

Sostituzioni speciali

Nel seguito le funzioni $R(x)$ oppure $R(x, y)$ sono funzioni razionali, cioè rapporti di polinomi nelle variabili indicate

$$1) \quad \boxed{\int R(e^x) dx = \int \frac{R(t)}{t} dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si pone } \boxed{e^x = t} \Rightarrow x = \log t \\ dx = \frac{dt}{t} \end{array} \right. \quad \leftarrow \text{e poi si applica il metodo dei fratti semplici.}$$

Esempio $\int \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} dx =$ $e^x = t$ $dx = \frac{dt}{t}$

$$= \int \frac{t-1}{t^2+1} \frac{dt}{t} = \int \frac{t-1}{(t^2+1)t} dt =$$

$$= \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B(2t)+C}{t^2+1} \right) dt = - \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \int \frac{dt}{t^2+1}$$

Cerco A, B, C

$$\frac{t-1}{(t^2+1)t} = \frac{A}{t} + \frac{B(2t)+C}{t^2+1}$$

$$t-1 = A(t^2+1) + 2Bt^2 + Ct$$

$$\begin{cases} 0 = A + 2B \\ 1 = C \\ -1 = A \end{cases}$$

$$\boxed{C = 1}$$

$$\boxed{A = -1}$$

$$\boxed{B = -\frac{A}{2} = \frac{1}{2}}$$

$$= - \int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \int \frac{2t}{t^2+1} dt + \int \frac{dt}{t^2+1} = - \log t + \frac{1}{2} \log(t^2+1) + \operatorname{arctg} t + c_1 =$$

$$[t=e^x]$$

$$= -x + \frac{1}{2} \log(e^{2x}+1) + \operatorname{arctg} e^x + c_1$$

Oss A volte convergono sost. diverse.

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} dx \quad \begin{cases} \text{come prima } e^x = t \\ \text{meglio! } e^{2x} = t \end{cases}$$

$$2x = \log t, \quad x = \frac{1}{2} \log t$$

$$dx = \frac{dt}{2t}$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{t-1}{t+1} \frac{dt}{t} = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} \right) dt$$

2. Integrali della forma

$$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b}) dx$$

Si pone $\sqrt[n]{ax+b} = t \Rightarrow ax+b = t^n \Rightarrow x = \frac{t^n - b}{a}$

$$dx = \frac{n}{a} t^{n-1} dt$$

L'integrale diventa $\frac{n}{a} \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) t^{n-1} dt$

Esempio

$$\int \frac{dx}{(x+6)\sqrt{x+2}} = (*)$$

$$\sqrt{x+2} = t \quad x = t^2 - 2$$

$$dx = 2t dt$$

$$(*) = \int \frac{2t}{(t^2-2+6)t} dt = 2 \int \frac{dt}{t^2+4} = \frac{2}{4} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{2}\right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{2}\right) + c = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right) + c$$

Oss. Questo è un caso particolare della classe

$$2') \quad \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx.$$

Si può porre $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t \Rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = t^n$

$$\Rightarrow ax+b = t^n(cx+d) \Rightarrow x(ct^n-a) = b-t^nd$$

$$\Rightarrow x = \frac{b-t^nd}{ct^n-a} \Rightarrow dx = \dots dt$$

Esempio

dominio $x \in (-\infty, -3] \cup (-1, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{3+x}{x+1}} dx = (*) \quad \sqrt{\frac{3+x}{x+1}} = t$$

$$\frac{3+x}{x+1} = t^2 \Rightarrow 3+x = t^2(x+1)$$

$$\Rightarrow x(t^2-1) = 3-t^2$$

$$x = \frac{3-t^2}{t^2-1} \Rightarrow dx = \frac{-2t(t^2-1) - (3-t^2)2t}{(t^2-1)^2} dt$$

$$= \frac{-2t(\cancel{t^2-1}+3-\cancel{t^2})}{(t^2-1)^2} dt = \frac{-4t}{(t^2-1)^2} dt$$

$$(*) = \int \frac{\cancel{t^2-1}}{3-t^2} \cdot t \cdot \left(\frac{-4t}{(\cancel{t^2-1})^2} \right) dt = \int \frac{-4t^2}{(3-t^2)(t^2-1)} dt =$$

$$= \int \frac{4t^2}{(t^2-3)(t^2-1)} dt = \int \left(\frac{A}{t-\sqrt{3}} + \frac{B}{t+\sqrt{3}} + \frac{C}{t-1} + \frac{D}{t+1} \right) dt$$

