qquad \alpha \geq -\frac{1}{2I}$$

$$\mathcal{E}^{(2)}(J) = \left(J+\frac{1}{2}\right)\left[\frac{\hbar^2}{2I}\left(J+\frac{3}{2}\right)+\alpha\hbar^2\left(J+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \left(J+\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{\hbar^2}{2I}+\alpha\hbar^2\right)J+\frac{\hbar^2}{2I}\cdot\frac{3}{2}+\frac{\alpha}{2}\hbar^2\right]$$

Si ottiene anche qui la stessa condizione

$$\alpha \geq -\frac{1}{2I}$$

(b)

Per $J=\frac{1}{2}$ abbiamo

$|0 \; J=\frac{1}{2} \; J_y\rangle \Rightarrow$ $E = \alpha\hbar^2\frac{1}{4} = \frac{\hbar^2}{4I}$ degenere 2 volte ($J_y = \pm\frac{1}{2}$)

$|1 \; J=\frac{1}{2} \; J_y\rangle \Rightarrow$ $E = \frac{\hbar^2}{I}+\frac{\alpha\hbar^2}{4} = \frac{5}{4I}\hbar^2$ degenere 2 volte ($J_y = \pm\frac{1}{2}$)

Per $J = 3/2$

$|1 \; J=\frac{3}{2} \; J_y\rangle \Rightarrow$
- $E = \frac{\hbar^2}{I}+\frac{\alpha\hbar^2}{4} = \frac{5}{4I}\hbar^2$ degenere 2 volte $J_y = \pm\frac{1}{2}$
- $E = \frac{\hbar^2}{I}+\frac{9\hbar^2}{4} = \frac{13}{4I}\hbar^2$ degenere 2 volte ($J_y = \pm\frac{3}{2}$)

$|2 \; J=\frac{3}{2} \; J_y\rangle \Rightarrow$
- $E = \frac{3\hbar^2}{I}+\frac{\alpha\hbar^2}{4} = \frac{13}{4I}\hbar^2$ degenere 2 vo ($J=\pm$
- $E = \frac{3\hbar^2}{I}+\frac{9\hbar^2}{4} = \frac{21}{4I}\hbar^2$ degenere 2v ($J_y=\pm$

(3)

Per $J_y = \frac{5}{2}$

$$|2 \; J=\frac{5}{2} \; J_y\rangle \qquad E \begin{cases} \frac{3\hbar^2}{I} + \frac{\hbar^2}{4} = \frac{13}{4I}\hbar^2 & \text{deg. 2v. } (J_y = \frac{1}{2}) \\ \text{termini con} & (J_y = \frac{3}{2}) \\ \text{energie più alte} & (J_y = \frac{5}{2}) \end{cases}$$

Spettro

$L \quad J \quad J_y$

$E = \frac{\hbar^2}{4I} \qquad |0 \; \frac{1}{2} \; \pm\frac{1}{2}\rangle \qquad$ deg 2

$E = \frac{5\hbar^2}{4I} \qquad \left.\begin{cases} |1 \; \frac{1}{2} \; \pm\frac{1}{2}\rangle \\ |1 \; \frac{3}{2} \; \pm\frac{1}{2}\rangle \end{cases}\right\}$ deg. 4

$E = \frac{13\hbar^2}{4I} \qquad \left.\begin{cases} |1 \; \frac{3}{2} \; \pm\frac{3}{2}\rangle \\ |2 \; \frac{3}{2} \; \pm\frac{1}{2}\rangle \\ |2 \; \frac{5}{2} \; \pm\frac{1}{2}\rangle \end{cases}\right\}$ deg. 6

c)

i) È combinazione dei 6 stati con energia $\hbar^2/4I$ e $5\hbar^2/4I$

iii) È combinazione dei tre stati con $J_y = +1/2$

$$|\psi\rangle = a|0 \; \tfrac{1}{2} \; \tfrac{1}{2}\rangle + b|1 \; \tfrac{1}{2} \; \tfrac{1}{2}\rangle + c|1 \; \tfrac{3}{2} \; \tfrac{1}{2}\rangle$$

ii) $|c|^2 = \frac{1}{3}$

iv) $|b|^2 + |c|^2 = \frac{1}{3}$ $\Rightarrow$ $\Big\}$ $|b|^2 = 0 \longrightarrow b = 0$

Quindi, per normalizzazione $|a|^2 + |c|^2 = 1 \Rightarrow |a|^2 = \frac{2}{3}$

Con opportuna scelta di fase

$$|\psi\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|0\ \tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,e^{i\alpha}\,|1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle$$

con α fase arbitraria

d) Utilizziamo le tabelle CG (non è rilevante che la base contenga J_y e non J_z)

$$\overset{L}{|0}\ \overset{J}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{J_y}{\tfrac{1}{2}}\rangle = |\overset{L}{0}\ \overset{L_y}{0}\rangle\,|\overset{S}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{S_y}{\tfrac{1}{2}}\rangle$$

$$|1\ \tfrac{3}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|1\ 1\rangle|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\ 0\rangle|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle \qquad \left(\begin{matrix}\text{tabelle}\\ 1\times\tfrac{1}{2}\end{matrix}\right)$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\overset{L}{0}\ \overset{L_y}{0}\rangle|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle + \tfrac{1}{3}e^{i\alpha}\,|\overset{L}{1}\ \overset{L_y}{1}\rangle|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$+ \tfrac{\sqrt{2}}{3}e^{i\alpha}\,|\overset{L}{1}\ \overset{L_y}{0}\rangle|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\rangle$$

$$\text{Prob}\,(L_y=0) = \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{9} = \tfrac{8}{9}$$

$$\text{Prob}\,(L_y=\hbar) = \tfrac{1}{9}$$

e)

$$|\psi\rangle = |\psi_+\rangle|\overset{S}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{S_y}{\tfrac{1}{2}}\rangle + |\psi_-\rangle|\overset{S}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{S_y}{-\tfrac{1}{2}}\rangle$$

$$|\psi_+\rangle = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\overset{L}{0}\ \overset{L_y}{0}\rangle + \tfrac{\sqrt{2}}{3}e^{i\alpha}\,|\overset{L}{1}\ \overset{L_y}{0}\rangle$$

$$|\psi_-\rangle = \tfrac{1}{3}e^{i\alpha}\,|1\ 1\rangle$$

Tenuto conto dell'ortogonalità delle funzioni di spin

$$\langle\psi|y|\psi\rangle = \langle\psi_+|y|\psi_+\rangle + \langle\psi_-|y|\psi_-\rangle$$

Ora

$$\langle\psi_-|y|\psi_-\rangle = \tfrac{1}{9}\langle 1\ 1|y|1\ 1\rangle = 0$$

per parità [y ha elementi di matrice non nulli solo tra stati con l diverso] nulli per parità

$$\langle\psi_+|y|\psi_+\rangle = \frac{2}{3}\langle 00|y|00\rangle + \frac{2}{9}\langle 10|y|10\rangle$$
$$+\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{-i\alpha}\langle 10|y|00\rangle$$
$$+\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{\sqrt{2}}{3}\,e^{i\alpha}\langle 00|y|10\rangle$$
$$= \frac{2}{3\sqrt{3}}\left(e^{-i\alpha}\langle 10|y|00\rangle + e^{i\alpha}\langle 00|y|10\rangle\right)$$

Ora notiamo che la base usata è $|L\, L_y\rangle$ e stiamo calcolando il valor medio di y. Quindi, ridefinendo gli assi abbiamo

$$\langle 1\ \overset{L_y}{0}|\tfrac{y}{R}|0\ \overset{L_y}{0}\rangle = \langle 1\ \overset{L_z}{0}|\tfrac{z}{R}|0\ \overset{L_z}{0}\rangle \qquad (R=1)$$
$$= \int d\Omega\, Y_1^{0*}\, z\, Y_0^0 = \int d\cos\theta\, d\varphi \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta\cos\theta\,\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\,2\pi\int d\cos\theta\,\cos^2\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-1}^{1} dx\, x^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,2\cdot\frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Ovviamente

$$\langle 0\,0|\tfrac{y}{R}|1\,0\rangle = \langle 1\,0|\tfrac{y}{R}|0\,0\rangle^* = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Quindi

$$\langle\psi|\tfrac{y}{R}|\psi\rangle = \frac{2}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\,2\cos\alpha = \frac{4}{9}\cos\alpha$$

