

Integrali impropri

Per gli integrali di Riemann $\int_a^b f(x) dx$ dovevamo richiedere

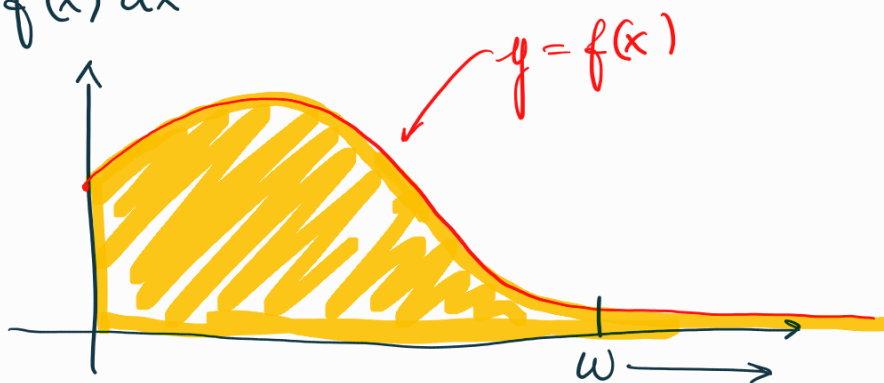
- intervallo limitato
- f limitata.

Cosa succede se una di queste due ipotesi non è verificata?

Esempio $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Vorrei definire $\int_0^{+\infty} f(x) dx$

(Per semplicità $f \geq 0$).

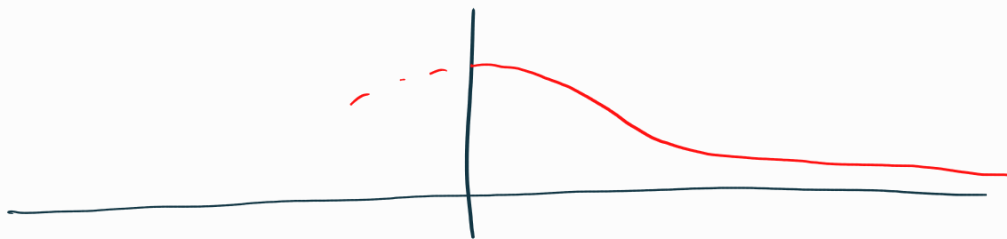


Idea:

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_0^w f(x) dx$$

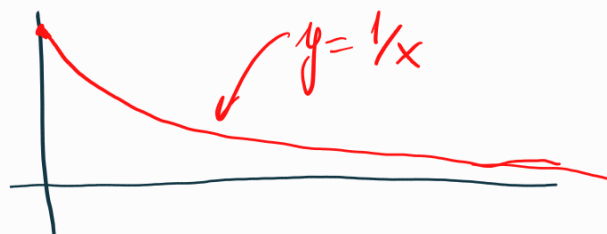
$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-x} dx &= \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_0^w e^{-x} dx = \\ &= \lim_{w \rightarrow +\infty} e^{-x} \Big|_w^0 = \lim_{w \rightarrow +\infty} (1 - e^{-w}) = 1 \end{aligned}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} =$$



$$= \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_0^w \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{w \rightarrow +\infty} \arctg w = \frac{\pi}{2}$$

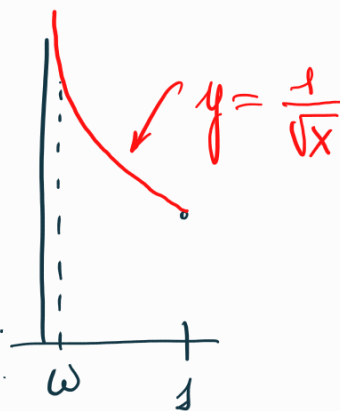
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_1^w \frac{dx}{x} = \lim_{w \rightarrow +\infty} \log w = +\infty$$



Altra situazione

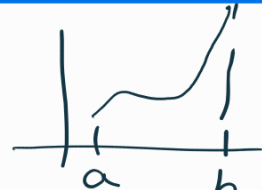
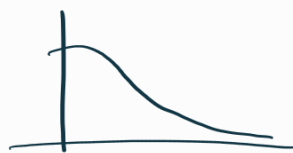
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{in } (0, 1]$$

Problema: f non è limitata vicino a $x=0$.



