

ES 5

$$\begin{cases} u'(t) = t u(t)(u(t) - 1) \\ u(0) = 1/2 \end{cases}$$

$u=1$ e' sol. NA NON DEL PDE.
 $u=0$ e' sol.

i) $f(t, u) = t u (u - 1) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

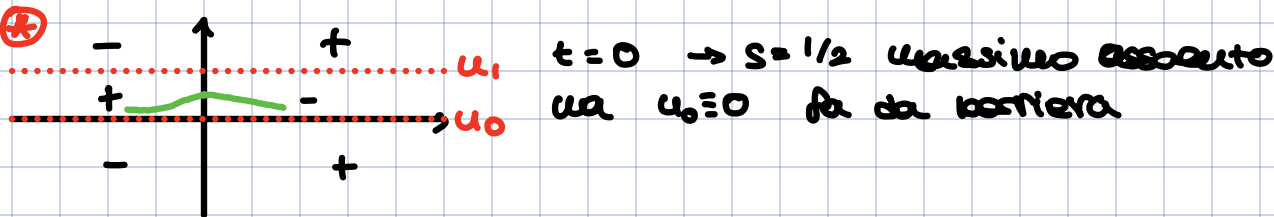
$f = t u^2 - t u$ $\frac{\partial}{\partial u} f = 2t u - t \in C_u(\mathbb{R}) \Rightarrow$ LOCALMENTE LIP. $\forall s \in \mathbb{R}$

ii) $\partial_u f = 2t u - t \xrightarrow{u \rightarrow +\infty} \pm \infty$ QUINDI NON E' GLOBALMENTE LIP.

MA $\exists$ 2 sol. costanti $u_1(t) \equiv 1$ $u_0(t) \equiv 0$ e $u(0) = 1/2 \in (0, 1)$

$\Rightarrow u(t) \in (0, 1)$ per la COND. di UP. LOCALE $\forall s \in \mathbb{R}$

$f(t, u) = t(s^2 - s)$



le eq. diff. hanno stessa struttura di $f + t$ per $f(t, s)$ e la comp. di $f(t, u)$ con $u(t)$ e se la composizione e' C^k allora anche la f con cui e' composta deve esserlo.

iii) sol. anal. utile per $t \rightarrow +\infty$

Dallo studio del segno $u'(t) < 0 \quad \forall t < 0$ $u'(t) > 0 \quad \forall t > 0$

piccola e decrescente per $t > 0 \Rightarrow$ MONOTONA $\Rightarrow \exists \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \ell \in [0; 1/2]$

$u'(t) = f(t, u(t)) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} "f(+\infty, \ell)"$

$f(t, s) = t s(s-1) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty \cdot \ell(\ell-1)$

- se $\ell \in (0, 1/2] \Rightarrow f \rightarrow +\infty \cdot \ell = -\infty$
- se $\ell = 0 \Rightarrow f \rightarrow +\infty$

MA CHE $f \rightarrow -\infty$ non e' possibile per $u(t)$ e' limitata

e se $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = m \Rightarrow u'(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

DA:

$$\left(\begin{array}{l} u(n+1) - u(n) = w'(s_n) \cdot (1 - 1) \\ \downarrow n \rightarrow +\infty \quad \downarrow n \rightarrow +\infty \\ m - m = 0 \rightarrow 0 \quad \text{CUI} \end{array} \right)$$

$\Rightarrow u'(t) = f \rightarrow 0$ e questo è vero soltanto se $t=0$

iv) **EQ. A VARIABILI SEPARABILI**

$$\int \frac{u'(t)}{u(t)(u(t)-1)} dt = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + C \xrightarrow[u'(t)dt = dw]{u(t)=w} \int \frac{dw}{w(w-1)} = \int \left(\frac{A}{w} + \frac{B}{w-1} \right) dw$$

$$= -\ln|w| + \ln|w-1| = \frac{1}{2} t^2 + C$$

* $|1-u(t)|$ per $0 < u(t) < 1 \Rightarrow u(t)-1 > 0$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{1-u(t)}{u(t)} \right| = \frac{1}{2} t^2 + C \Rightarrow \ln \left(\frac{1-u(t)}{u(t)} \right) = \frac{1}{2} t^2 + C \xrightarrow{\exp} \frac{1-u(t)}{u(t)} = k e^{t^2/2}$$

$$1-u(t) = e^{\frac{t^2}{2}} u(t) \Rightarrow 1 = (e^{\frac{t^2}{2}} + 1) u(t) \Rightarrow u(t) = \frac{1}{e^{t^2/2} + 1}$$

* $K=1$ $\frac{1-u(0)}{u(0)} = k e^{\frac{1}{2} \cdot 0} \Rightarrow \frac{1-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = k = 1$