Il minimo corrisponde ad $\alpha=\pi$. Quindi

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\overset{L}{0}\ \overset{J}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{J_y}{\tfrac{1}{2}}\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\overset{L}{1}\ \overset{J}{\tfrac{3}{2}}\ \overset{J_y}{\tfrac{1}{2}}\rangle.$$

Esercizio 2

(a)

Dimensioni. Dato che $[\psi] = [L]^{-1/2}$ $\left[\int |\psi|^2 dx = 1\right]$

$[N] = [L]^{-1/2}$

Poi $[\alpha] = [L]^{-2}$, $[\beta] = [L]$

$$[\gamma] = [\hbar][L^{-1}] = [L^2 T^{-1} M][L^{-1}] = [L T^{-1} M]$$

[Le dimensioni di γ sono quelle di un impulso]

Normalizzazione

$$1 = |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, e^{-2\alpha(x-\beta)^2} \qquad \sqrt{2\alpha}\,(x-\beta) = y$$

$$= |N|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-y^2} = |N|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \qquad N = \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/4} \quad (N > 0)$$

(b1)

$$a = \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,(p - im\omega q) = (RS)$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(-i)\hbar\left(\frac{d}{dx} + \frac{m\omega}{\hbar}x\right)$$

Quindi

$$a\psi = -\frac{\hbar N}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left[-2\alpha(x-\beta) + \frac{i\gamma}{\hbar} + \frac{m\omega}{\hbar}x\right] e^{-\alpha(x-\beta)^2 + i\gamma x/\hbar}$$

$$= -\frac{\hbar}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar} - 2\alpha\right)x + 2\alpha\beta + \frac{i\gamma}{\hbar}\right]\psi(x)$$

~~Perché~~ $\psi(x)$ è autofunzione di a se

$$\frac{m\omega}{\hbar} = 2\alpha \qquad \alpha = \frac{m\omega}{2\hbar}$$

In questo caso

$$a\psi = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\beta + \frac{i\gamma}{\hbar}\right)\psi(x)$$

$$\lambda = -\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\frac{m\omega}{\hbar}\beta + \frac{i\gamma}{\hbar}\right)$$

(b2)

A priori [LEZIONE] sappiamo che a^+ non ha autovettori

$$a^+ = \frac{\hbar}{\sqrt{2m\omega}}\left(\frac{d}{dx} - \frac{m\omega}{\hbar}x\right)$$

$$a^+\psi = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\left[\left(-\frac{m\omega}{\hbar} - 2\alpha\right)x + 2\alpha\beta + \frac{i\gamma}{\hbar}\right]\psi(x)$$

$\psi(x)$ sarebbe autofunzione di a^+ se

$$-\frac{m\omega}{\hbar} - 2\alpha = 0 \qquad \alpha = -\frac{m\omega}{\hbar}$$

Dato che α DEVE essere positivo questa condizione non è mai verificata.

(c)

$$\psi(x) = N e^{-\frac{3m\omega}{2\hbar}x^2 + \frac{i\gamma x}{\hbar}} \qquad N = \left(\frac{3m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4}$$

Dobbiamo calcolare $|\langle\psi_0|\psi\rangle|^2$ dove ψ_0 è l'autofunzione dello stato fondamentale

$$\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\rho^2/2} \qquad \rho = \frac{x}{\beta} \qquad \beta = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

Ora

$$-\frac{3m\omega}{2\hbar}x^2 + \frac{i\gamma x}{\hbar} = -\frac{3}{2}\rho^2 - i\frac{\gamma}{\hbar}\beta\rho \qquad b = \frac{\gamma\beta}{\hbar} = \frac{\gamma}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\hbar m\omega}}$$

$$\langle \psi_0 | \psi \rangle = \left(\frac{3m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \qquad [dx = \beta dp]$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \beta dp \, e^{-p^2/2} \, e^{-3/2 p^2 - ibp}$$

$$= 3^{1/4} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \, e^{-2p^2 - ibp}$$

$$= \frac{3^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \, e^{-2p^2 - ibp}$$

Ora

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dp \, \exp\left[-2p^2 - ibp\right] \qquad \text{poniamo} \quad \sqrt{2}p = x + a$$

$$-2p^2 + ibp = -2 \frac{(x+a)^2}{2} + ib \frac{x+a}{\sqrt{2}}$$

$$= -x^2 - a^2 - 2ax + \frac{ib}{\sqrt{2}} x + \frac{iba}{\sqrt{2}}$$

Scegliamo a in modo che il coefficiente di x sia nullo

$$-2a + \frac{ib}{\sqrt{2}} = 0 \qquad a = \frac{ib}{2\sqrt{2}}$$

$$-2p^2 + ibp = -x^2 + \frac{b^2}{8} - \frac{b^2}{4} = -x^2 - \frac{b^2}{8}$$

Quindi

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int dx \, e^{-x^2 - b^2/8} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-b^2/8}$$

Quindi

$$\langle \psi_0 | \psi \rangle = \frac{3^{1/4}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} e^{-b^2/8}$$

Quindi

$$\text{Prob} = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-b^2/4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \exp\left(-\frac{\gamma^2}{4m\hbar\omega}\right)$$

(d)

Al tempo $t=0$

$$\langle \psi | x | \psi \rangle = \int N^2 e^{-2\alpha(x-\beta)^2} x = \qquad x-\beta = y$$

$$= \int N^2 e^{-2\alpha y^2} \underset{\substack{\uparrow \\ =0 \text{ per parità}}}{(y+\beta)} = \beta \int N^2 dy\, e^{-2\alpha y^2}$$

$$= \beta \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^{1/2} = \beta$$

$$\langle \psi | p | \psi \rangle = \int dx\, N^2 e^{-\alpha(x-\beta)^2 - i\gamma x/\hbar} \left(-i\hbar \frac{d}{dx}\right) e^{-\alpha(x-\beta)^2 + i\gamma x/\hbar}$$

$$= \int dx\, N^2 e^{-2\alpha(x-\beta)^2} (-i\hbar) \left[-2\alpha(x-\beta) + i\gamma/\hbar\right] \qquad (x-\beta = y)$$

$$= -i\hbar N^2 \int dy\, e^{-2\alpha y^2} \Big(\underbrace{-2\alpha y}_{=0 \text{ per parità}} + i\gamma/\hbar\Big)$$

$$= \gamma N^2 \int dy\, e^{-2\alpha y^2} = \gamma$$

Per calcolare il valore a $t \neq 0$ utilizziamo le equazioni di Hamilton

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\langle\psi|q|\psi\rangle = \langle\psi|p|\psi\rangle\dfrac{1}{m} \\ \dfrac{d}{dt}\langle\psi|p|\psi\rangle = -m\omega^2\langle\psi|q|\psi\rangle \end{cases}$$

Quindi

$$\frac{d^2}{dt^2}\langle\psi|q|\psi\rangle = -\omega^2\langle\psi|q|\psi\rangle$$

Da cui

$$\langle\psi|q|\psi\rangle = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$$\langle\psi|p|\psi\rangle = m\frac{d}{dt}\langle\psi|q|\psi\rangle =$$

$$= -mA\omega\sin\omega t + mB\omega\cos\omega t$$

Al tempo $t=0$

$$A = \langle\psi|q|\psi\rangle|_{t=0} = \beta$$

$$B = \frac{1}{m\omega}\langle\psi|p|\psi\rangle|_{t=0} = \frac{\gamma}{m\omega}$$

