Nome: Cognome:

ISTRUZIONI:
È necessario argomentare lo svolgimento dell'esercizio aperto e le risposte dei quiz. La valutazione è legata alla solidità dei ragionamenti svolti e alla chiarezza dell'esposizione, come anche alla correttezza dei passaggi matematici e del risultato finale.

ex.1		
ex.2		
ex.3		
tot.		

ESERCIZIO 1 (3+3+3 punti). *Dato l'insieme*

$$D = \left\{ H(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2bx_3) = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \textit{con } 0 < a < b$$

i. si trovino tutti i punti critici della funzione distanza di $x \in D$ *da* 0,
ii. si classifichi la natura dei punti trovati in i.,
iii. si spieghi perché D *è compatto.*

ESERCIZIO 2 (3+3 punti). *Dati* $R > 0$ *e* $B_R = \left\{ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *si risponda alle seguenti richieste:*
i. calcolare l'integrale della funzione $f(x) = x_1^2$ *su* B_R,
ii. calcolare il volume di $K = B_R \cap \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, *per* $R > 1$.

ESERCIZIO 3 (3+3 punti). *Sia* $P \subseteq \mathbb{R}^2$ *il paralleleogrammo di vertici* $O = (0,0)$, $a = (a_1, a_2)$ $b = (b_1, b_2)$ $c = a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ *allora:*
i. si scriva un diffeomorfismo tra P *e il quadrato* $[0,1]^2$,
ii. si usi il prcedente diffeomorfismo per calcolare l'integrale $\int_P \left[x_1^2 + x_2^2 \right] dx$.

ESERCIZIO 1 (3+3+3 punti). *Dato l'insieme*

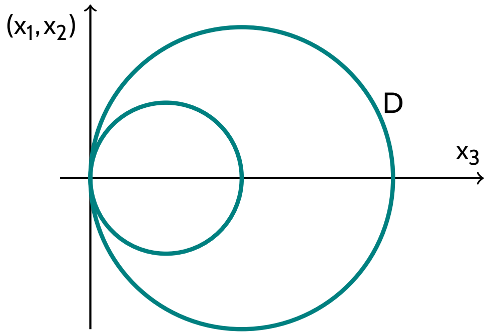
$$D = \left\{H(x) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2bx_3) = 0\right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \qquad \textit{con } 0 < a < b$$

i. si trovino tutti i punti critici della funzione distanza di $x \in D$ *da* O,
ii. si classifichi la natura dei punti trovati in i.,
iii. si spieghi perché D *è compatto.*

SVOLGIMENTO. i. Proponiamo più svolgimenti possibili per questo quesito, in tutti gli svolgimenti considereremo la funzione obiettivo $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, poiché la funzioen distanza e il suo quadrato possiedono gli stessi punti critici.
i.a A motivo della legge di annullamento del prodotto possiamo osservare subito che

$$D = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3 = 0\right\} \cup \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2bx_3 = 0\right\} = \partial B(ae_3, a) \cup \partial B(be_3, b)$$

cioè D è l'unione di due sfere, di raggio a e b rispettivamente, tangenti nel punto O, come suggerisce la figura che segue.



Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange prova che nei punti critici vincolati il gradiente della funzione obiettivo è parallelo al vettore normale al vincolo (cioè al vettore gradiente della funzione che definisce il vincolo), quindi dobbiamo cercare i punti $x \in D$ tali che la normale ad una delle due superfici sferiche sa parallela al vettore x, stesso, visto che $\nabla F(x) = 2x$. Però è anche noto che i vettori normali ad una sfera sono i vettori identificati dal segmento $\overline{Cx} = (x - C)$, dove C è il centro della sfera, nel nostro caso ci stamo chiedendo per quali $x \in \partial B(ae_3, a)$ vale la relazione $x = \lambda(x - ae_3)$ o $x \in \partial B(be_3, b)$ vale la relazione $x = \lambda(x - be_3)$. Entrambe le relazioni implicano che x deve giacere sull'asse x_3, quindi abbiamo i seguenti 3 punti critici

$$O(0,0,0) \qquad A(0,0,2a) \qquad B(0,0,2b) \quad \text{e vale} \quad F(O) = 0 \qquad F(A) = 2a^2 \qquad F(B) = 4b^2$$

i.b Notiamo immediatamente che

$$D = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3 = 0\right\} \cup \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2bx_3 = 0\right\} = D_a \cup D_b$$

