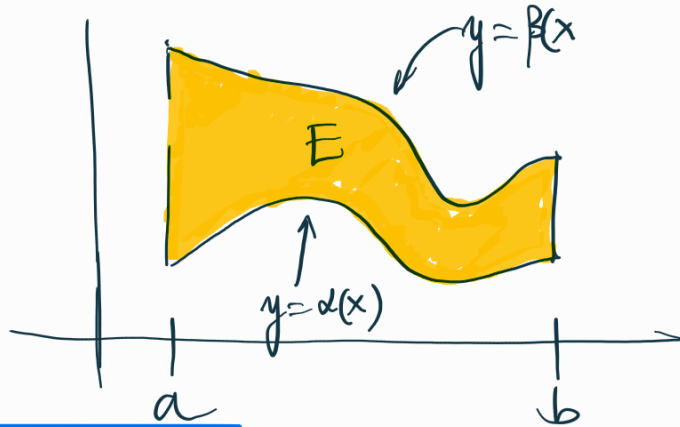


Calcolo delle aree

Considero insiemi del piano della seguente forma (domini normali)

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$

$$\alpha, \beta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \alpha(x) \leq \beta(x) \quad \forall x \in [a, b]$$
$$\alpha, \beta \in \mathcal{R}(a, b)$$



$$\text{Area } E = \int_a^b (\beta(x) - \alpha(x)) dx$$

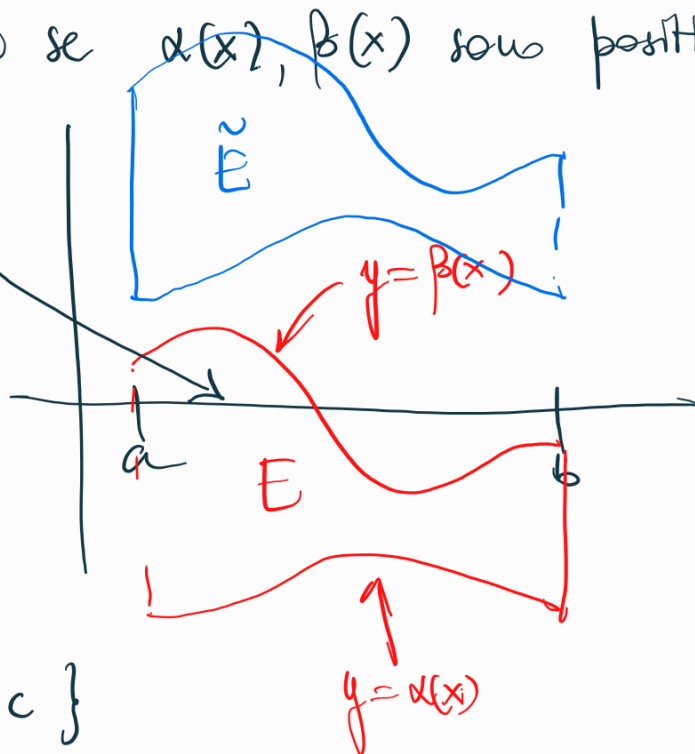
Questa formula è evidente se $\alpha(x), \beta(x)$ sono positive, ma è vera sempre.

Anche in questo caso la formula è vera.