Quindi al tempo t

$$\begin{cases} \langle\psi|q|\psi\rangle = \beta\cos\omega t + \dfrac{\gamma}{m\omega}\sin\omega t \\ \langle\psi|p|\psi\rangle = -m\beta\omega\sin\omega t + \gamma\cos\omega t \end{cases}$$

Per calcolare $\langle\psi|\Pi|\psi\rangle$, Π operatore di parità, notiamo che $[\Pi, H]=0$ per cui il valor medio non dipende da t

$$\langle\psi|\Pi|\psi\rangle = N^2\int dx\, e^{-\alpha(x-\beta)^2 - i\gamma x/\hbar}\, e^{-\alpha(x+\beta)^2 - i\gamma x/\hbar}$$

$$= N^2\int dx\, e^{-2\alpha x^2 - 2\alpha\beta^2 - 2i\gamma x/\hbar}$$

Di nuovo facciamo una traslazione $x = y + a$

$$\text{Exp}\ -2\alpha x^2 - 2\alpha\beta^2 - 2i\gamma x/\hbar$$

$$= -2\alpha(y+a)^2 - 2\alpha\beta^2 - 2i\gamma(y+a)/\hbar$$

$$= -2\alpha y^2 - 2\alpha\, 2ay - 2\alpha a^2 - 2\alpha\beta^2 - 2i\gamma y/\hbar - 2ia\gamma$$

Scegliamo a in modo che

$$-4\alpha a y - 2i\gamma y/\hbar = 0$$

$$a = -\frac{i\gamma}{2\alpha\hbar}$$

Quindi l'esponente Exp è dato da

$$\text{Exp} = -2\alpha y^2 - 2\alpha\beta^2 + 2\alpha\frac{\gamma^2}{4\alpha^2\hbar^2} - 2i\gamma\left(\frac{-i\gamma}{2\alpha\hbar}\right)$$

$$= -2\alpha y^2 - 2\alpha\beta^2 - \frac{\gamma^2}{2\alpha\hbar^2}$$

$$\langle\psi|\Pi|\psi\rangle = \mathcal{N}^2 \int dy\, e^{-2\alpha y^2}\, e^{-2\alpha\beta^2 - \frac{\gamma^2}{2\alpha\hbar^2}}$$

$$= e^{-2\alpha\beta^2 - \gamma^2/2\alpha\hbar^2}$$

Esame di Meccanica Quantistica 11/09/2025

Esercizio 1. Una particella di spin 1/2 libera di muoversi in una dimensione è soggetta ad una Hamiltoniana

$$H = H_0 + a\big(| + 1/2\rangle\langle -1/2| - | - 1/2\rangle\langle +1/2|\big),$$

dove a è una costante complessa tale che $\mathrm{Im}(a) < 0$; H_0 dipende solo dalle coordinate spaziali e, in assenza di spin, ha spettro non degenere; $| \pm \frac{1}{2}\rangle$ sono gli autovettori della componente z dello spin. Si supponga di conoscere lo spettro di H_0, ossia le energie E_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $(E_0 < E_1 < E_2 \ldots)$ e le corrispondenti autofunzioni normalizzate $\langle x|n\rangle = \psi_n(x)$.

a) Sapendo che il primo stato eccitato di H ha degenerazione 2, si determini la costante a, l'energia dello stato fondamentale e del primo stato eccitato. Nel seguito si fissi a al valore trovato.

b) Si discuta l'energia e la degenerazione del secondo stato eccitato al variare di E_0, E_1 ed E_2.

c) Si consideri l'operatore che opera unicamente sulla parte spaziale

$$A = b(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|) + b\sum_{n=0}^{\infty} n|n\rangle\langle n|,$$

dove b è una costante positiva. Si determini lo stato $|\psi\rangle$ che appartiene al primo livello eccitato di H e che minimizza $\langle\psi|A|\psi\rangle$.

d) Per lo stato trovato al punto c) si calcolino i valori ottenibili da una misura di S_y e le rispettive probabilità.

Esercizio 2. Si considerino due particelle di spin 1/2 e 1 e stessa massa m le cui variabili canoniche associate sono rispettivamente $(\mathbf{r}_1, \mathbf{p}_1)$ e $(\mathbf{r}_2, \mathbf{p}_2)$.
La Hamiltoniana del sistema è data da

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m} + \gamma\,(\hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2)^2 \qquad \gamma > 0. \tag{1}$$

Si svolga l'esercizio nel sistema di riferimento del centro di massa.

a) Si determinino i livelli energetici di $\hat{H}$, la loro degenerazione e si fornisca un base di autoket.

b) Il sistema si trova in uno $|\psi\rangle$ tale che:
(i) le misure di $\hat{J}^2$ (momento angolare totale al quadrato) e di $\hat{J}_z$ (proiezione lungo l'asse z) forniscono con certezza i valori $\frac{35}{4}\hbar^2$ e $-\frac{3}{2}\hbar$ rispettivamente;
(ii) $|\psi\rangle$ è autostato di $\hat{H}$ con autovalore più piccolo possibile compatibile con la condizione (i).
Quali sono i possibili risultati, e le rispettive probabilità, di una misura di $\hat{S}^2$ (spin totale al quadrato)?
Quali sono i possibili risultati, e le rispettive probabilità, di una misura della proiezione dello spin lungo z della particella con spin 1?

c) La Hamiltoniana viene ora perturbata dall'operatore $\hat{V} = \epsilon\gamma\hat{z}^2$, dove con $\hat{z}$ si è indicata la componente lungo l'asse z della coordinata relativa e $0 < \epsilon \ll 1$. Si calcoli la correzione al primo ordine in ϵ dell'energia del livello fondamentale e si discuta l'eventuale rimozione della degenerazione.

d) Si determini in maniera esatta il valore dell'energia del livello fondamentale di $\hat{H} + \hat{V}$ per $\epsilon > 0$ arbitrario. Si confronti con il risultato ottenuto perturbativamente al punto precedente.

Esercizio 1

a) Scriviamo la parte di spin come matrice nella base $\{|-\frac{1}{2}\rangle, |\frac{1}{2}\rangle\}$

Se $H_{spin} = a|\frac{1}{2}\rangle\langle-\frac{1}{2}| - a|-\frac{1}{2}\rangle\langle\frac{1}{2}|$

$H_{spin}|\frac{1}{2}\rangle = -a|-\frac{1}{2}\rangle$

$H_{spin}|-\frac{1}{2}\rangle = a|\frac{1}{2}\rangle$

Se $|\frac{1}{2}\rangle \to (1,0)$, $|-\frac{1}{2}\rangle \to (0,1)$ abbiamo

$$H_{spin} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Determiniamo gli autovalori di H_{spin}

$$\det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2+1 \implies \lambda_\pm \pm i$$

Gli autovalori sono quindi $\pm ia$

Lo spettro di H è quindi dato da

$$E_n+ia , E_n-ia$$

La hermiticità di H (o equivalentemente la realtà delle energie) richiede che a sia immaginario puro. Scriviamo $a=-i\hat{a}$ con $\hat{a}$ reale e positivo (dato che $\mathrm{Im}\, a<0$). Lo spettro è quindi dato da

$$E_n+\hat{a} , E_n-\hat{a} \qquad \hat{a}>0 \qquad n=0,1,2.$$

Lo stato fondamentale ha quindi energia $E_0 - \hat{a}$.
I due stati successivi in energia hanno energie $E_0 + \hat{a}$, $E_1 - \hat{a}$. Dato che il primo eccitato è degenere

$$E_0 + \hat{a} = E_1 - \hat{a} \qquad \hat{a} = \frac{E_1 - E_0}{2}$$

Corrispondemente

$$E_{fond} = E_0 - \hat{a} = E_0 - \frac{1}{2}(E_1 - E_0) = \frac{3E_0}{2} - \frac{E_1}{2} \qquad \text{(non deg)}$$

$$E_{I\,ecc} = E_0 + \hat{a} = E_0 + \frac{1}{2}(E_1 - E_0) = \frac{E_0}{2} + \frac{E_1}{2} \qquad \text{deg. } 2$$

b)
Il secondo stato eccitato può avere energia
$E_2 - \hat{a}$ oppure $E_1 + \hat{a}$

