

Gli argomenti di questa settimana non saranno presenti nella prova pratica del 13 gennaio, ma potranno essere chiesti nelle prove di teoria dello stesso appello, e in tutte le prove d'esame successive

Oggi alle 17: esercitazione su esercizi d'esame su integrali

Serie numeriche

Studiare una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ significa studiare la successione delle somme parziali:

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

La serie si dice convergente/divergente/irregolare (carattere della serie) se la succ^{ne} $\{S_n\}$ è " " "

• Serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$

• converge a $\frac{1}{1-r}$ se $|r| < 1$

• diverge a $+\infty$ se $r \geq 1$

• è irregolare se $r \leq -1$.

• Serie telescopiche $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$

In questo caso $S_n = b_0 - b_{n+1}$

e la serie ha lo stesso carattere di b_n .

Proprietà elementari delle serie.

• Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ sono due serie convergenti, allora

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ converge, e

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

(linearità delle serie).

Dim

$$\sum_{k=0}^n (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=0}^n a_k + \beta \sum_{k=0}^n b_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$$

$\downarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ $\downarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

$$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$, e se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora

cioè la serie diverge a $+\infty$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha a_k) \quad \begin{cases} \text{diverge a } +\infty \\ \text{converge a } 0 \\ \text{diverge a } -\infty \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{se } \alpha > 0 \\ \text{se } \alpha = 0 \\ \text{se } \alpha < 0 \end{array}$$

(Dim. simile alla precedente).

OSS Nella maggioranza dei casi non è possibile scrivere formule semplici per s_n . Ci si accontenta di solito di criteri per stabilire il carattere di una serie (cioè: serie convergente, divergente, irregolare).

CONDIZIONE NECESSARIA per la convergenza di una serie.

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ converge, allora $\lim_{k \rightarrow +\infty} d_k = 0$.

Dmn Se la serie converge, allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$.

OSS: si ha sempre

$$s_n = s_{n-1} + d_n$$

$$d_n = \underbrace{s_n}_{\downarrow s \in \mathbb{R}} - \underbrace{s_{n-1}}_{\downarrow s} \rightarrow s - s = 0$$

□

Domanda: è anche una cond. sufficiente?

Cioè se $d_k \rightarrow 0$, posso dire che $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$ converge?

No. Controesempi:

1) già visto: $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\log\left(\frac{k}{k+1}\right)}_{d_k}$

$$d_k = \log\left(\frac{k}{k+1}\right) \rightarrow \log 1 = 0$$

ma $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (\log k - \log(k+1))$ serie telescopica

diverge a $-\infty$.

$$2) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots$$

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \rightarrow 0$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} = \underbrace{1}_{\frac{1}{\sqrt{1}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{3}}}_{\frac{1}{\sqrt{n}}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \rightarrow +\infty$$

Quindi: $S_n \rightarrow +\infty$, cioè la serie diverge a $+\infty$.

OSS Come la cond^{ne} necessaria? Si usa "in negativo".

Se $a_k \not\rightarrow 0$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ non converge.

Esempio

$$\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\frac{k^2 + 3k}{1 + 5k^2}}_{a_k}$$

$a_k \rightarrow \frac{1}{5} \neq 0$, quindi la serie non converge.
(vedremo che diverge a $+\infty$).

Serie a termini non negativi

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \text{ con } a_k \geq 0.$$

In tal caso la succ^{ne} S_n delle somme parziali è crescente

$$S_{n+1} \stackrel{?}{\geq} S_n \Leftrightarrow \cancel{S_n} + a_{n+1} \geq \cancel{S_n} \Leftrightarrow a_{n+1} \geq 0$$

$\Rightarrow$ la succ^{te} s_n ammette sempre limite, pari al suo sup.

TEOREMA Una serie a termini non negativi può solo convergere oppure divergere a $+\infty$.

In particolare

- è convergente $\Leftrightarrow$ le s_n sono limitate superiormente
- è divergente a $+\infty \Leftrightarrow$ le s_n sono illimitate superiormente.

Applicazione Serie armonica $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

Dimostriamo che la succ^{te} $\{s_n\}$ è illimitata sup, quindi la serie diverge a $+\infty$.

$$s_1 = 1$$

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$s_4 = \frac{3}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}}$$

$$s_8 = s_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{2}}$$

$$s_{16} = s_8 + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \geq \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

$$S_{32} = \dots \geq 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 1 + \frac{5}{2}$$

$$S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2} \Rightarrow S_n \text{ è illimitata superiormente.}$$

$\Rightarrow$ la serie armonica diverge a $+\infty$.

OSS Cosa succede se cambio un termine di una serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$?

Per esempio, se cambio a_{k_0} con $\tilde{a}_{k_0}$?

Vediamo cosa succede alla succ^{ne} S_n delle somme parziali.

La nuova somma parziale la chiamo $\tilde{S}_n$.

Per $\boxed{n \geq k_0}$ $\tilde{S}_n = S_n - \underbrace{a_{k_0}} + \tilde{a}_{k_0}$

Quindi $\tilde{S}_n$ e S_n differiscono per una costante.

Il carattere della serie resta lo stesso, la somma può cambiare.

Quindi: se modifico un numero finito di termini della serie, il carattere resta lo stesso.