Infatti traslo il dominio E verso l'alto, ponendo

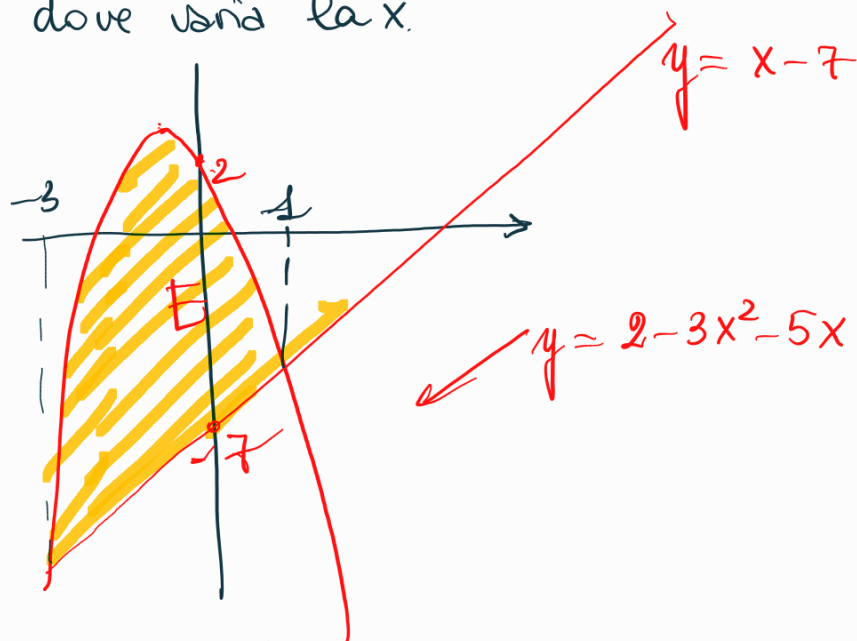
$$\tilde{E} = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \alpha(x) + c \leq y \leq \beta(x) + c\}$$

$$\text{area } E = \text{area } \tilde{E} = \int_a^b (\cancel{\beta(x)} + c - \cancel{\alpha(x)} - c) dx$$



Esempio: Calcolare l'area di $E = \{(x,y): x-7 \leq y \leq 2-3x^2-5x\}$

Non c'è scritto dove varia la x .



Trovo le intersezioni tra la parabola e la retta.

$$\begin{cases} y = x - 7 \\ y = 2 - 3x^2 - 5x \end{cases}$$

$$\Rightarrow x - 7 = 2 - 3x^2 - 5x$$

$$3x^2 + 6x - 9 = 0$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x \approx -3$$

$$x = 1$$

$$E = \{(x,y): -3 \leq x \leq 1, x-7 \leq y \leq 2-3x^2-5x\}$$

$$\text{Area } E = \int_{-3}^1 (2-3x^2-5x - x + 7) dx = \int_{-3}^1 (-3x^2 - 6x + 9) dx =$$

$$= \left(-x^3 - 3x^2 + 9x \right) \Big|_{-3}^1 = -1 - 3 + 9 - (-27 - 27 + 27) = 32$$

Calcolare l'area di $E = \{(x,y): y^4 \leq x^{12}(16-x^4)\}$

oss. $y^4 \leq x \Leftrightarrow |y| \leq \sqrt[4]{x} \Leftrightarrow -\sqrt[4]{x} \leq y \leq \sqrt[4]{x}$

