

Applicazioni del criterio del confr. asintotico

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k+7}{3k-k^2+4k^4}}_{a_k}$$

$$a_k \sim \frac{1}{4k^3} \quad \text{per } k \rightarrow +\infty$$

$$\text{cioè} \quad \frac{a_k}{1/k^3} \rightarrow \frac{1}{4}$$

→ la serie $\sum a_k$ e la serie $\sum \frac{1}{k^3}$ hanno lo stesso carattere, quindi convergono

($\sum \frac{1}{k^3}$ converge poiché $3 > 1$)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(k+5) \sin\left(\frac{2}{k^2+\sqrt{k}}\right)}_{a_k}$$

$$a_k \sim k \frac{2}{k^2} = \frac{2}{k} \Rightarrow \text{da questo segue } a_k > 0 \text{ def. te.}$$

$\sin\left(\frac{2}{k^2+\sqrt{k}}\right) \sim \frac{2}{k^2+\sqrt{k}} \sim \frac{2}{k^2}$

la serie $\sum a_k$ ha lo stesso carattere di $\sum \frac{1}{k}$, che diverge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{k^2 \log(1+k)}}_{a_k}$$

$$\text{Confronto con } \frac{1}{k^2} \quad \frac{a_k}{1/k^2} = \frac{1}{\log(1+k)} \rightarrow 0$$

Quindi, visto che $\sum \frac{1}{k^2}$ converge, anche $\sum d_k$ converge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(1+k)}{k^2}$$

OSS $d_k = \frac{\log(1+k)}{k^2}$ è infinitesimo di ordine

inferiore risp. a $\frac{1}{k^2}$,

ma superiore risp. a $\frac{1}{k^\alpha} \quad \forall \alpha < 2$.

Faccio il confronto con $1/k^{3/2}$

$$\frac{d_k}{1/k^{3/2}} = \frac{\cancel{k^{3/2}} \log(1+k)}{k^{\cancel{2} 1/2}} = \frac{\log(1+k)}{\sqrt{k}} \rightarrow 0$$

Poiché $\sum \frac{1}{k^{3/2}}$ converge, anche $\sum d_k$ converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)$$

d_n

$$d_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - 2 \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \right) \sim -\frac{1}{\sqrt{n}}$$

↓
-1

La serie è def^{te} a termini negativi.

$\Rightarrow$ Studio la serie opposta $\sum \left(2 \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$

$\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{1/2}}$

Poiché $\sum \frac{1}{n^{1/2}}$ diverge ($\frac{1}{2} < 1$) anche questa serie diverge a $+\infty$ e quindi la serie di partenza diverge a $-\infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right)$$

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$ per $t \rightarrow 0$.
 metto $\frac{1}{\sqrt{n}}$ al posto di t .

$\sin \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ per $n \rightarrow +\infty$.

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} - \sin \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \frac{1}{6n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \sim \frac{1}{6n^{3/2}}$

Poiché $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ converge, anche la nostra serie converge

□

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - d \sin \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$ $d \in \mathbb{R}$

• se $d = 1$ la serie converge.

• se $d > 1$ $a_k \sim \frac{(1-d)}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ la serie diverge a $-\infty$.

• se $d < 1$ $a_k \sim \frac{1-d}{\sqrt{n}} \Rightarrow$ " " " " " $+\infty$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{8n^3 + 3n} - 2n \right)^{\alpha}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}.$$

Per quali α converge?

$$\sqrt[3]{8n^3 + 3n} - 2n = 2n \left(\sqrt[3]{1 + \frac{3}{8n^2}} - 1 \right) \sim \frac{1}{4n}$$

$\sim 1/(8n^2)$

$$\sqrt[3]{1+t} - 1 \sim \frac{t}{3} \quad \text{per } t \rightarrow 0.$$

$$t = \frac{3}{8n^2} \rightarrow 0$$

$$\sqrt[3]{1 + \frac{3}{8n^2}} - 1 \sim \frac{1}{3} \frac{3}{8n^2} = \frac{1}{8n^2}$$

$$\left(\sqrt[3]{8n^3 + 3n} - 2n \right)^{\alpha} \sim \left(\frac{1}{4n} \right)^{\alpha} = \frac{1}{4^{\alpha} n^{\alpha}}$$

converge per $\alpha > 1$
 diverge a $+\infty$
 per $\alpha \leq 1$.

Criterio del rapporto per le serie

Sia $\{a_k\}$ una succ^{ne} di termini def^{te} positivi.

Supponiamo che $\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = l$.

• se $l \in (1, +\infty]$, allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge a $+\infty$.

continua sotto

Dim: $a_k \rightarrow +\infty$ per il criterio del rapporto per succ^{ne}.

$\Rightarrow$ La serie non converge (C.N.) $\Rightarrow$ La serie diverge a $+\infty$

• se $l \in [0, 1)$, allora la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

Dim. Non ci basta osservare che $a_k \rightarrow 0$.