$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \lim_{w \rightarrow 0^+} \int_w^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{w \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_w^1 = \\ &= \lim_{w \rightarrow 0^+} 2(1 - \sqrt{w}) = 2. \end{aligned}$$

DEF. Integrale improprio



- 1) Supponiamo $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, $b > a$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
e che $f \in R(a, w) \quad \forall w \in (a, b)$

Definiamo l'integrale improprio.

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{w \rightarrow b^-} \int_a^w f(x) dx \quad \text{se questo limite esiste.}$$

In tal caso l'integrale improprio si dice:

- convergente se il limite è finito
- divergente " " " " $\pm \infty$
- irregolare " " " " non esiste.

- 2) Supponiamo ora $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
t.c. $f \in R(w, b) \quad \forall w \in (a, b)$.

Definiamo l'integrale improprio

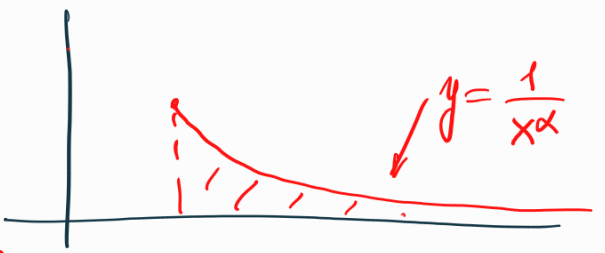
$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{w \rightarrow a^+} \int_w^b f(x) dx$$

- L'integrale è:
 - convergente se il limite è finito
 - divergente se $\pm \infty$
 - irregolare se non esiste.

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

$(\alpha > 0)$

(già calcolato
per $\alpha = 1$,
venga $+\infty$)



$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_1^{\omega} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_1^{\omega} =$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\omega \rightarrow +\infty} [\omega^{1-\alpha} - 1] = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

inoltre $+\infty$ se $\alpha = 1$
(visto prima)

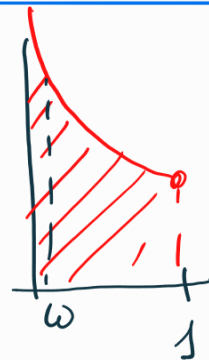
$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

(come per la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, non è un caso)

Voglio studiare ora.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

$\alpha > 0$.



$\frac{1}{x^\alpha}$ non è limitata vicino a $x=0$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \int_{\omega}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_{\omega}^1 =$$

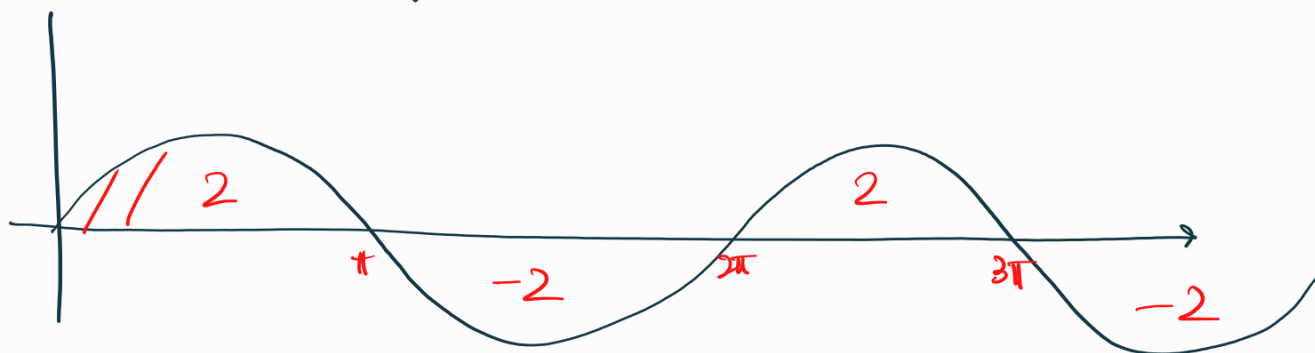
$$= \lim_{\omega \rightarrow 0^+} \frac{1}{1-\alpha} [1 - \omega^{1-\alpha}] = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Se $\alpha=1$ $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{w \rightarrow 0^+} \int_w^1 \frac{dx}{x} = \lim_{w \rightarrow 0^+} (-\log w) = +\infty$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha < 1$.