Vi sono quindi 3 casi

i) $E_2 - \hat{a} < E_1 + \hat{a}$ $\qquad E_2 - E_1 < 2\hat{a} = E_1 - E_0 \qquad E_2 - 2E_1 + E_0 < 0$

In questo caso $E_{II\,ecc} = E_2 - \frac{E_1 - E_0}{2}$ NON DEG.

ii) $E_2 - \hat{a} > E_1 + \hat{a}$ $\qquad E_2 - 2E_1 + E_0 > 0$

In questo caso $E_{II\,ecc} = E_1 + \hat{a} = \frac{3E_1}{2} - \frac{E_0}{2}$ NON DEG.

iii) $E_2 - \hat{a} = E_1 + \hat{a}$ $\qquad E_2 - 2E_1 + E_0 = 0$

$E_{II\,ecc.} = \frac{3E_1}{2} - \frac{E_0}{2}$ degenerazione 2

c)

Se $|+\hat{a}\rangle, |-\hat{a}\rangle$ sono le due autofunzioni di H_{spin}

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle|+\hat{a}\rangle + \beta|1\rangle|-\hat{a}\rangle \qquad |\alpha|^2+|\beta|^2=1$$

Per l'ortogonalità delle funzioni di spin

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = |\alpha|^2\langle 0|A|0\rangle + |\beta|^2\langle 1|A|1\rangle$$
$$= |\beta|^2 b$$

Essendo $b>0$ il minimo corrisponde a $\beta=0$.

Quindi $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle|+\hat{a}\rangle = |0\rangle|+\hat{a}\rangle \quad (|\alpha|=1)$

d)

Notiamo che

$$H_{spin} = a\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -i\hat{a}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \hat{a}\,\sigma_y = \frac{2\hat{a}}{\hbar} S_y$$

Quindi $S_y = \dfrac{\hbar}{2\hat{a}} H_{spin}$ e

$$S_y|\hat{a}\rangle = \frac{\hbar}{2\hat{a}} H_{spin}|\hat{a}\rangle = \frac{\hbar}{2}|\hat{a}\rangle$$

Quindi $|\hat{a}\rangle$ è autovettore di S_y con autovalore $+\frac{\hbar}{2}$. Quindi una misura di S_y su $|\psi\rangle$ dà $\frac{\hbar}{2}$ con certezza.

Esercizio 2

a)

Nel sistema del CM, la Hamiltoniana diventa

$$H = \frac{1}{2\mu} p^2 + \gamma r^2 \qquad \mu = \frac{m}{2}$$

dove $\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ e $\bar{p}$ è l'impulso canonico associato

Definiamo ω come

$$\frac{1}{2}\mu\omega^2 = \gamma \qquad \omega = \sqrt{\frac{2\gamma}{\mu}} = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$$

Lo spettro è quello dell'oscillatore armonico isotropo 3D (in assenza di spin)

$$E = \hbar\omega\left(n + \frac{3}{2}\right)$$

Se $n = n_x + n_y + n_z$ una base è data

$$\psi_{n_x, n_y, n_z}(x, y, z) = \psi_{n_x}(x)\psi_{n_y}(y)\psi_{n_z}(z)$$

dove $\psi_n(x)$ sono le autofunzioni dell'oscillatore 1D.

Degenerazione dell'oscillatore 3D:

$n=0$ FOND : $n_x = n_y = n_z = 0 \Rightarrow deg = 1$

$n=1$ I ecc. : $(n_x, n_y, n_z) = \left.\begin{matrix}(1,0,0)\\(0,1,0)\\(0,0,1)\end{matrix}\right\} deg = 3$

$n=2$ II ecc : $(n_x, n_y, n_z) = \left.\begin{matrix}(2,0,0)\\(0,2,0)\\(0,0,2)\\(1,1,0)\\(1,0,1)\\(0,1,1)\end{matrix}\right\} deg = 6$

Se consideriamo lo spin lo spettro è identico ma cambiano le degenerazione. I possibili stati di spin formano uno spazio vettoriale di dimensione $2 \times 3 = 6$. Quindi

$n=0$ deg 6 $|000\rangle|S_1 S_{1z}\rangle|S_2 S_{2z}\rangle$

$n=1$ deg $3 \times 6 = 18$ $|100\rangle|S_1 S_{1z}\rangle|S_2 S_{2z}\rangle$ + 2 stati con $|100\rangle \to |010\rangle$, $|100\rangle \to |001\rangle$

$n=2$ deg $6 \times 6 = 36$ ....

$\vdots$

b)

È utile ricordare la base sferica per l'oscillatore 3D

$n=0$ fond : $|n\,\ell\,m\rangle = |0\,0\,0\rangle$

$n=1$ I ecc : $|1\,1\,m\rangle$ $m=-1,0,1$ deg. 3

$n=2$ II ecc : $\begin{cases} |2\,0\,0\rangle & \text{deg } 1 \\ |2\,2\,m\rangle \quad m=-2,-1,0,1,2 & \text{deg } 5 \end{cases}$ $\Big\}$ deg 6

⋮

Nel nostro caso bisogna poi moltiplicare la funzione d'onda spaziale per la parte di spin.
Se $\bar{S} = \bar{S}_1 + \bar{S}_2$, S può assumere i valori $1/2$, $3/2$
Quindi lo spettro è

$n=0$ $\begin{cases} |0\,0\,0\rangle|\frac{1}{2}\,S_z\rangle \longrightarrow 2 \text{ stati} \\ |0\,0\,0\rangle|\frac{3}{2}\,S_z\rangle \longrightarrow 4 \text{ stati} \end{cases}$ $\Big\}$ deg. 6

$n=1$ $\begin{cases} |1\,1\,m\rangle|\frac{1}{2}\,S_z\rangle \longrightarrow 3\times 2 \text{ stati} \\ |1\,1\,m\rangle|\frac{3}{2}\,S_z\rangle \longrightarrow 3\times 4 \text{ stati} \end{cases}$ $\Big\}$ deg 18

$n=2$ $\begin{cases} |2\,0\,0\rangle|\frac{1}{2}\,S_z\rangle \longrightarrow 2 \text{ stati} \\ |2\,2\,m\rangle|\frac{1}{2}\,S_z\rangle \longrightarrow 5\times 2 \text{ stati} \\ |2\,0\,0\rangle|\frac{3}{2}\,S_z\rangle \longrightarrow 4 \text{ stati} \\ |2\,2\,m\rangle|\frac{3}{2}\,S_z\rangle \longrightarrow 5\times 4 \text{ stati} \end{cases}$ $\Bigg\}$ deg $2+10+4+20 = 36$

Sapendo che lo stato è autovettore di J^2 (7)
con autovalore $\frac{35}{4}\hbar^2$ ricaviamo $J = \frac{5}{2}$

Vediamo quale è l'autostato di H con tale proprietà che ha l'energia minore

$$
\begin{array}{ll}
 & \quad n\ \ell\ m \qquad s \\
n=0 & \begin{cases} |1\,0\,0\,0\rangle \left|\frac{1}{2}\ s_z\right\rangle \longrightarrow J = \frac{1}{2} & \underline{\text{NO}} \\ |1\,0\,0\,0\rangle \left|\frac{3}{2}\ s_z\right\rangle \longrightarrow J = \frac{3}{2} & \underline{\text{NO}} \end{cases}
\end{array}
$$

$$
n=1 \quad \begin{cases} |1\,1\,1\,m\rangle \left|\frac{1}{2}\ s_z\right\rangle \longrightarrow J = \begin{cases} 1/2 & \text{NO} \\ 3/2 & \text{NO} \end{cases} \\ |1\,1\,1\,m\rangle \left|\frac{3}{2}\ s_z\right\rangle \longrightarrow J = \begin{cases} 1/2 & \text{NO} \\ 3/2 & \underline{\text{NO}} \\ 5/2 & \underline{\text{ok}} \end{cases} \end{cases}
$$