Se $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow l < 1$, defte sarà $\frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{l+1}{2} =: M < 1$



$$\Rightarrow a_{k+1} < M a_k$$

$$\Rightarrow a_k \leq C M^k \text{ defte}$$

vedere dim. criterio del rapporto per succⁿⁱ

Poiché la serie geometrica $\sum M^k$ converge $0 < M < 1$
 $\Rightarrow$ anche la nostra serie converge.

OSS Il criterio non dice nulla se $l = 1$.

Esempio $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ a_k

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} = \frac{2}{k+1} \rightarrow 0$$

$\Rightarrow$ La serie converge.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3^k}{k^2} \quad a_k$$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{\cancel{k+1}}}{(\cancel{k+1})^2} \cdot \frac{k^2}{3^{\cancel{k}}} \rightarrow 3 > 1 \Rightarrow \text{la serie diverge a } +\infty.$$

In questo caso si poteva concludere che $a_k \rightarrow +\infty \Rightarrow$ stessa conclusione.

OSS In tutti i casi in cui $a_k \sim C k^\alpha$, $l = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$
quindi il criterio non dice nulla.

C'è un criterio "gemello".

CRITERIO della RADICE

Sia $\{a_k\}$ una succ^{te} a termini def^{te} positivi.

Supponiamo che $\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} = l$.

Allora

- se $l \in (1, +\infty]$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge a $+\infty$.
- se $l \in [0, 1)$, la serie " converge.

Dim. 1) Supponiamo $\sqrt[k]{a_k} \rightarrow l > 1$.

$$\Rightarrow \text{def}^{\text{te}} \sqrt[k]{a_k} > 1 \Rightarrow \text{def}^{\text{te}} a_k > 1$$

$$\Rightarrow a_k \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ diverge (C.N.)}$$

$$2) \sqrt[k]{a_k} \rightarrow l < 1 \Rightarrow \sqrt[k]{a_k} < \frac{l+1}{2} =: M < 1.$$

$$\Rightarrow a_k < M^k \quad \text{def}^{\text{te}}.$$

poiché la serie geom. $\sum M^k$ converge ($M < 1$)
anche la nostra serie converge. $\square$

Esempio
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2} \right]^{\frac{1}{k}} = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k} =$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k} \rightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

$$\Rightarrow \text{la serie } \sum \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k^2} \text{ converge.}$$

I due criteri (rapporto e radice) sono "gemelli" nel senso
che

$$\text{se } \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} \text{ e } \lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{a_k} \text{ esistono,}$$

essi sono uguali (si può dimostrare).

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{k^2 \left(e^{\frac{1}{k^\alpha}} - 1 \right)}_{a_k}$$

$$\alpha \in \mathbb{R}.$$

$$e^{\frac{1}{k^\alpha}} - 1 \sim \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{se } \boxed{\alpha > 0}$$

$$\Rightarrow a_k \sim k^2 \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{k^{\alpha-2}}$$

La serie converge se $\alpha - 2 > 1 \iff \boxed{\alpha > 3}$

se invece $0 < \alpha \leq 3 \Rightarrow a_k \sim \frac{1}{k^{\alpha-2}}$ La serie diverge.
 $\alpha-2$
 ≈ 1

$\alpha > 3 \Rightarrow$ La serie converge

$0 < \alpha \leq 3 \Rightarrow$ La serie diverge

$$a_k = k^2 \left(e^{\frac{1}{k^\alpha}} - 1 \right)$$

se $\alpha = 0 \Rightarrow a_k = k^2(e - 1)$ La serie diverge

se $\alpha < 0$
 $a_k = k^2 \left(e^{\frac{1}{k^\alpha}} - 1 \right) \rightarrow +\infty$ La serie diverge.
 $\downarrow$
 $+\infty$

Restano da studiare le serie a termini non definitivamente di segno costante, per es.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2 + 3}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

OSS A queste serie non si possono applicare direttamente i criteri del confronto / confronto asintotico.

Continua invece a valere la C.N per la convergenza:

$$a_k \not\rightarrow 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ non converge}$$

Def. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie. Si dice che essa converge assolutamente se converge la serie $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$.

Esempio: la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2+3}$

converge assolutamente.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(k)^2|}{k^2+3}$$

$$\wedge \frac{1}{k^2+3} \leq \frac{1}{k^2}$$

Posso applicare il criterio del confronto perché sono tutte serie a termini non negativi, e quindi la serie con i valori assoluti converge.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \quad \text{converge assolutamente?}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k+1} \right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \quad \text{diverge (serie armonica)}$$

TEOREMA della convergenza assoluta.

Se una serie converge assolutamente, allora essa converge.
In formule

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge.}$$

Inoltre si ha

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

(dis. triangolare per le serie)

Applicazione.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(k^2)}{k^2+3} \text{ conv. assolutamente (visto prima),}$$

quindi converge

La conv. assoluta di una serie implica la convergenza semplice.

Non vale il viceversa, ci sono **serie** convergenti che non convergono assolutamente.

Per esempio $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$

questa serie non converge assolutamente, ma vedremo che converge.

Dim thm. della conv. assoluta.