$\int_0^{+\infty} \sin x \, dx = \lim_{w \rightarrow +\infty} \int_0^w \sin x \, dx = \lim_{w \rightarrow +\infty} (1 - \cos w) \nexists$

Integrale improprio irregolare.



OSS L'integrale improprio è una estensione dell'integrale di Riemann.

Se $f \in R(a,b)$, posso calcolare l'integrale $\int_a^b f(x) \, dx$ in due modi

- come integrale di Riemann, direttamente
- come integrale improprio $\lim_{w \rightarrow b^-} \int_a^w f(x) \, dx$

I due valori sono uguali perché la funzione integrale

$F(w) = \int_a^w f(x) \, dx$ è continua.

Come per le serie, in molti casi ci accontentiamo di stabilire se un integrale improprio converge / diverge / è irregolare, senza calcolarlo esplicitamente.

Caso importante: Quello in cui $f(x) \geq 0$.

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{w \rightarrow +\infty} \underbrace{\int_a^w f(x) dx}_{F(w)}$$

oss. $F(w)$ è crescente



Quindi il limite per $w \rightarrow +\infty$

esiste ed è pari al $\sup_{w \geq a} F(w)$

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ converge} &\Leftrightarrow F(w) \text{ è limitata sup} \\ \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ diverge a } +\infty &\Leftrightarrow F(w) \text{ è illimitata sup.} \end{aligned}$$

Usando questa osservazione si provano i seguenti criteri, che enuncerò per ora per integrali in $[0, +\infty)$.

Teorema (Criterio del confronto).

Siano $f(x), g(x): [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, +\infty) \quad \left(\text{basta che si verifichi per } x \rightarrow +\infty \right)$$

$f, g \in \mathcal{R}(a, w) \quad \forall w \in (a, +\infty)$ (per esempio se f, g continue)

- Se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge.
- Se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, anche $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge

Criterio del confronto asintotico:

Siano $f(x), g(x) : [a, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ continue (per sempl.)

• Supponiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = l$. Allora

1) se $l \in (0, +\infty)$ i due integrali $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ e $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ hanno lo stesso carattere (entrambi convergenti o divergenti)

2) se $l = 0$,

• se $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ converge, anche $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ converge

• se $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ diverge, anche $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ diverge.

3) se $l = +\infty$

stessa cosa a parti invertite

$$\int_1^{+\infty} \frac{x + 5 \log x}{x^3 + 3x + \sqrt{x}} dx$$

$\sim \frac{1}{x^2}$ quindi l'integrale converge

OSS Il teorema del confronto non vale solo per integrali impropri su $[0, +\infty)$ ma anche per gli altri integrali impropri.

Esempio

Vogliamo studiare il carattere di $\int_0^1 \frac{3+x^4}{\sqrt[3]{x}} dx$

• Pb. solo in $x=0$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3+x^4}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$

$$\text{per } x \rightarrow 0^+ \quad \frac{3+x^4}{\sqrt[3]{x}} \sim \frac{3}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/3}} \quad \text{converge.}$$

Quindi anche $\int_0^1 \frac{3+x^4}{\sqrt[3]{x}} dx$ converge

Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge l'integrale

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x-2)^6} \left(\sin \frac{1}{x^2} \right)^\alpha dx$$

$f(x)$

e calcolarlo per $\alpha = 0$.

Pb. solo per $x \rightarrow +\infty$.