Ricaviamo quindi che lo stato $|\psi\rangle$ è combinazione di $|1\,1\,1\,m\rangle\left|\frac{3}{2}\ s_z\right\rangle$ al variare di m e s_z che possiamo indicare come

$$
|\psi\rangle = \left|\overset{n}{1}\ \overset{\ell}{1}\ \overset{S}{\tfrac{3}{2}}\ \overset{J}{\tfrac{5}{2}}\ \overset{J_z}{-\tfrac{3}{2}}\right\rangle \qquad \left[\text{abbiamo usato che è autostato di } J_z\right]
$$

Questo stato è autostato di S^2. Quindi una misura di S^2 dà $\frac{15}{4}\hbar^2$ con certezza $\left(S = \frac{3}{2}\right)$

Per rispondere alla II domanda dobbiamo cambiare base. Utilizzando le tabelle CG $3/2 \times 1$ abbiamo

$$
|\psi\rangle = \sqrt{\frac{3}{5}}\,|\overset{n}{1}\,1\,\overset{\ell}{1}\,\overset{m}{-1}\rangle\left|\overset{S}{\tfrac{3}{2}}\ \overset{S_z}{-\tfrac{1}{2}}\right\rangle +
$$
$$
+\sqrt{\frac{2}{5}}\,|1\,1\,1\,0\rangle\left|\frac{3}{2}\ -\frac{3}{2}\right\rangle
$$

Ora riscriviamo gli stati $|S\, S_z\rangle$ in termini di $|1\, S_{1z}\rangle |\frac{1}{2}\, S_{2z}\rangle$, gli autovettori di singola particella. Dalle tabelle $1 \times 1/2$ abbiamo

$$\left|\overset{S}{\tfrac{3}{2}}\ \overset{S_z}{-\tfrac{1}{2}}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\left|\overset{s_1}{1}\ \overset{s_{1z}}{0}\right\rangle \left|\overset{s_2}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{s_{2z}}{-\tfrac{1}{2}}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|1\ -1\rangle \left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$\left|\tfrac{3}{2}\ -\tfrac{3}{2}\right\rangle = |1\ -1\rangle \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

Quindi

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{2}{5}}\,|\overset{n}{1}\ \overset{\ell}{1}\ \overset{m}{-1}\rangle \left|\overset{s_1}{1}\ \overset{s_{1z}}{0}\right\rangle \left|\overset{s_2}{\tfrac{1}{2}}\ \overset{s_{2z}}{-\tfrac{1}{2}}\right\rangle$$

$$+\sqrt{\frac{1}{5}}\,|1\ 1\ -1\rangle\,|1\ -1\rangle \left|\tfrac{1}{2}\ \tfrac{1}{2}\right\rangle$$

$$+\sqrt{\frac{2}{5}}\,|1\ 1\ 0\rangle\,|1\ -1\rangle \left|\tfrac{1}{2}\ -\tfrac{1}{2}\right\rangle$$

Quindi

$$\text{Prob}\,(S_{1z} = 0) = \frac{2}{5}$$

$$\text{Prob}\,(S_{1z} = -\hbar) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

c)

L'operatore non dipende dallo spin. La degenerazione (deg = 6) non è rimossa e tutti i livelli vengono spostati di

$$\Delta E = \epsilon\gamma \langle \text{fond} | z^2 | \text{fond} \rangle$$

Dato che $|\text{fond}\rangle = |0\rangle_x |0\rangle_y |0\rangle_z$ (base cartesiana)

$$\Delta E = \epsilon\gamma\ {}_z\langle 0 | z^2 | 0\rangle_z = \epsilon\gamma \langle 0 | q^2 | 0 \rangle_{1D}$$

Ora $\quad a+a^\dagger = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\mu\omega}{\hbar}}\, q$

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\,(a+a^\dagger)$$

Quindi $\quad q|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{\mu\omega}}\,|1\rangle$

$$\langle 0|q^2|0\rangle = |q|0\rangle|^2 = \frac{\hbar}{2\mu\omega}$$

Quindi $\quad \Delta E = \epsilon\gamma\frac{\hbar}{2\mu\omega} = \epsilon\frac{\hbar}{2\mu\omega}\overbrace{\frac{1}{2}\mu\omega^2}^{=\gamma} = \frac{\epsilon}{4}\hbar\omega$

d)

Possiamo riscrivere H come

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \gamma(x^2+y^2) + \gamma(1+\epsilon)z^2$$

Se $\omega = 2\sqrt{\frac{\gamma}{m}}$, $\Omega = \omega\sqrt{1+\epsilon}$ lo spettro è

$$E_n = \hbar\omega(n_x+n_y+1) + \hbar\Omega\left(n_z+\frac{1}{2}\right) \qquad n = (n_x, n_y, n_z)$$

Quindi lo stato fondamentale ha energia

$$E = \hbar\omega + \hbar\omega\sqrt{1+\epsilon}\,\frac{1}{2} \qquad \sqrt{1+\epsilon} \simeq 1+\frac{\epsilon}{2}$$

$$= \frac{3}{2}\hbar\omega + \frac{\hbar\omega}{4}\epsilon \quad (\text{per } \epsilon \ll 1)$$

Riproduciamo il risultato al punto c)

Esame di Meccanica Quantistica 14/11/2025

Esercizio 1. Una particella di spin 3/2 è confinata nel volume

$$V = \{0 \le x \le L,\ 0 \le y \le L,\ 0 \le z \le L/2\}$$

all'interno del quale si muove liberamente.

a) Calcolare i primi 4 livelli energetici, le relative degenerazioni e le corrispondenti autofunzioni.

b) Si consideri al tempo $t = 0$ la seguente funzione d'onda

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{\sqrt{3}} f(\boldsymbol{r}) \Big|\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\Big\rangle + N g(\boldsymbol{r}) \Big|\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\Big\rangle\,,$$

dove N è una costante reale positiva, $|s\, m_s\rangle$ sono autoket di S^2, S_z e la normalizzazione delle funzioni $f(\boldsymbol{r})$, $g(\boldsymbol{r})$ è tale per cui:

$$\int_V d^3r\, |f(\boldsymbol{r})|^2 = 1 = \int_V d^3r\, |g(\boldsymbol{r})|^2$$

Si determini la costante N in modo che $\Psi(\boldsymbol{r})$ sia normalizzata. Si specifichino i possibili risultati di una misura di S_z e le relative probabilità.

Nelle domande seguenti si consideri:

$$f(x, y, z) = \frac{8\sqrt{15}}{L^{7/2}} \left(zL - 2z^2\right) \sin\frac{2\pi x}{L} \sin\frac{\pi y}{L} \qquad g(x, y, z) = \frac{4}{L^{3/2}} \sin\frac{2\pi z}{L} \sin\frac{\pi x}{L} \sin\frac{2\pi y}{L}\,.$$

c) Calcolare la probabilità che una misura dell'energia dia come risultato il valore del primo livello eccitato.

d) Calcolare il valor medio $\langle z\rangle$ sullo stato $\Psi(\vec{x})$.

Integrali utili:

$$\int_0^1 dx\, x \sin(x\pi) = \frac{1}{\pi}\,, \qquad \int_0^1 dx\, x^2 \sin(x\pi) = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi^3}\,.$$

Esercizio 2. Si consideri una particella di spin 1 soggetta alla Hamiltoniana (si consideri solo la parte di spin)

$$H = \frac{a}{\hbar^2}(S_x \cos\alpha + S_z \sin\alpha)^2,$$

dove $a > 0$ ad α sono costanti date.

a) Si determinino i livelli di H e la relativa degenerazione. Si spieghi perchè il risultato non dipende dal parametro α.

b) Si determinino gli autovettori di H in termini di autostati di S_z. Si risponda alle domanda fissando $\alpha = \pi/6$. Si utilizzi tale valore di α anche nelle domande successive.

c) Si consideri l'autostato $|\psi\rangle$ di S_z con autovalore nullo. Si determinino il suo evoluto $|\psi(t)\rangle$ al tempo t ed i valori medi $\langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle$, $\langle\psi(t)|S_z|\psi(t)\rangle$.

d) Viene aggiunta una perturbazione $V = \lambda S_z$. Si calcolino gli autovalori di $H + V$ al primo ordine in λ.
Quale condizione (diseguaglianza) deve soddisfare $|\lambda|$ perchè si possa applicare la teoria perturbativa?