Supponiamo che $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converga.

Considero la seguente serie a termini non negativi.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - a_k) \quad (*)$$

è a segni ≥ 0 perché $|a_k| \geq a_k$

La serie (*) converge in quanto

$$0 \leq |a_k| - a_k \leq |a_k| + |a_k| = 2|a_k|$$

$$a_k \geq -|a_k|$$

$$-a_k \leq |a_k|$$

e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} 2|a_k|$ converge.

Concludiamo

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k &= \sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - (|a_k| - a_k)) = \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|}_{\text{convergente}} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (|a_k| - a_k)}_{\text{convergente (visto prima)}} \end{aligned}$$

Quindi la nostra serie $\sum a_k$ converge in quanto differenza di serie convergenti.

Dimostriamo la dis. triangolare.

$$\left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k|$$

dis. triangolare
per una somma
finita.

$$\downarrow$$

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right|$$

$$\downarrow n \rightarrow +\infty$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

perché ho già visto
che entrambe
le serie convergono

e quindi si ha

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \quad \text{per la permanenza del segno.}$$

□

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3k^2 + 2}{k^{7/2} + 5k^2} (\sin(e^k) + 2 \cos(k^2)) \right) a_k$$

vediamo se converge assolutamente

$$|a_k| = \frac{3k^2+2}{k^{7/2}+5k^2} \underbrace{\left| \sin(e^k) + 2 \cos(k^2) \right|}_{\leq 3} \leq$$

$$|\sin(e^k)| + 2 |\cos(k^2)| \leq 1 + 2 = 3$$

$$\leq \frac{3(3k^2+2)}{k^{7/2}+5k^2} \sim \frac{9k^2}{k^{7/2}} = \frac{9}{k^{3/2}}$$

$$\sum \frac{1}{k^{3/2}} \text{ converge } \left(\frac{3}{2} > 1 \right) \xRightarrow[\text{confr. asintotico}]{} \sum \frac{3(3k^2+2)}{k^{7/2}+5k^2} \text{ converge } \xRightarrow[\text{confronto}]{} \sum |a_k| \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \sum a_k \text{ conv.}$$

conv. assoluta

Per le serie a seguir qualsiasi valgono delle versioni dei criteri del rapporto e della radice.

Criterio del rapporto per serie a seguir qualsiasi.

Sia $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ una serie t.c. $a_k \neq 0$ def^{te}.

e supponiamo $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = l$. Allora:

1) se $l \in [0, 1)$ $\Rightarrow$ per il criterio del rapporto $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge

conv. ass.
 $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

criterio del rapporto per successioni.

2) Se $l \in (1, +\infty]$ $\Rightarrow |a_k| \rightarrow +\infty \Rightarrow$

$\Rightarrow a_k \not\rightarrow 0 \xrightarrow{\text{C.N.}} \Rightarrow$ la serie $\sum a_k$ non converge.

OSS Ovviamente il teorema non dice nulla se $l=1$.

Esempio $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \stackrel{= a_k}{=} \quad x \in \mathbb{R} \text{ parametro.}$

OSS se $x < 0$, è una serie a segni alterni.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|^{\cancel{k+1}}}{\cancel{k+1}} \cdot \frac{k}{\cancel{|x|^k}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} |x|$$

se $|x| < 1$, cioè $-1 < x < 1$, la serie conv. assolutamente
quindi converge semplicemente

se $|x| > 1$ cioè $x < -1$ opp $x > 1$.

la serie $\sum \frac{x^k}{k}$ non converge

Restano in dubbio i due casi $x=1$ e $x=-1$.

Se $x=1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

Se $x=-1$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ non la sappiamo fare,
vedremo dopo che converge

In definitiva la serie converge se e solo se $-1 \leq x < 1$

In modo simile si dimostra il

CRITERIO della radice per serie a segni qualsiasi.

Sia $\{a_k\}$ una successione t.c.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = l. \text{ Allora}$$

1) Se $l \in [0, 1) \Rightarrow$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge assolutamente (quindi converge).

2) Se $l \in (1, +\infty] \Rightarrow$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ non converge.

consideriamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[k]{|x|^k}}{\sqrt[k]{k^2}} = |x|$$

$\sqrt[k]{k^2} = k^{\frac{2}{k}} = e^{\frac{2}{k} \log k} \rightarrow 1$

Quindi:

• Se $|x| < 1$ la serie conv. assolut. $\Rightarrow$ converge

• Se $|x| > 1$ la serie non converge.

$\boxed{x=1}$ la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge

$\boxed{x=-1}$ " " $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ conv. assolutamente

In definitiva la serie converge se e solo se $x \in [-1, 1]$

Serie a termini di segno alterno.

Sono le serie della forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k \quad \text{con } a_k > 0.$$

"

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \dots$$

oppure

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k \quad \text{con } a_k > 0$$

"

$$-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

Continuano a valere i teoremi precedenti, per es.

C.N, conv. assol., criterio radice e rapporto.

Ma in più c'è un criterio specifico (Leibniz), che faremo domani.