$\forall x \geq 0$

$$y^4 \leq x^{12} (16 - x^4) \text{ deve essere}$$

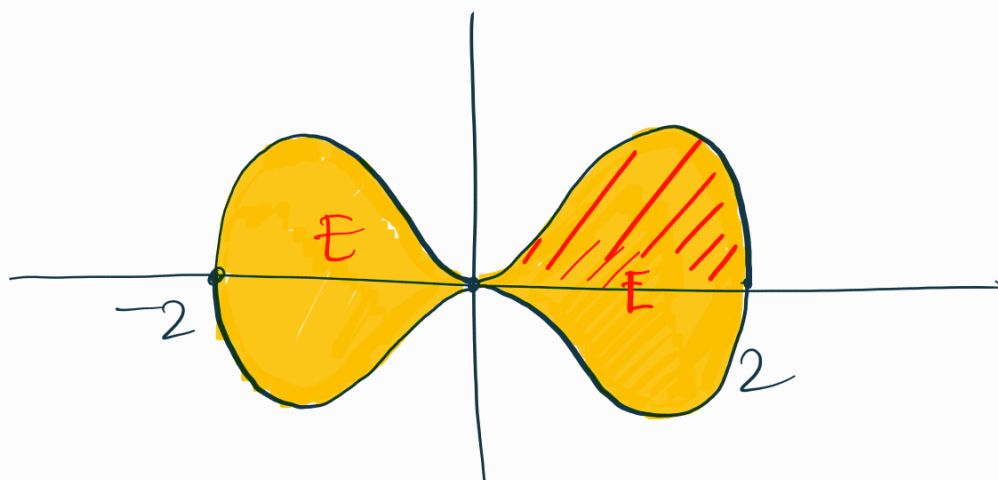
$$x^{12} (16 - x^4) \geq 0$$

$$\text{e poi } -|x|^3 \sqrt[4]{16 - x^4} \leq y \leq |x|^3 \sqrt[4]{16 - x^4}$$

$$\text{deve essere } 16 - x^4 \geq 0$$

$$\text{cioè } -2 \leq x \leq 2$$

$$E = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, -|x|^3 \sqrt[4]{16 - x^4} \leq y \leq |x|^3 \sqrt[4]{16 - x^4}\}$$



$$\text{Area } E = \int_{-2}^2 \left(|x|^3 \sqrt[4]{16 - x^4} + |x|^3 \sqrt[4]{16 - x^4} \right) dx$$

oss. Per simmetria

$$\text{Area } E = 4 \int_0^2 |x|^3 \sqrt[4]{16 - x^4} dx = 4 \int_0^2 x^3 \sqrt[4]{16 - x^4} dx =$$

$$16 - x^4 = t \Rightarrow x^4 = 16 - t \Rightarrow 4x^3 dx = -dt$$

$$x=0 \Rightarrow t=16$$

$$x=2 \Rightarrow t=0$$

$$= - \int_{16}^0 \sqrt[4]{t} dt = \int_0^{16} \sqrt[4]{t} dt = \frac{4}{5} t^{5/4} \Big|_0^{16} =$$

$$= \frac{4}{5} 16^{5/4} = \frac{4 \cdot 32}{5} = \frac{128}{5}$$

□

Studio di funzioni integrali

Studiamo la funzione

$$h(x) = \int_0^x \cos(t^3) dt \quad \text{in } \left[0, \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}\right]$$

Tengo conto che $h(0) = 0$, $h'(x) = \cos(x^3)$
dal 1° teor. fond. del calcolo.

Studio il segno di $h'(x) = \cos(x^3)$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x^3 = 0 \quad \text{oss} \quad x^3 \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{\pi}{2} \vee x^3 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}} \vee x = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}$$

$$h'(x) > 0 \Leftrightarrow \cos(x^3) > 0 \Leftrightarrow 0 \leq x^3 < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

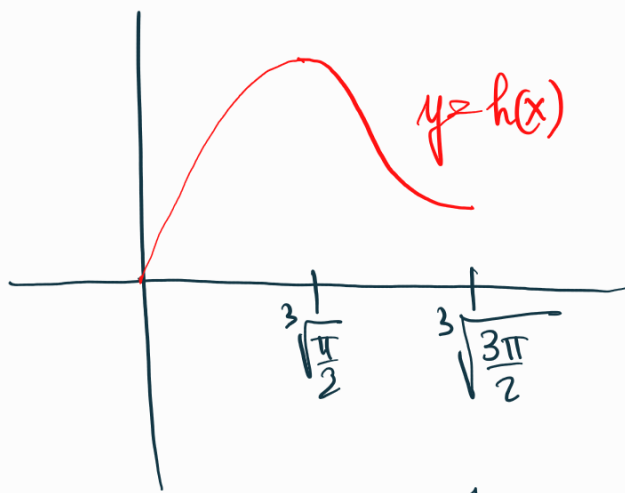
$$\Leftrightarrow 0 \leq x < \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$$

$h(x)$ strett. crescente in $\left[0, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}\right]$,

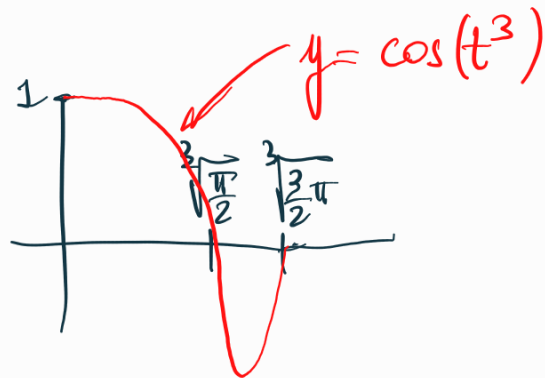
strett. decrescente in $\left[\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}, \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}\right]$

max assoluti in $x = \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}$

min locali in $x = 0$ e $x = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}}$