Voglio vedere come si comporta $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) = \frac{\overbrace{x^2-1}^{\sim x^2}}{\underbrace{(x-2)^6}_{\sim x^6}} \left(\sin \frac{1}{x^2} \right)^\alpha \sim \frac{1}{x^{4+2\alpha}} \quad x \rightarrow +\infty$$

$\sim \frac{1}{x^{2\alpha}}$

L'integrale converge se e solo se $4+2\alpha > 1$

$$\boxed{\alpha > -\frac{3}{2}}$$

Per $\alpha=0$

$$\int_3^{+\infty} \frac{x^2-1}{(x-2)^6} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \int_3^{\omega} \frac{x^2-1}{(x-2)^6} dx = (*)$$

$$\left(\int_3^{\omega} \frac{x^2-1}{(x-2)^6} dx = \int_1^{\omega-2} \frac{(t+2)^2-1}{t^6} dt = \right.$$

$$\begin{aligned} x-2 &= t \\ dx &= dt \\ x &= t+2 \end{aligned}$$

$$= \int_1^{\omega-2} \frac{t^2+4t+3}{t^6} dt = \int_1^{\omega-2} (t^{-4} + 4t^{-5} + 3t^{-6}) dt =$$

$$= \left(-\frac{t^{-3}}{3} - \frac{4}{4} t^{-4} - \frac{3}{5} t^{-5} \right) \Big|_1^{\omega-2}$$

$$= \left[\frac{1}{3} + 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{3(\omega-2)^3} - \frac{1}{(\omega-2)^4} - \frac{3}{5(\omega-2)^5} \right]$$

$$(*) = \lim_{w \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{3} + 1 + \frac{3}{5} - \frac{1}{3(w-2)^3} - \frac{1}{(w-2)^4} - \frac{3}{5(w-2)^5} \right] =$$

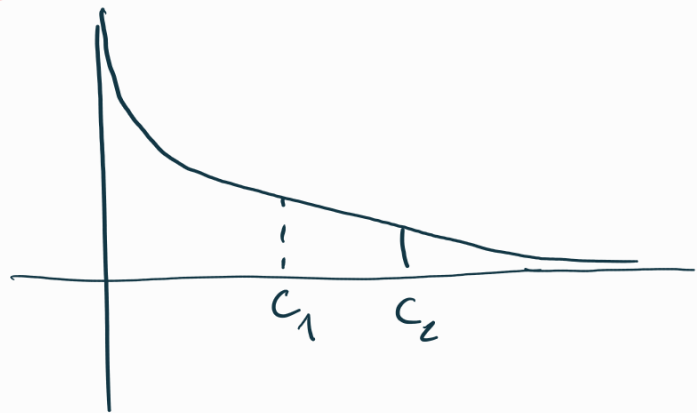
$$= \frac{5+15+9}{15} = \frac{29}{15}$$

Cosa succede se l'integrale ha "più di un problema."

Per es $\int_0^{+\infty} \frac{dx (x+1)}{\sqrt{x} (x^2+5)}$

Problemi per $x \rightarrow +\infty$
e per $x \rightarrow 0^+$

$f(x)$



Fisso $c \in (0, +\infty)$ e considero separatamente i due integrali

$$\int_0^c f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

Il risultato non dipende da c e l'integrale si dice convergente se entrambi gli integrali convergono

Prendiamo $c=1$ per semplicità

$$\int_0^1 \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x}(x^2+5)}$$

$\sim \frac{1}{5\sqrt{x}}$ per $x \rightarrow 0$
(converge)

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x+1) dx}{\sqrt{x}(x^2+5)}$$

$f(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}}$

(converge) perché $\frac{3}{2} > 1$

per $x \rightarrow +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \boxed{\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^2+1} dx} + \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx}$$

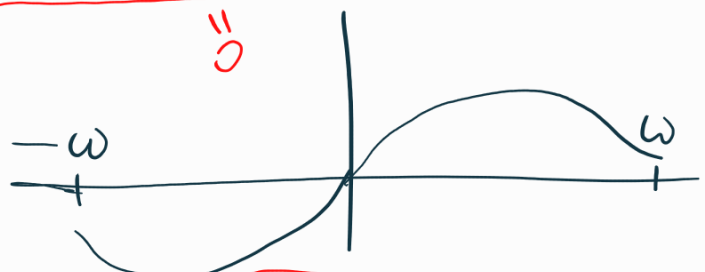
diverge a $-\infty$ diverge a $+\infty$

L'integrale non converge.