cioè D è l'unione di due vincoli (non necessariamente disgiunti). Quindi possiamo trasformare il nostro problema in due problemi di ottimizzazione vincolata, visto che gli evenutali punti critici devono trovarsi su una delle due componenti di D, cioè il nostro problema è equivalente ai seguenti due

trovare i punti critici della funzione F(x) per $x \in D_a$

trovare i punti critici della funzione F(x) per $x \in D_b$

I due problemi producono i seguenti sistemi

$$\begin{cases} 2x_1 + 2cx_1 = 0 \\ 2x_2 + 2cx_2 = 0 \\ 2x_3 + 2c(x_3 - a) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_1 + 2cx_1 = 0 \\ 2x_2 + 2cx_2 = 0 \\ 2x_3 + 2c(x_3 - b) = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2bx_3 = 0 \end{cases}$$

Per entrambi i sistemi possiamo dire che se $c = -1$ otteniamo che $a = 0$ o $b = 0$, quindi $c \neq -1$, allora le prime due equazioni implicano che $x_1 = x_2 = 0$ e l'equazione del vincolo fornisce il risultato $x_3 = 0, 2a$ per il primo sistema, $x_3 = 0, 2b$ per il secondo, e così troviamo

$$O(0,0,0) \qquad A(0,0,2a) \qquad B(0,0,2b) \quad \text{con} \quad F(O) = 0 \qquad F(A) = 2a^2 \qquad F(B) = 4b^2$$

iii.c Applichiamo meccanicamente la strategia dei moltiplicatori di Lagrange, quindi introduciamo la funzione $L(x,c) = F(x) + cH(x)$ e cerchiamo i suoi punti critici. Innanzitutto osserviamo che

$$\begin{cases} \partial_1 L(x,c) = 2x_1\left\{1 + 2c\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (a+b)x_3\right]\right\} = 0 \\ \partial_2 L(x,c) = 2x_2\left\{1 + 2c\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (a+b)x_3\right]\right\} = 0 \\ \partial_3 L(x,c) = 2x_3 + 2c(x_3 - a)\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2bx_3\right] + 2c(x_3 - b)\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3\right] = 0 \\ \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3\right)\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2bx_3\right) = 0 \end{cases}$$

le prime due equazioni sono "simmetriche", quindi o $x_1 = x_2 = 0$ oppure è nulla la parentesi graffa. Nel primo caso l'equazione del vincolo si riduce all'equazione $x_3^2(x_3 - 2a)(x_3 - 2b) = 0$ che ci permette di ricavare i punti critici $O(0,0,0)$, $A(0,0,2a)$ e $B(0,0,2b)$ in cui la funzione obbiettivo assume i seguenti valori: $F(O) = 0$, $F(A) = 2a^2$ e $F(B) = 4b^2$. Se supponiamo sia nulla la parentesi graffa l'equazione del vincolo diventa

$$\left(\frac{1}{2c} + (b-a)x_3\right)\left(\frac{1}{2c} - (b-a)x_3\right) = \frac{1}{4c^2} - (b-a)^2x_3^2 = 0 \quad \text{che ha soluzioni} \quad x_3 = \pm\frac{1}{2c(b-a)}$$

e sostituendo nella terza equazione del sistema si ottiene una coppia di identità false, cioè

$$\pm\frac{1}{c(b-a)} + c\left(\pm\frac{1}{c(b-a)} - a\right)\left[\pm\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\right] + c\left(\pm\frac{1}{c(b-a)} - b\right)\left[\mp\frac{1}{c} - \frac{1}{c}\right] = 0$$

per cui possiamo dire che non ci sono altri punti critici vincolati.

ii. Dalla precedente discussione abbiamo che O è punto di minimo assoluto, mentre B è il punto di massimo assoluto (si noti che D è compatto, come proveremo nel quesito successivo), quindi l'unico dubbio è la natura del punto critico A. Se ragioniamo come nel punto i.a la geometria del vincolo ci permette di concludere immediatamente che A è un massimo locale. Volendo discutere il problema analiticamente possiamo tentare di descrivere D come grafico di una funzione nell'intorno del punto A. Scriviamo alcune derivate parziali che ci serviranno nel seguito

$$\partial_1 H(x) = 4x_1\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (a+b)x_3\right) \qquad \partial_2 H(x) = 4x_2\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - (a+b)x_3\right)$$
$$\partial_3 H(x) = 2(x_3 - a)\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2bx_3\right] + 2(x_3 - b)\left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3\right]$$
$$\partial_{11} H(x) = 12x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4(a+b)x_3 \qquad \partial_{12} H(x) = 8x_1x_2$$
$$\partial_{22} H(x) = 4x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_3^2 - 4(a+b)x_3$$