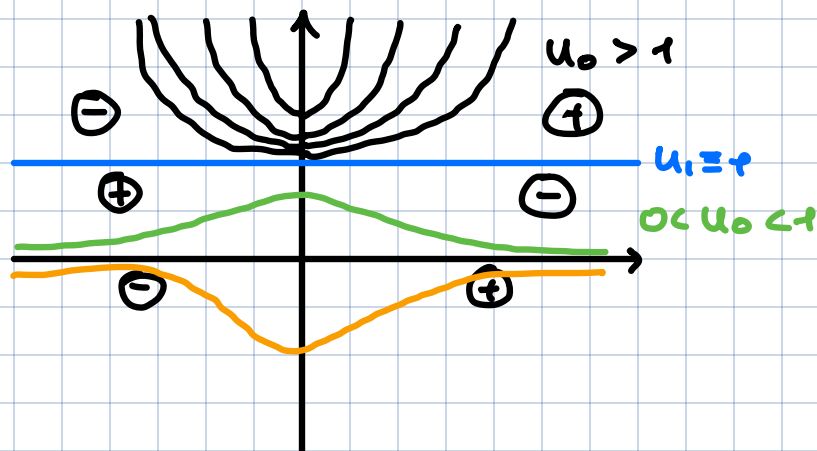
sempre per il modello

ALTRE OSSERVAZIONI $u(0)=2 \Rightarrow \frac{1}{2} t^2 + C = -\ln(u(t)) + \ln(1-u(t))$

$$\Rightarrow \ln \left(\frac{u(t)-1}{u(t)} \right) = e^C e^{\frac{1}{2} t^2} \Rightarrow \frac{u(t)-1}{u(t)} = e^C e^{t^2/2} = \frac{1}{2} e^{t^2/2} \Rightarrow$$

$\frac{1}{2} e^{t^2/2} \cdot C = \ln(u(0)) - \ln(1-u(0)) = -\ln(2)$

* $\Rightarrow u(t) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} e^{t^2/2}}$ asintoti verticali in $\pm \sqrt{2 \ln(2)}$



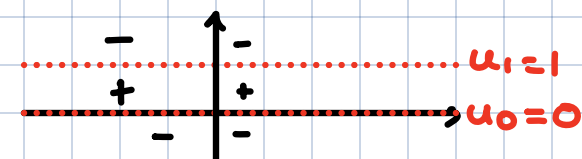
3 ESERCIZI APERTI IN ORDINE DI DIFF.

- NO ESEC. DI FUNZIONI NE' SERIE DI POTENZE
- SI' INT
- 1 EQ. DIFF.

ESERCIZIO 4

$$\begin{cases} y'(t) = n[y(t) - y^2(t)] = n y(t) (1 - y(t)) \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$$

i) $f(t, s) = s(1-s) \rightarrow$ ARRE A PRIMA sempre barriera



$f(t, s) \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ LOC. LIPSCHIZIANA

*** ESERCIZIO**

Il P.D.C. è relativo ad una E.D. in forma normale $u'(t) = f(t, u(t))$ con $f(t, u(t)) = ns(s-1) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. $f \in C^1 \Rightarrow$ LOC. LP. $\Rightarrow$ (PL) vale

ii) noto che $f(t, 0) = f(t, 1) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ poiché $u(0) = \frac{1}{2} \in (0, 1) \Rightarrow u(t) \in (0, 1) \quad \forall t \in \text{dom}(u)$ e per la T.della barriera $\Rightarrow \text{dom}(u) = \mathbb{R}$ (infatti $u_1=1, u_0=0$ sono sol. cost. della stessa E.D. e $u_0(t) \leq y(t) \leq u_1(t) \quad \forall t$ $\times$ e' unicità della soluzione del P.D.C.

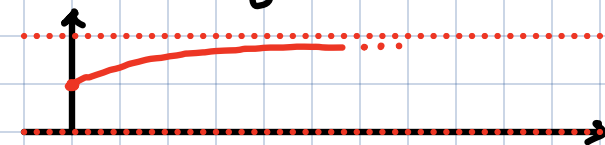
$$\text{iii) } \int \frac{y'(t) dt}{y(t)(1-y(t))} = \int n dt = nt + C \Rightarrow \int \frac{1}{z(1-z)} dz = \int \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} \right) dz = \ln|z| - \ln|1-z|$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $0 < z < 1 \rightarrow z > 0 \quad 1-z > 0$

$$\Rightarrow nt + C = \ln(y_n(t)) - \ln(1-y_n(t)) \Rightarrow$$

$$\frac{y_n(t)}{1-y_n(t)} = K e^{nt} \quad \left(K e^{n0} = \frac{y_n(0)}{1-y_n(0)} = 1 \Rightarrow K = 1 \right)$$

$$(1 + e^{nt}) y_n(t) = e^{nt} \Rightarrow y_n(t) = \frac{e^{nt}}{1 + e^{nt}}$$



$$y_n(t) = \frac{e^{nt}}{1 + e^{nt}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} 1 & \text{se } t > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } t = 0 \end{cases} = y_\infty(t) \notin C^0([0, +\infty])$$

prendo $I = [\delta, +\infty]$ con $\delta > 0 \quad y_n \xrightarrow{?} 1$ UNIF. in I?