ESERCIZIO 1

Consideriamo il problema in assenza di spin
Il problema è separabile e lo spettro si ottiene combinando i risultati per tre buche 1D di larghezze $L, L, L/2$

Buca larghezza L $\quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}n^2 \qquad \psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi n x}{L}$

Buca larghezza $L/2$ $\quad E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{4\pi^2}{L^2}n^2 \qquad \phi_n(x) = \frac{2}{\sqrt{L}}\sin\frac{2\pi n x}{L}$

Quindi lo spettro è

$$E_{nmp} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}(n^2+m^2+4p^2) = \mathcal{E}_0(n^2+m^2+4p^2) \qquad n,m,p: 1,2,\dots$$

$$\psi_{nmp} = \cancel{\phi_n(x)\phi_m(y)\phi_p(z)} = \psi_n(x)\,\psi_m(y)\,\phi_p(z)$$

Primi livelli $\qquad \mathcal{E}_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

	$(n\ m\ p)$		
SF	$(1\ 1\ 1)$	$E = 6\mathcal{E}_0$	non deg.
I ecc	$(2\ 1\ 1)$, $(1\ 2\ 1)$	$E = 9\mathcal{E}_0$	2 deg.
II ecc	$(2\ 2\ 1)$	$E = 12\mathcal{E}_0$	non deg.
III ecc	$(3\ 1\ 1)$, $(1\ 3\ 1)$	$E = 14\mathcal{E}_0$	2 deg.

In presenza di spin è sufficiente moltiplicare le funzioni spaziali per la funzione di spin. Una base è

$$\psi_{nmp}(x,y,z)\left|\tfrac{3}{2}\ m\right\rangle \qquad m: -\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}$$

Quindi

SF $\quad E = 6\mathcal{E}_0 \quad$ deg. 4

I ecc $\quad E = 9\mathcal{E}_0 \quad$ deg. 8

II ecc $\quad E = 12\mathcal{E}_0 \quad$ deg. 4

III ecc $\quad E = 14\mathcal{E}_0 \quad$ deg. 8

b) Per l'ortogonalità delle funzioni di spin

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \frac{1}{3}\int d^3x\, |f|^2 + |N|^2 \int d^3x\, |g|^2 = \frac{1}{3} + N^2$$

Quindi $N = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Segue $\text{Prob}\,(S_z = \frac{3}{2}\hbar) = \frac{1}{3}$

$\text{Prob}\,(S_z = \hbar/2) = \frac{2}{3}$

c) Riscriviamo le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ in termini delle autofunzioni di buca

$$g(x) = \psi_1(x)\,\psi_2(y)\,\phi_1(z) = \psi_{121}(x,y,z) \quad \text{è autofunzione di } H$$

$$f(x) = \frac{8\sqrt{15}}{L^{7/2}}(zL - 2z^2)\,\frac{L}{2}\left[\sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\frac{2\pi x}{L}\,\sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\frac{\pi y}{L}\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{15}}{L^{5/2}}(zL - 2z^2)\,\psi_2(x)\,\psi_1(y)$$

Definiamo $F(z) = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}}\left(\frac{z}{L} - \frac{2z^2}{L^2}\right)$

Quindi $f(x,y,z) = \psi_2(x)\,\psi_1(y)\,F(z)$

Per calcolare le probabilità notiamo che

$$|211\rangle \left|\tfrac{3}{2}\, m\right\rangle \equiv |2\,1\,1\,m\rangle \qquad \langle \vec{x} | n\,m\,p\rangle = \psi_{nmp}(x,y,z)$$

$$|121\rangle \left|\tfrac{3}{2}\, m\right\rangle \equiv |1\,2\,1\,m\rangle$$

sono una base. (con $m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$)

Quindi

$$\text{Prob}\,(E = 9\mathcal{E}_0) = \sum_m |\langle 211\,m | \psi\rangle|^2 + \sum_m |\langle 121\,m|\psi\rangle|^2$$

$$= |\langle 211\ \tfrac{3}{2} | \psi\rangle|^2 + |\langle 211\ \tfrac{1}{2}|\psi\rangle|^2$$

$$+ |\langle 121\ \tfrac{3}{2}|\psi\rangle|^2 + |\langle 121\ \tfrac{1}{2}|\psi\rangle|^2$$

$$= |\langle 211|g\rangle|^2 N^2 + \frac{1}{3}|\langle 211|f\rangle|^2$$

$$+ |\langle 121|g\rangle|^2 N^2 + \frac{1}{3}|\langle 121|f\rangle|^2$$

Dato che $|g\rangle = |121\rangle$

$$\langle 211|g\rangle = 0 \qquad \langle 121|g\rangle = 1$$

Abbiamo poi

$$\langle 211|f\rangle = \int dx\,dy\,dz\, \psi_2(x)\psi_1(y)\phi_1(z)\psi_2(x)\psi_1(y)\,F(z)$$

$$= \underbrace{\int dx\, \psi_2(x)^2}_{=1} \underbrace{\int dy\, \psi_1(y)^2}_{=1} \int dz\, \phi_1(z) F(z) = \int dz\, \phi_1 F =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{L}} \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}} \int_0^{L/2} dz \left(\frac{z}{L} - \frac{2z^2}{L^2}\right) \sin\left(\frac{2\pi z}{L}\right) \qquad z = \frac{L}{2}\xi$$

$$= \frac{8\sqrt{15}}{L} \frac{L}{2} \int_0^1 d\xi \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{2}\right) \sin \pi\xi = 2\sqrt{15}\left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{4}{\pi^3}\right) = \frac{8\sqrt{15}}{\pi^3}$$

$$\langle 121|f\rangle = \int dx\,dy\,dz\, \psi_1(x)\psi_2(y)\phi_1(z)\psi_2(x)\psi_1(y)\,F(z) =$$

$$= \underbrace{\int dx\, \psi_1(x)\psi_2(x)}_{=0} \underbrace{\int dy\, \psi_2(y)\psi_1(y)}_{=0} \int dz\, \phi_1(z) F(z) = 0$$

Quindi $\quad \text{Prob} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{64 \cdot 15}{\pi^6} = \frac{2}{3} + \frac{320}{\pi^6}$

d) Per l'ortogonalità delle funzioni di spin

$$\langle \Psi|z|\Psi\rangle = \frac{1}{3}\langle f|z|f\rangle + \frac{2}{3}\langle g|z|g\rangle$$

$$\langle f|z|f\rangle = \int dx\,dy\,dz\; z\, \psi_2(x)^2 \psi_1(y)^2 F(z)^2 =$$

$$= \underbrace{\int dx\, \psi_2(x)^2}_{=1} \underbrace{\int dy\, \psi_1(y)^2}_{=1} \int dz\, z\, F(z)^2 = \int dz\, z\, F(z)^2 =$$

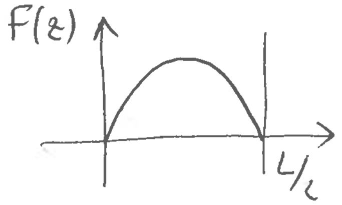
$$= \frac{16 \cdot 15}{L} \int_0^{L/2} dz\; z \left(\frac{z}{L} - \frac{2z^2}{L^2}\right)^2 = \qquad z = \frac{L}{2}\xi$$

$$= \frac{16 \cdot 15}{L} \cdot \frac{L^2}{4} \int_0^1 d\xi\, \xi \left(\frac{\xi}{2} - \frac{\xi^2}{2}\right)^2 =$$

$$= 15L \int_0^1 d\xi\, \xi^3 (1-\xi)^2 = 15L \int_0^1 d\xi \left(\xi^3 - 2\xi^4 + \xi^5\right)$$

$$= 15L \left[\frac{1}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{6}\right] = \frac{L}{4}$$