Si trovano A, B, C, D , e l'integrale è calcolato

Alla fine $t = \sqrt{\frac{3+x}{x+1}}$

Se fosse stato, dopo la sost. $t^2 = s$...

$$\frac{1}{2} \int \frac{t^3}{(t^2-3)(t^2-1)} dt$$

$$t^2 = s \quad 2t dt = ds$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{s}{(s-3)(s-1)} ds$$

3) Integrali della forma $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Una sostituzione tipica è $t = \tan \frac{x}{2}$,

Ricordiamo che $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Attenzione.

$$x \neq (2k+1)\pi$$

$$\frac{x}{2} = \arctan t + k\pi \Rightarrow x = 2 \arctan t + 2k\pi \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$\nwarrow$ secondo dove sta x .

$$\text{oppure } t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (1+t^2) dx$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

1º modo

$$dx = \frac{2 dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{\cancel{1+t^2}}{\cancel{2t}} \frac{\cancel{2} dt}{\cancel{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + c = \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c.$$

$$\boxed{x \neq k\pi}$$

2º modo

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x dx}{1 - \cos^2 x} =$$

$$\cos x = t$$

$$-\sin x dx = dt$$

$$= - \int \frac{dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \int \left(\frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \right) dt =$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} \\ 1 = A(t+1) + B(t-1) \\ \begin{cases} A+B=0 \\ 1=A-B \end{cases} \\ A = \frac{1}{2}, \quad B = -\frac{1}{2} \end{array} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int \frac{dt}{t-1} - \int \frac{dt}{t+1} \right] = \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + c =$$

$$= \frac{1}{2} \log \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + c = \frac{1}{2} \log \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} + c.$$

3° modo

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} =$$

$$\frac{x}{2} = t$$

$$dx = 2dt$$

$$= \int \frac{dt}{\sin t \cos t} = \int \frac{\frac{dt}{\cos^2 t}}{\tan t} = \int \frac{1}{\tan t} (\tan'(t)) dt = \log |\tan t| + c$$
$$= \log \left| \tan \frac{x}{2} \right| + c$$

OSS Non sempre le sost. standard sono il modo migliore

$$\int \cos^7 x \, dx \longrightarrow t = \lg \frac{x}{2} \quad (\text{non conviene!})$$

formule iterative (già trovate) per
 $I_n(x) = \int \cos^n x \, dx$

$$\int \cos^7 x \, dx = \int \cos^6 x \cos x \, dx =$$
$$= \int (1 - \sin^2 x)^3 \cos x \, dx =$$

$$\sin x = t$$

$$\cos x \, dx = dt$$

$$= \int (1 - t^2)^3 dt =$$

$$= \int (-t^6 + 3t^4 - 3t^2 + 1) dt =$$

$$= \left(-\frac{t^7}{7} + \frac{3}{5} t^5 - t^3 + t \right) + c$$

$t = \sin x$

$$= -\frac{\sin^7 x}{7} + \frac{3}{5} \sin^5 x - \sin^3 x + \sin x + c$$

3') Integrali della forma $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x) dx$

Ovviamente si può usare la sost. $t = \tan \frac{x}{2}$ vista prima;
Ma di solito è più semplice usare

$$\boxed{t = \tan x}, \quad x = \arctan t + k\pi$$

$$\boxed{x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+t^2};$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x \cos x = \underbrace{\frac{\sin x}{\cos x}}_t \underbrace{\cos^2 x}_{\frac{1}{1+t^2}} = \frac{t}{1+t^2}$$

Esempio

$$\int \frac{3 \sin^2 x + 1}{2 + \cos^2 x} dx =$$

$$t = \tan x$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \int \frac{\frac{3t^2}{1+t^2} + 1}{2 + \frac{1}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{3t^2 + 1 + t^2}{2 + 2t^2 + 1} \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{4t^2 + 1}{(2t^2 + 3)(t^2 + 1)} dt =$$