I prossimi passaggi sono errati.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1} dx = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \boxed{\int_{-\omega}^{\omega} \frac{x}{x^2+1} dx} = 0$$

$\Rightarrow 0$



(NO)

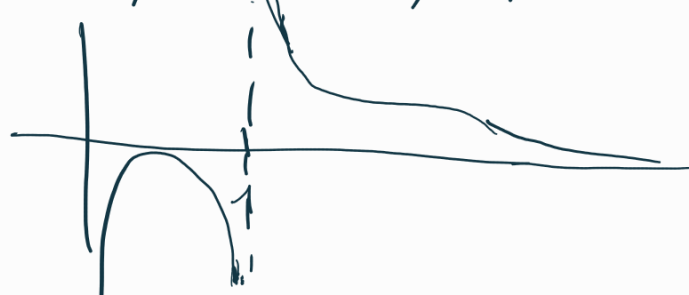
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx = \boxed{\int_{-\infty}^0 \frac{x}{x^4+1} dx} + \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx} = 0$$

converge converge

sono uguali tra loro

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x} \log x (2x^7+3x+1)} =$$

Pb per $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 1^+$, $x \rightarrow 1^-$



L' integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ e la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ hanno lo stesso carattere (entrambi convergenti o entrambi divergenti)

Applicazione:

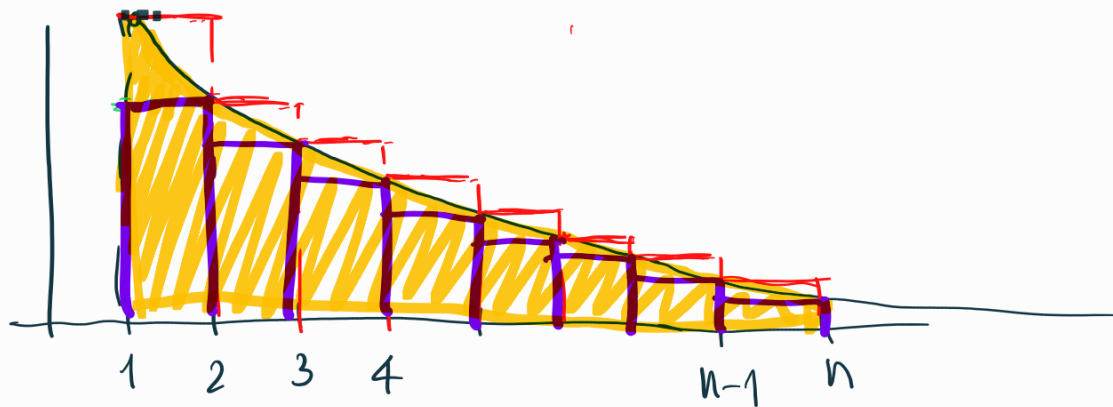
$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad (\alpha > 0) \text{ positiva e decrescente.}$$

Abbiamo provato che $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge se e solo se $\alpha > 1$.

Quindi per il teorema $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

converge se e solo se $\alpha > 1$.

Dim. teorema



$$\begin{aligned} \int_1^n f(x)dx &\leq f(1) + f(2) + \dots + f(n-1) = \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} f(k) = S_{n-1} \end{aligned}$$

Supponiamo che $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ diverga.

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(x)dx = +\infty \text{ e, per il confronto, } S_{n-1} \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow S_n \rightarrow +\infty \Rightarrow$ la serie diverge

D'altra parte

$$\int_1^n f(x) dx \geq f(2) + f(3) + \dots + f(n) = \\ = \sum_{k=2}^n f(k) = S_n - f(1)$$

Se l'integrale converge $\Rightarrow \int_1^n f(x) dx$ è limitato sup.

$\Rightarrow S_n$ è limitato sup. $\Rightarrow$ la serie converge.