$\cos(t^3)$



Calcolare la derivata di

$$g(x) = \int_{2x+1}^{\sin x} \underbrace{\sqrt[3]{2s^2+1}}_{\varphi(s)} ds =$$

→ continua in $\mathbb{R}$.

$$= \int_{2x+1}^0 \varphi(s) ds + \int_0^{\sin x} \varphi(s) ds =$$

$$= - \int_0^{2x+1} \varphi(s) ds + \int_0^{\sin x} \varphi(s) ds.$$

oss $F'(x) = \left(\int_0^x \varphi(s) ds \right)' = \varphi(x)$ per il teor. fond.

avendo posto $F(x) = \int_0^x \varphi(s) ds.$

$$\int_0^{\sin x} \varphi(s) ds = F(\sin x)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\int_0^{\sin x} \varphi(s) ds \right) &= \frac{d}{dx} (F(\sin x)) = F'(\sin x) \cos x = \\ &= \varphi(\sin x) \cos x \\ &= \sqrt[3]{2(\sin x)^2 + 1} \cos x.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\int_0^{2x+1} \varphi(s) ds \right) &= \frac{d}{dx} (F(2x+1)) = \\ &= F'(2x+1) \cdot 2 = \varphi(2x+1) \cdot 2 = \\ &= \sqrt[3]{2(2x+1)^2 + 1} \cdot 2\end{aligned}$$

$$g'(x) = \sqrt[3]{2(\sin x)^2 + 1} \cos x - 2 \sqrt[3]{2(2x+1)^2 + 1}$$

Generalizzando questi calcoli,

se $g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(s) ds$ con φ continua
 $\alpha(x), \beta(x)$ di classe C^1

$$\Rightarrow g'(x) = \varphi(\beta(x)) \beta'(x) - \varphi(\alpha(x)) \alpha'(x)$$

OSS sulle sostituzioni:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin^3 x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \int_0^0 \frac{t^3}{1+t^2} dt = 0 \quad \text{CORRETTO}$$

$$\sin x = t$$

$$\cos x dx = dt$$

$$x=0 \Rightarrow t=0$$

$$x=\pi \Rightarrow t=0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx \stackrel{?}{=} \int_0^0 \frac{t^2}{1+t^2} \frac{dt}{1+t^2} = 0$$

$t = \tan x$ $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$
 $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

ERRATO perché $\tan x$ non è definito in $x = \frac{\pi}{2}$.

Se volessi utilizzare questa sostituzione, dovrei fare.

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \boxed{\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx} + \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 x \, dx$$

// $t = \tan x \rightarrow x=0 \Rightarrow t=0$

$+\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$$

$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t$ non è definito

$x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \Rightarrow t \rightarrow +\infty$

questo è un integrale improprio, che vedremo in una delle prossime lezioni.



Serie numeriche (somme di infiniti termini)

Sono le somme formali di una successione di termini

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = +\infty$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 2$$

$$0,\overline{3} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots = \frac{1}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \dots = e$$

Data una serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$, cioè la somma formale di una successione assegnata $\{a_k\}$, si definisce la successione delle **somme parziali** n -esime

$$S_n = \sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

DEF Sia $\{a_k\}$ una succ^{ne} di numeri reali

La serie $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k$ si dice:

- convergente se la succ^{ne} delle somme parziali $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ converge a un numero $s \in \mathbb{R}$.

In tal caso s si dice somma della serie e scriveremo $s = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k$

In altre parole $s = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n a_k$

- divergente ($\rightarrow +\infty$ oppure $\rightarrow -\infty$) se la successione $\{S_n\}$ diverge $\rightarrow +\infty$ oppure $\rightarrow -\infty$.
- irregolare se la succ^{ne} $\{S_n\}$ non ha limite.