Quindi quello che conta è il comportamento di $\{a_k\}$

definitivamente per $k \rightarrow +\infty$. In tutti i teoremi sul carattere delle serie, basterà che le ipotesi siano vere definitivamente.

Per esempio, una serie definitivamente a termini non negativi (cioè $a_k \geq 0 \quad \forall k \geq \bar{k}$) può solo convergere, o divergere a $+\infty$.

CRITERIO del CONFRONTO per serie

Siano $\{a_k\}, \{b_k\}$ due succ^{ivi} t.c.

$$0 \leq a_k \leq b_k \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

(in realtà, basta che questo sia vero definitivamente)

Allora:

1) Se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ converge, anche $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ converge

2) Se la serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ diverge, anche $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k$ diverge.

Dim 1) Poniamo $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $t_n = \sum_{k=0}^n b_k$

Ovviamente $s_n \leq t_n$.

Se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge $\Rightarrow$ le t_n sono limitate sup.

$\Rightarrow$ le s_n sono limitate sup. $\Rightarrow$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge

Dim. 2) Si potrebbe procedere allo stesso modo, oppure così:

Se per assurdo la serie $\sum b_k$ non divergesse, allora convergerebbe, quindi per il pto 1) anche $\sum a_k$ convergerebbe, contro l'ipotesi.

□

Applicazioni.

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log k}{k}$$

è una serie a termini positivi.

OSS $\frac{\log k}{k} \geq \frac{1}{k}$ def^{te} per $k \rightarrow +\infty$

Poiché la serie armonica $\sum \frac{1}{k}$ diverge, anche la serie

$\sum \frac{\log k}{k}$ diverge.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k 2^k}$$

OSS

$\frac{1}{k 2^k} \leq \frac{1}{2^k}$ e la serie geometrica

$$\sum \frac{1}{2^k} = \sum \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

converge.

Quindi la serie $\sum \frac{1}{k 2^k}$ converge.

Per verificare la convergenza/divergenza di una serie a termini positivi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, bisogna capire "quanto velocemente"

i termini a_k della serie tendono a zero.

Per fare i confronti, sono particolarmente utili:

1) La serie geometrica $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$

2) La serie armonica generalizzata

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

$(\alpha > 0)$

TEOREMA la serie armonica generalizzata $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$

- diverge se $\alpha \leq 1$
- converge se $\alpha > 1$.

Dim. (parziale)

$\alpha = 1$: già noto (serie armonica)

$$\boxed{\alpha < 1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$$

si osserva che

$$\frac{1}{k^{\alpha}} \geq \frac{1}{k}$$

la cui serie diverge

Per il confronto, la serie $\sum \frac{1}{k^{\alpha}}$ diverge

$$\boxed{\alpha = 2}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

Faccio il confronto con la serie di Mengoli $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$,

che converge.

$$\frac{1}{k^2} \stackrel{?}{\leq} \frac{2}{k(k+1)} \iff \frac{1}{k} \stackrel{?}{\leq} \frac{2}{k+1}$$

$$\iff$$

$$k+1 \leq 2k$$

$$\iff$$

$$1 \leq k$$

la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k(k+1)}$ converge, quindi anche $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge.

Caso $\boxed{\alpha > 2}$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$

$$\alpha > 2$$

$\frac{1}{k^{\alpha}} \leq \frac{1}{k^2}$, la cui serie converge. Quindi anche $\sum \frac{1}{k^{\alpha}}$ converge.

Resta da dimostrare il caso
i solo rimandata.

$1 < \alpha < 2$, la cui dimostr.

□

CRITERIO del CONFRONTO ASINTOTICO

Siano $\{a_k\}, \{b_k\}$ due succⁿⁱ definitivamente a termini positivi.

Supponiamo che $\exists \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{a_k}{b_k} = l \in [0, +\infty]$.

Allora

1) Se $l \in (0, +\infty)$, le serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

hanno lo stesso carattere (entrambe convergenti o entrambe divergenti)

Dim. Se $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow l \in (0, +\infty)$, definitivamente

$$\frac{l}{2} \leq \frac{a_k}{b_k} \leq \frac{3}{2} l \quad \text{def}^{\text{te}}$$

$$\frac{l}{2} b_k \leq a_k \leq \frac{3}{2} l b_k \quad \text{def}^{\text{te}}.$$

Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge $\Rightarrow \sum_k \frac{3}{2} l b_k$ converge $\Rightarrow \sum_k a_k$ converge
CONFRONTO

Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge $\Rightarrow \sum_k \frac{l}{2} b_k$ diverge $\Rightarrow \sum_k a_k$ diverge
CONFRONTO

2) Se $l = +\infty$

ricordo: $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow +\infty$

• se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge.

- se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge

Dim se $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{a_k}{b_k} \geq 1$ def^{te}.
 $\Rightarrow a_k \geq b_k$ def^{te} e si conclude con il confronto.

3) $l = 0$

Stesso risultato, ma a parti invertite.

- Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.
- se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ diverge, anche $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ diverge.

Dim se $\frac{a_k}{b_k} \rightarrow 0$, $\Rightarrow \frac{b_k}{a_k} \rightarrow +\infty$.

e si applica il pto precedente.

□