Il calcolo dell'integrale si poteva anche fare in modo diverso sfruttando la simmetria di $F(z)$



$F(z)$ è simmetrica intorno a $z=\frac{L}{4}$ ossia [formalmente]

$$F\left(\frac{L}{2}-z\right) = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}}\left[\frac{1}{L}\left(\frac{L}{2}-z\right)-\frac{2}{L^2}\left(\frac{L}{2}-z\right)^2\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}}\left[\frac{1}{2}-\frac{z}{L}-\frac{2}{L^2}\left(\frac{L^2}{4}+z^2-Lz\right)\right]$$

Questa proprietà si vede anche dal grafico $\rightarrow$

$$= \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}}\left[\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{z}{L}-\cancel{\frac{1}{2}}-\frac{2z^2}{L^2}+\frac{2z}{L}\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}}\left(\frac{z}{L}-\frac{2z^2}{L^2}\right) = F(z)$$

Quindi, se poniamo $x=\frac{L}{2}-z$

$$\left[F\left(\tfrac{L}{2}-x\right)=F(x)\right]$$

$$\int_0^{L/2} dz\, z F(z)^2 = \int_{L/2}^{0}(-dx)\left(\frac{L}{2}-x\right)F(x)^2 =$$

$$= \int_0^{L/2} dx\left(\frac{L}{2}-x\right)F(x)^2 = \frac{L}{2}\int_0^{L/2} dx\, F(x)^2 - \int_0^{L/2} dx\, x\, F(x)^2$$

cambio nome $z \rightarrow x$

$$\int_0^{L/2} dx\, x\, F(x)^2 = \frac{L}{2}\int_0^{L/2} dx\, F(x)^2 - \int_0^{L/2} dx\, x\, F(x)$$

Portando il termine $-\int dx\, F(x)^2 x$ al primo membro otteniamo

$$2\int_0^{L/2} dx\, x\, F(x)^2 = \frac{L}{2}\int_0^{L/2} dx\, F(x)^2$$

da cui $$\int_0^{L/2} dx\, x\, F(x)^2 = \frac{L}{4}\int_0^{L/2} dx\, F(x)^2$$

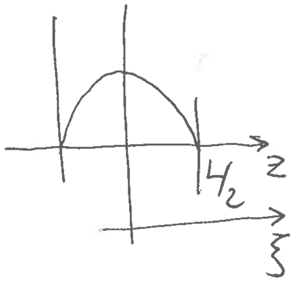
Infine, dato che f è normalizzata abbiamo

$$1 = \int d^3r\, |f|^2 = \underbrace{\int dx\, \psi_2(x)^2}_{=1}\underbrace{\int dy\, \psi_1(y)^2}_{=1}\int dz\, F(z)^2 = \int dz\, F(z)^2$$

Quindi

$$\int_0^{L/2} dx\, x\, F(x)^2 = \frac{L}{4} \quad \text{come ottenuto nel calcolo diretto}$$

La simmetria si può pure sfruttare spostando l'origine [questo è il metodo più rapido]



$$z = \xi + \frac{L}{4}$$

$$\tilde{F}(\xi) = F\left(\xi + \frac{L}{4}\right) = \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}}\left(\frac{1}{L}\left(\xi + \frac{L}{4}\right) - \frac{2}{L^2}\left(\xi + \frac{L}{4}\right)^2\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}}\left[\frac{\xi}{L} + \frac{1}{4} - \frac{2\xi^2}{L^2} - \frac{\xi}{L} - \frac{1}{8}\right]$$

$$= \frac{4\sqrt{15}}{\sqrt{L}}\left(\frac{1}{8} - \frac{2\xi^2}{L^2}\right)$$

da cui segue $\tilde{F}(\xi) = \tilde{F}(-\xi)$. Quindi

$$\int_0^{L/2} dx\, x\, F(x)^2 = \int_{-L/4}^{L/4} d\xi \left(\xi + \frac{L}{4}\right) \tilde{F}(\xi)^2 =$$

$$= \frac{L}{4} \underbrace{\int_{-L/4}^{L/4} d\xi\, \tilde{F}(\xi)^2}_{=1} + \underbrace{\int_{-L/4}^{L/4} d\xi\, \xi\, \tilde{F}(\xi)^2}_{=0 \text{ per simmetria}}$$

$$= \frac{L}{4}$$

Rimane da calcolare $\langle g|z|g\rangle$

$$\langle g|z|g\rangle = \int d^3x\, z\, \psi_1(x)^2 \psi_2(y)^2 \phi_1(z)^2$$

$$= \underbrace{\int dx\, \psi_1(x)^2}_{=1} \underbrace{\int dy\, \psi_2(y)^2}_{=1} \int dz\, z\, \phi_1(z)^2$$

$$= \int dz\, z\, \phi_1(z)^2$$

Dobbiamo calcolare il valor medio di z sull'autofunzione relativa allo stato fondamentale della buca.
L'approccio più diretto è di nuovo quello di

spostare l'origine al centro della buca

$$\int_0^{L/2} dz\, z\, \phi_1(z)^2 = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} dz\, z \sin^2\frac{2\pi z}{L} \qquad z = \xi + \frac{L}{4}$$

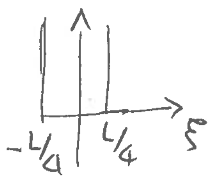
$$= \frac{4}{L}\int_{-L/4}^{L/4} d\xi \left(\xi + \frac{L}{4}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi\xi}{L} + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \underbrace{\frac{4}{L}\int_{-L/4}^{L/4} d\xi\, \xi \cos^2\left(\frac{2\pi\xi}{L}\right)}_{=0} + \frac{L}{4}\int_{-L/4}^{L/4} d\xi\, \frac{4}{L}\cos^2\left(\frac{2\pi\xi}{L}\right)$$

per simmetria

$$= \frac{L}{4}\int_{-L/4}^{L/4} d\xi\, \underbrace{\frac{4}{L}\cos^2\left(\frac{2\pi\xi}{L}\right)}$$

quadrato dell'autof delle buca
[che è NORMALIZZATA!]



$$= \frac{L}{4}$$

Quindi

$$\langle f|z|f\rangle = \langle g|z|g\rangle = \frac{L}{4} \implies \langle\psi|z|\psi\rangle = \frac{L}{4}$$

CALCOLO DIRETTO

$$\int_0^{L/2} dz\, z\, \phi_1(z)^2 = \frac{4}{L}\int_0^{L/2} dz\, z \sin^2\frac{2\pi z}{L} \qquad z = \frac{L}{2}\xi$$

$$= L\int_0^1 d\xi\, \xi \sin^2 \pi\xi$$

$$= \frac{L}{2}\int_0^1 d\xi\, \xi\, (1 - \cos 2\pi\xi)$$

$$= \frac{L}{4} - \frac{L}{2}\int_0^1 d\xi\, \xi \cos 2\pi\xi$$

$$= \frac{L}{4} - \frac{L}{2}\int_0^1 d\xi \left[\frac{d}{d\xi}\left(\frac{\xi}{2\pi}\sin 2\pi\xi\right) - \frac{1}{2\pi}\sin 2\pi\xi\right]$$

$$= \frac{L}{4} - \frac{L}{4\pi}\underbrace{\Big[\xi \sin 2\pi\xi\Big]_0^1}_{=0} + \frac{L}{4\pi}\underbrace{\int_0^1 d\xi \sin 2\pi\xi}_{=0} = \frac{L}{4}$$

ESERCIZIO 2

(a)

Se $\hat{n} = (\cos\alpha, 0, \sin\alpha)$ è un versore

$$H = \frac{a}{\hbar^2} (\bar{S}\cdot\hat{n})^2$$

$S\cdot\hat{n}$ è la componente di $\bar{S}$ lungo $\hat{n}$ e quindi ha autovalori, $-\hbar, 0, +\hbar$, indipendentemente da $\hat{n}$.