Il carattere di una serie è la proprietà di essere convergente/divergente/irregolare

Esempio: La serie geometrica.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$$

dove $r \in \mathbb{R}$ è fissato (ragione della serie)

TEOREMA La serie geometrica

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = 1 + r + r^2 + r^3 + \dots$$

- converge se $|r| < 1$, cioè $-1 < r < 1$.

In tal caso la sua somma vale

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \frac{1}{1-r} \quad \text{se } |r| < 1$$

- diverge $\rightarrow +\infty$ se $r \geq 1$
- è irregolare se $r \leq -1$.

Dm

Calcolo

$$S_n = \sum_{k=0}^n r^k$$

Dimostrare che

$$S_n = \begin{cases} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & \text{se } r \neq 1 \\ n+1 & \text{se } r = 1 \end{cases}$$

Dobbiamo provare che

$$1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n \stackrel{?}{=} \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$\Downarrow$

$$(1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n)(1-r) \stackrel{?}{=} 1 - r^{n+1}$$

$$\begin{array}{r} 1 + r + r^2 + r^3 + \dots + r^n \\ -1 - r - r^2 - r^3 - \dots - r^n - r^{n+1} \\ \hline 1 - r^{n+1} \end{array} \quad \text{OK.}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

0° caso se $r=1$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$

1° caso se $-1 < r < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1-r} \stackrel{?}{=} \frac{1}{1-r} \in \mathbb{R}.$$

2° caso $r > 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{-\infty}{1 - r} = +\infty$$

3° caso $r < -1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$ ~~non esiste~~

la sottosuccessione $S_{2n} \rightarrow +\infty$

$S_{2n+1} \rightarrow -\infty$

4° caso $r = -1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (-1)^{n+1}}{2}$ ~~non esiste~~

"

1 se n pari

0 se n dispari $\square$

Esempio:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots =$$

$$= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} =$$

$$= \frac{1}{9/10} = \frac{10}{9}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{3}{10^k} = 3 \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{10^k}$$

" " "

$$0, \overline{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \dots$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3}{10^k} = 3 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^k} =$$

$$= 3 \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10} \right)^k - 1 \right) = 3 \cdot \left(\frac{10}{9} - 1 \right) =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$0, 23 \overline{47} = \frac{23}{100} + \frac{47}{10000} + \frac{47}{1.000.000} + \frac{47}{100.000.000} + \dots$$

$$= \frac{23}{100} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{47}{100^k} = \frac{23}{100} + 47 \sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^k =$$

$$= \frac{23}{100} + 47 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^k - 1 - \frac{1}{100} \right) =$$

$$= \frac{23}{100} + 47 \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}} - 1 - \frac{1}{100} \right) =$$

$$= \frac{23}{100} + 47 \left(\frac{100}{99} - 1 - \frac{1}{100} \right) =$$

$$= \frac{23}{100} + 47 \frac{10000 - 9999}{9900} =$$

$$= \frac{23}{100} + \frac{47}{9900}$$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 99 \\ \hline 909 \\ 909 \\ \hline 9999 \end{array}$$

$$0,\overline{9} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

$$0,3\overline{9} = 0,4$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots$$

(serie di Mengoli)

oss $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$

la serie diventa $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)$.

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1.$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$$

Questo è un caso particolare di "serie telescopiche" che sono le serie della forma.

$$\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1}).$$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n (b_k - b_{k+1}) = (b_0 - \cancel{b_1}) + (\cancel{b_1} - \cancel{b_2}) + (\cancel{b_2} - \cancel{b_3}) + \dots \\ &\quad + \dots + (\cancel{b_n} - b_{n+1}) \\ &= b_0 - b_{n+1} \end{aligned}$$

Una serie telescopica $\sum_{k=0}^{\infty} (b_k - b_{k+1})$

converge, diverge o è irregolare a seconda che b_k converga, diverga o sia irregolare

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + \log \frac{4}{5} + \dots$$

$$\text{oss } a_k = \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \log k - \log(k+1) = b_k - b_{k+1}$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = \underbrace{b_1}_{\log 1} - \log(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$$