e calcoliamole nel punto $A(0,0,2a)$

$$\partial_1 H(A) = 0 \qquad \partial_2 H(A) = 0 \qquad \partial_3 H(A) = 8a^2(a-b) < 0$$
$$\partial_{11} H(A) = \partial_{22} H(x) = 8a(a-b) \qquad \partial_{12} H(x) = 0$$

così abbiamo ottenuto che è possibile utilizzare il teorema di Dini per lo studio della natura del punto critico A, infatti il luogo degli zeri (almeno localmente, intorno al punto A) è il grafico di una funzione h, inoltre sappiamo che

$$h(0,0) = 2a \qquad \partial_1 h(0,0) = -\frac{\partial_1 H(A)}{\partial_3 H(A)} = 0 \qquad \partial_2 h(0,0) = -\frac{\partial_2 H(A)}{\partial_3 H(A)} = 0$$
$$\partial_{11} h(0,0) = -\frac{\partial_{11} H(A)}{\partial_3 H(A)} = -\frac{8a(a-b)}{8a^2(a-b)} = -\frac{1}{a} \qquad \partial_{12} h(0,0) = -\frac{\partial_{12} H(A)}{\partial_3 H(A)} = 0$$
$$\partial_{22} h(0,0) = -\frac{\partial_{22} H(A)}{\partial_3 H(A)} = -\frac{1}{a}$$

il che ci permette di scrivere che

$$x_3 = h(x_1, x_2) = 2a - \frac{1}{2a}x_1^2 - \frac{1}{2a}x_2^2 + o(x_1^2 + x_2^2)$$

da cui possiamo dedurre che A è un massimo locale per la funzione F visto che

$$F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 + \left(2a - \frac{1}{2a}x_1^2 - \frac{1}{2a}x_2^2 + o(x_1^2 + x_2^2)\right)^2 = 4a^2 - x_1^2 - x_2^2 + o(x_1^2 + x_2^2)$$

iii. Osserviamo subito che la funzione H è una funzione continua, visto che $H \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ essendo un polinomio, e siccome $D = H^{-1}(\{0\})$ segue subito che l'insieme è chiuso rispetto alla topologia euclidea di $\mathbb{R}^3$, perché la controimmagine attraverso una funzione continua di un chiuso (aperto) è sempre un chiuso (aperto).
Inoltre è possibile anche osservare che l'insieme è l'unione di due sfere tangenti (una interna all'altra) nel loro punto comune O, come nel disegno a lato. Infatti possiamo riscrivere il vincolo come segue per mettere maggiormente in luce il significato geometrico delle espressioni scritte

$$\begin{aligned} D = \{H(x) = 0\} &= \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3 = 0\right\} \cup \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - bx_3 = 0\right\} \\ &= \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2ax_3 + a^2 = a^2\right\} \cup \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - bx_3 + b^2 = b^2\right\} \\ &= \left\{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - a)^2 = a^2\right\} \cup \left\{x_1^2 + x_2^2 + (x_3 -)^2 = b^2\right\} = \partial B(ae_3, a) \cup \partial B(be_3, b) \end{aligned}$$

da cui si evince che possiamo circoscrivere l'insieme, con un parallelepipedo, ad esempio nel seguente modo: $D \subseteq [-b, b]^3 \times [0, 2b] \subseteq \mathbb{R}^3$. □

ESERCIZIO 2 (3+3 punti). *Dati* $R > 0$ *e* $B_R = \left\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq R^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ *si risponda alle seguenti richieste:*
i. calcolare l'integrale della funzione $f(x) = x_1^2$ *su* B_R,
ii. calcolare il volume di $K = B_R \cap \{x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$, *per* $R > 1$.