$\|1 - y_n\|_\infty = \sup_{t \in I} |1 - y_n(t)| \quad y_n$ è monotona crescente $\Rightarrow 1 - y_n$ è decresc.

$\Rightarrow 1 - y_n(\delta)$ è il sup $\xrightarrow{\delta > 0} 0$ converge uniformemente in ogni semi-retta

VARIAZIONE DEI PARAMETRI

$$\begin{cases} w''(s) = k^2 w(s) = f(s) \\ w(0) = w_0; w'(0) = w_1 \end{cases}$$

scrivo il polinomio $P(x) = x^2 - k^2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = \pm k$ 2 radici dist. ($k > 0$)
(cost. costanti con x)

$$w(s) = e^{\pm ks}$$

SPAZIO VETTORIALE DI DIMENSIONE 2 $W_0 = \{w_0(s) = \underbrace{Ae^{ks}}_{\text{BASI di } W} + \underbrace{Be^{-ks}}_{\text{BASI di } W}, AB \in \mathbb{R}\}$
DELL'OMogenea ASSOCIATA.
 $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

Le soluzioni IDEALI sono nello SPAZIO AFFINE: $\{w(s) = w_p(s) + \underbrace{w_0(s)}_{\in W_0}\} \ni W_A$

COME TROVARLA? METODO DELLA VARIAZIONE

$$w_p(s) = A(s)e^{ks} + B(s)e^{-ks}$$

$$w'_p(s) = A'(s)e^{ks} + kA(s)e^{ks} + B'(s)e^{-ks} - kB(s)e^{-ks}$$

$$\text{impongo } A'(s)e^{ks} + B'(s)e^{-ks} = 0 \text{ così spariscono}$$

$$\Rightarrow w''_p(s) = kA'(s)e^{ks} + k^2A(s)e^{ks} + kB'(s)e^{-ks} - kB(s)e^{-ks}$$

Sostituisco $w''(s) - k^2w(s) = f(s)$

$$\underbrace{kA'(s)e^{ks} - kB'(s)e^{-ks}}_{w''(s)} + \underbrace{k^2A(s)e^{ks} + k^2B(s)e^{-ks}}_{k^2w(s)} - k^2(A(s)e^{ks} + B(s)e^{-ks}) = f(s)$$

$$\begin{cases} A'(s)e^{ks} + B'(s)e^{-ks} = 0 \rightarrow B'(s)e^{-ks} = -A'(s)e^{ks} \\ kA'(s)e^{ks} - kB'(s)e^{-ks} = f(s) \end{cases} \quad \leftarrow \text{sostituisco}$$

$$2kA'(s)e^{ks} = f(s) \Rightarrow A'(s) = \frac{1}{2k} f(s)e^{-ks} \Rightarrow A(s) = \frac{1}{2k} \int f(s)e^{-ks} ds$$

$$\Rightarrow B'(s) = -\frac{1}{2k} f(s)e^{ks} \Rightarrow B(s) = -\frac{1}{2k} \int f(s)e^{ks} ds$$

$$\Rightarrow w(s) = C_1 e^{ks} + C_2 e^{-ks} + \frac{1}{2k} \left[\int f(s)e^{-ks} ds \right] e^{ks} - \frac{1}{2k} \left[\int f(s)e^{ks} ds \right] e^{ks}$$

se int da 0 a t posso scrivere

$$w(0) = C_1 + C_2 = w_0 \quad \text{per } \left(\int_0^0 = 0\right) \text{ e } e^{\pm k \cdot 0} = 1$$

impengo $s=0$

$$w'(s) = kC_1 e^{ks} - kC_2 e^{-ks} + \frac{1}{2k} f(s) e^{ks} + \frac{1}{2k} \left[\int_0^s f(s) e^{ks} ds \right] e^{ks} - \frac{1}{2k} f(s) e^{ks} e^{-ks} + \frac{1}{2k} \left[\int_0^s f(s) e^{ks} ds \right] e^{ks}$$

$$\Rightarrow w'(0) = kC_1 - kC_2 = w_1$$

$$w(0) = C_1 + C_2 = w_2$$

$$\text{es 13} \quad \begin{cases} y'(t) = \frac{e^{-y(t)} (t^2 + 1)}{y(t)} \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad = f(t, p) = \frac{(t^2 + 1)e^{-p}}{p} \quad \begin{matrix} p \neq 0 \\ A = \{(t, p) \mid p > 0\} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} e^{-p} > 0 & \forall p \\ t^2 + 1 > 0 & \forall p \end{matrix}$$