Quindi, se $|m\rangle_{\bar{S}\cdot\hat{n}}$ sono le autofunzioni di $S\cdot\hat{n}$, $m = \pm 1, 0$

$$H|m\rangle_{S\cdot n} = a m^2$$

STATO FOND $\quad E = 0 \quad |0\rangle_{S\cdot\hat{n}}$ non deg.

I ecc. $\quad E = a \quad |\pm 1\rangle_{S\cdot\hat{n}}$ deg. 2

(b)

Calcoliamo $\bar{S}\cdot\hat{n}$ ed i suoi ~~auto~~autovettori. Nella base $|1\rangle_z, |0\rangle_z, |-1\rangle_z$ formata da autovettori di S_z

$$S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad S_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad S_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S_x = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ora $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$

$$S\cdot\hat{n} = \hbar \begin{pmatrix} 1/2 & \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 \\ \sqrt{6}/4 & 0 & \sqrt{6}/4 \\ 0 & \sqrt{6}/4 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Per $\lambda = (1, 0, -1)\hbar$ $\qquad [\lambda = m\hbar]$

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{6}/4 & 0 \\ \sqrt{6}/4 & 0 & \sqrt{6}/4 \\ 0 & \sqrt{6}/4 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{6}}{4}b = am \\ \frac{\sqrt{6}}{4}a + \frac{\sqrt{6}}{4}c = bm \\ \frac{\sqrt{6}}{4}b - \frac{c}{2} = cm \end{cases}$$

(1) $m = 1$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}b \\ \frac{3c}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}b \end{cases} \Rightarrow V = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}b, b, \frac{\sqrt{6}}{6}b\right) \qquad \langle v|v\rangle = |b|^2\left(\frac{6}{4} + 1 + \frac{1}{6}\right) = \frac{8}{3}|b|^2$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{4} \qquad V = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

(2) $m = -1$

$$\begin{cases} -\frac{3a}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}b \\ -\frac{c}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4}b \end{cases} \Rightarrow V = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}b, b, -\frac{\sqrt{6}}{2}b\right) \qquad \langle v|v\rangle = \frac{8}{3}|b|^2$$

$$b = -\frac{\sqrt{6}}{4} \qquad V = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

(3) $m = 0$

$$\begin{cases} a = -\frac{\sqrt{6}}{2}b \\ c = \frac{\sqrt{6}}{2}b \end{cases} \qquad V = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}b, b, \frac{\sqrt{6}}{2}b\right) \qquad \langle v|v\rangle = |b|^2\left(\frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{2}\right) = 4|b|^2$$

$$b = \frac{1}{2} \qquad V = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

SOMMARIO

$$|1\rangle_{S\cdot\hat{n}} = \left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

$$|0\rangle_{S\cdot\hat{n}} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

$$|-1\rangle_{S\cdot\hat{n}} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

Questi risultati nella rappresentazione CANONICA

$|S_z = \hbar\rangle \leftrightarrow (1, 0, 0)$

$|S_z = 0\rangle \rightarrow (0, 1, 0)$

$|S_z = -\hbar\rangle \rightarrow (0, 0, 1)$

<u>NOTA</u>: $S_z(a, b, c) = \hbar(a, 0, -c)$

c)

$$|\psi\rangle = {}_{S\cdot\hat{n}}\langle 1|\psi\rangle |1\rangle_{S\cdot\hat{n}} + {}_{S\cdot\hat{n}}\langle 0|\psi\rangle |0\rangle_{S\cdot\hat{n}} + {}_{S\cdot\hat{n}}\langle -1|\psi\rangle |-1\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{4}|1\rangle_{S\cdot\hat{n}} + \frac{1}{2}|0\rangle_{S\cdot\hat{n}} - \frac{\sqrt{6}}{4}|-1\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

$$|\psi t\rangle = \frac{\sqrt{6}}{4} e^{-iat/\hbar} |1\rangle_{S\cdot\hat{n}} + \frac{1}{2}|0\rangle_{S\cdot\hat{n}} - \frac{\sqrt{6}}{4} e^{-iat/\hbar}|-1\rangle_{S\cdot\hat{n}}$$

$$= \underset{\substack{\uparrow \\ \text{eliminabile}}}{e^{-iat/\hbar}} \left[\frac{\sqrt{6}}{4}|1\rangle_{S\cdot\hat{n}} - \frac{\sqrt{6}}{4}|-1\rangle_{S\cdot\hat{n}} + \frac{1}{2} e^{iat/\hbar} |0\rangle_{S\cdot n} \right]$$

Quindi $|\psi t\rangle = \frac{\sqrt{6}}{4}\left[|1\rangle_{S\cdot\hat{n}} - |-1\rangle_{S\cdot\hat{n}}\right] + \frac{1}{2} e^{iat/\hbar} |0\rangle_{S\cdot\hat{n}}$

$$\langle\psi t|H|\psi t\rangle = \frac{6}{16}a + \frac{6}{16}a = \frac{3}{4}a$$

Nelle rappresentazione canonica di S_z

$$|\psi t\rangle = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{iat/\hbar}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

$$\frac{1}{\hbar}S_z|\psi t\rangle = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} e^{iat/\hbar}\left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, 0, -\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{8}(1,0,1) - \frac{\sqrt{6}}{8} e^{iat/\hbar}(1,0,1)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{8}\left(1 - e^{iat/\hbar}\right)(1,0,1)$$

Quindi

$$\langle\psi t|\frac{S_z}{\hbar}|\psi t\rangle = \left[\frac{\sqrt{6}}{4}\langle v_1|v_3\rangle + \frac{1}{2} e^{-iat/\hbar}\langle v_2|v_3\rangle\right]\frac{\sqrt{6}}{8}\left(1 - e^{iat/\hbar}\right)$$

con $v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $\quad v_2 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ $\quad v_3 = (1,0,1)$

$$\langle v_1|v_3\rangle = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\langle v_2|v_3\rangle = -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = 0$$

$$\Longrightarrow \langle\psi t|S_z|\psi t\rangle = 0$$

Il valor medio nullo poteva anche essere dedotto osservando che $\text{Prob}(S_z = \hbar) = \text{Prob}(S_z = -\hbar) = \left|\frac{\sqrt{6}}{8} - \frac{\sqrt{6}}{8} e^{iat/\hbar}\right|^2$ [il valore non è rilevante] d)

Lo stato fondamentale è non degenere

$$ {}_{S\cdot n}\langle 0|S_z|0\rangle_{S\cdot n} = \hbar\left(\frac{6}{16}-\frac{6}{16}\right) = 0 $$

NESSUNA CORREZIONE

Il primo eccitato è doppiamente degenere

Abbiamo

$$ {}_{S\cdot n}\langle 1|S_z|1\rangle_{S\cdot n} = \hbar\left(\frac{9}{16}-\frac{1}{16}\right) = \frac{\hbar}{2} $$

$$ {}_{S\cdot n}\langle -1|S_z|-1\rangle_{S\cdot n} = \hbar\left(\frac{1}{16}-\frac{9}{16}\right) = -\frac{\hbar}{2} $$

$$ {}_{S\cdot n}\langle 1|S_z|-1\rangle_{S\cdot n} = {}_{S\cdot n}\langle -1|S_z|1\rangle_{S\cdot n} = 0 $$

Quindi la matrice della perturbazione è diagonale

$$ V = \lambda\begin{pmatrix} \hbar/2 & 0 \\ 0 & -\hbar/2 \end{pmatrix} $$

Il livello si separa

$E = a + \hbar\lambda/2$

$E = a - \hbar\lambda/2$

La separazione è di ordine $\hbar\lambda$ mentre la distanza tra i livelli imperturbati è $\Delta E = a$

Quindi

$$ |\hbar\lambda| \ll a \qquad |\lambda| \ll \frac{a}{\hbar} $$