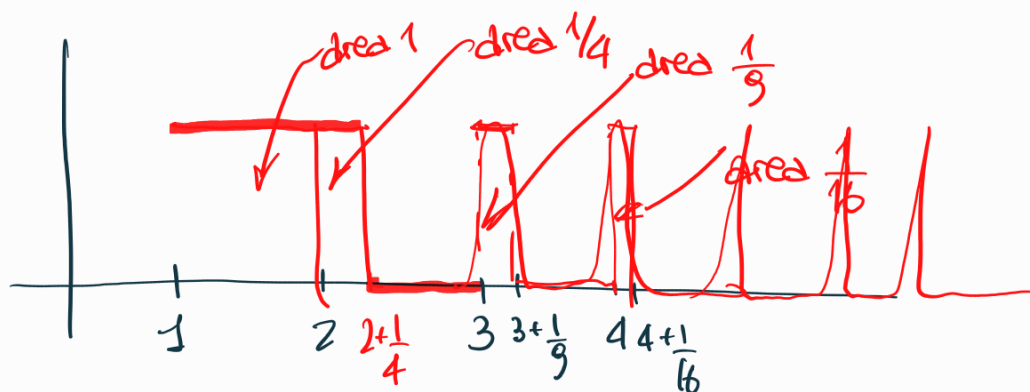
Grossa differenza tra serie e integrali impropri

Non vale la C.N.

Per le serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k = 0$

Per gli integrali no: $\int_0^{\infty} f(x) dx$ converge $\nRightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [n, n + \frac{1}{n^2}] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}_+$$

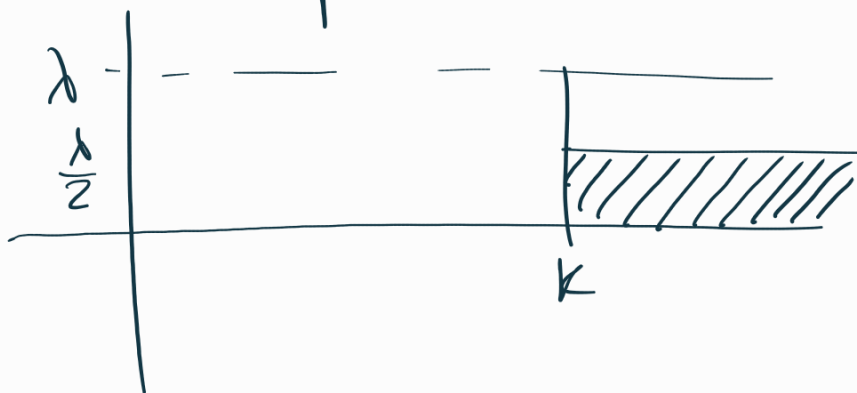


$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \text{ converge ma } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \neq 0$$

Possiamo solo dire che

se $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ converge allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, se esiste, vale zero

se fosse $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lambda > 0 \Rightarrow$ def^{te} pr $x \rightarrow +\infty$ $f(x) > \frac{\lambda}{2}$



Studiamo la convergenza dell'integrale

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\log x)^\beta}$$

$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Se $\alpha > 1$ $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge

vediamo $\int \frac{dx}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ ($\alpha > 1$)

se $\beta > 0$, questo è meglio di $\int \frac{dx}{x^\alpha} \Rightarrow$ converge

se $\beta < 0$, questo è peggio di $\int \frac{dx}{x^\alpha}$

ma meglio di $\int \frac{dx}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$, che converge

Idem se $\alpha < 1$, $\int \frac{dx}{x^\alpha (\log x)^\beta}$ diverge sempre $\forall \beta$.

Se $\alpha = 1$

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x (\log x)^\beta}$$

si calcola

$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{dt}{t^\beta} \text{ converge se e solo se } \beta > 1.$$

$$t = \log x \quad \frac{dx}{x} = dt$$

$$x = 2 \Rightarrow t = \log 2$$

$$x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow +\infty$$

Riassunto $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha (\log x)^\beta}$

Se $\alpha > 1$, β qualsiasi $\Rightarrow$ converge

Se $\alpha = 1$, $\beta > 1$ $\Rightarrow$ converge

se $\alpha = 1$, $\beta \leq 1$ $\Rightarrow$ diverge

se $\alpha < 1$, β qualsiasi $\Rightarrow$ diverge

Questo si traduce in risultati per le serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$$

stessi risultati.