Se avessi posto $t = \tan \frac{x}{2}$
avrei ottenuto gradi più alti.

$$= \int \left(\frac{\cancel{2}At + B}{t^2 + 1} + \frac{\cancel{4}ct + D}{2t^2 + 3} \right) dt \quad \text{etc..}$$

4) Integrali del tipo $\boxed{\int R(x, \sqrt{1-x^2}) dx = (*)}$

OSS deve essere $-1 \leq x \leq 1$.

Sost

$$\boxed{x = \sin t}$$

$$\boxed{t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}$$

$$dx = \cos t \, dt$$

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{\cos^2 t} = |\cos t| = \cos t$$

$$(*) = \int R(\sin t, \cos t) \cos t \, dt \quad \text{che è del tipo 3)}$$

Altra possibilità: $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{(1-x)(1+x)} = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} (1+x)$

e poi $\boxed{t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$ (già visto).

$$\int \sqrt{2-4x^2} \, dx = \int \sqrt{2} \sqrt{1-2x^2} \, dx = (*)$$

1° modo $\sqrt{2}x = \sin t \Rightarrow \sqrt{2} \, dx = \cos t \, dt$

$$\sqrt{1-2x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t} = \cos t$$

$$(*) = \int \cos t \cdot \cos t \, dt = \int \cos^2 t \, dt$$

per parti
 $\cos^2 t = \frac{1 + \cos(2t)}{2}$

alla fine $t = \arcsin(\sqrt{2}x)$

2º modo

$$\sqrt{2} \int \sqrt{1-2x^2} dx = \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}x = t \\ \sqrt{2} dx = dt \\ \sqrt{1-2x^2} = \sqrt{1-t^2} \end{array} \right]$$

$$= \int \sqrt{1-t^2} dt =$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-t} \sqrt{1+t} \cdot \sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}} dt = \int \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} (1+t) dt = (*)$$

$$\sqrt{\frac{1-t}{1+t}} = s \Rightarrow 1-t = s^2(1+t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(1+s^2) = 1-s^2 \Rightarrow t = \frac{1-s^2}{1+s^2}$$

$$dt = \frac{-2s(1+s^2) - (1-s^2)2s}{(1+s^2)^2} ds = -\frac{2s(1+s^2+1-s^2)}{(1+s^2)^2} ds =$$

$$= -\frac{4s}{(1+s^2)^2} ds.$$

$$(*) = \int s \left(1 + \frac{1-s^2}{1+s^2}\right) \left(\frac{-4s}{(1+s^2)^2}\right) ds =$$

$$= -4 \int \frac{2s^2}{(1+s^2)^3} ds =$$

$$\frac{-8s^2}{(1+s^2)^3} = \frac{A}{1+s^2} + \frac{B}{(1+s^2)^2} + \frac{C}{(1+s^2)^3} \quad \text{Trouva } A, B, C.$$

$$\int \frac{ds}{1+s^2} = \arctg s$$

$$\int \frac{ds}{(1+s^2)^2} = \frac{1}{2} \left[\arctg s + \frac{s}{1+s^2} \right]$$

$$\int \frac{ds}{(1+s^2)^3} = \text{trovato ieri.}$$

$$3^\circ \text{ modo} \quad \int 1 \cdot \sqrt{2-4x^2} \, dx \quad (\text{per parti}) =$$

$$f'(x) = 1 \Rightarrow f(x) = x$$

$$g(x) = \sqrt{2-4x^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{-8x}{2\sqrt{2-4x^2}} = \frac{-4x}{\sqrt{2-4x^2}}$$

$$= x \sqrt{2-4x^2} + \int \frac{(4x^2 - 2)^{+2}}{\sqrt{2-4x^2}} dx =$$

$$= \quad " \quad - \underbrace{\int \sqrt{2-4x^2} \, dx}_{\text{a 1° membro}} + \boxed{\int \frac{2}{\sqrt{2-4x^2}} \, dx}_{"}$$