SVOLGIMENTO. i. Sottolineiamo che B_R ha simmetrica sferica, essendo una palla di $\mathbb{R}^3$, per cui ricorreremo alle coordinate sferiche per il calcolo dell'integrale, avendo visto a lezione che tali variabili sono un diffeomorfismo che ci permettono di semplificare notevolmente i calcoli in questione, quindi (ricordando che il valore assoluto del determinante dello jacobiano è $r^2 \sin(\phi)$) abbiamo che:

$$\begin{aligned} \int_{B_R} x_1^2 dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \sin^2(\phi) \cos^2(\theta) \cdot r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\theta \\ &= \left[\int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta\right] \left[\int_0^{\pi} \sin^3(\phi) d\phi\right] \left[\int_0^R r^4 dr\right] = \pi \left[-\cos(\phi) + \frac{1}{3}\cos^3(\phi)\right]_0^{\pi} \frac{1}{5} R^5 = \frac{4}{15}\pi R^5 \end{aligned}$$

Ricordiamo che le (usuali) coordinate sferiche sono

$$\begin{cases} x_1 = r\sin(\phi)\cos(\theta) \\ x_2 = r\sin(\phi)\sin(\theta) \\ x_3 = r\cos(\phi) \end{cases} \qquad \text{con } (r, \theta, \phi) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

ii. L'intersezione della sfera con il cilindro rende il dominio un solido a simmetria cilindrica, per cui utilizzeremo le coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \int_K dx &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{R^2 - r^2}}^{\sqrt{R^2 - r^2}} r dt dr d\theta = 2\pi \int_0^1 2r[R^2 - r^2]^{1/2} dr \\ &= \left[-2\pi \cdot \frac{2}{3}[R^2 - r^2]^{3/2}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi\left[R^3 - [R^2 - 1]^{3/2}\right] \end{aligned}$$

Ricordiamo che le coordinate cilindriche sono il seguente cambio di variabili,

$$\begin{cases} x_1 = r\cos(\theta) \\ x_2 = r\sin(\theta) \\ x_3 = t \end{cases} \qquad \text{con } (r, \theta, t) \in [0, +\infty) \times [0, 2\pi] \times \mathbb{R}$$

tali relazioni, come discusso a lezione, individuano un diffeomorfismo buono per il teorema del cambio di variabili negli integrali, inltre il valore assoluto del determinate della matrice jacobiana vale r. □

ESERCIZIO 3 (3+3 punti). *Sia* $P \subseteq \mathbb{R}^2$ *il paralleleogrammo di vertici* $O = (0,0)$, $a = (a_1, a_2)$ $b = (b_1, b_2)$ $c = a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ *allora:*

i. si scriva un diffeomorfismo tra P *e il quadrato* $[0,1]^2$,

ii. si usi il prcedente diffeomorfismo per calcolare l'integrale $\int_P \left[x_1^2 + x_2^2\right] dx.$

SVOLGIMENTO. i. È sempre possibile scrivere un diffeomorfismo tra un parallelogrammo e il quadrato $[0,1]^2$, sfruttando le relazioni dei cambi di basi negli spazi vettoriali, precisamente abbiamo che

$$x(u) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 u_1 + b_1 u_2 \\ a_2 u_1 + b_2 u_2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Jx(u) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

e questo cambio di variabili è un diffeomorfismo, a patto che i vettori a e b non siano paralleli: in particolare si ottiene che $|\det(Jx)| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$.

ii. Grazie al precedente diffeomorfismo possiamo svolgere i seguenti calcoli

$$\begin{aligned}
\int_P \left[x_1^2 + x_2^2\right] dx &= \int_{[0,1]^2} \left[x_1^2(u) + x_2^2(u)\right] |a_1 b_2 - a_2 b_1| du \\
&= \int_{[0,1]^2} \left[(a_1 u_1 + b_1 u_2)^2 + (a_2 u_1 + b_2 u_2)^2\right] |a_1 b_2 - a_2 b_1| du \\
&= \int_{[0,1]^2} \left[(a_1^2 u_1^2 + 2 a_1 b_1 u_1 u_2 + b_1^2 u_2^2) + (a_2^2 u_1^2 + 2 a_2 b_2 u_1 u_2 + b_2^2 u_2^2)^2\right] |a_1 b_2 - a_2 b_1| du \\
&= |a_1 b_2 - a_2 b_1| \left[\frac{1}{3}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2) + \frac{1}{2}(a_1 b_1 + a_2 b_2)\right] \\
&= \|a \wedge b\|_2 \left[\frac{1}{3}(\|a\|_2^2 + \|b\|_2^2) + \frac{1}{2}(a \cdot b)\right]
\end{aligned}$$

Con la scrittura $\|a \wedge b\|_2$ intendiamo il modulo del vettore $(a_1, a_2, 0) \wedge (b_1, b_2, 0)$, dove abbiamo identificato $\mathbb{R}^2$ con il piano $\{x_3 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ al fine di poter svolgere il prodotto vettoriale. □
