

# Portfolio Management

### **Assunzioni di base:**

Come investitore, vuoi massimizzare i rendimenti per un dato livello di rischio.

Il tuo portafoglio include tutte le tue attività e passività.

La relazione tra i rendimenti degli asset nel portafoglio è importante.

Un buon portafoglio non è semplicemente una raccolta di singoli buoni investimenti.

### **Avversione al rischio:**

Dato una scelta tra due attività con uguale tasso di rendimento, la maggior parte degli investitori sceglierà l'attività con il livello di rischio più basso.

### **Evidenze che gli investitori sono avversi al rischio:**

Molti investitori acquistano assicurazioni per: vita, automobile, salute e reddito da invalidità.

L'acquirente scambia costi certi con il rischio incerto di una perdita.

Il rendimento delle obbligazioni aumenta con la classificazione di rischio da AAA ad AA ad A...

### **Non tutti gli investitori sono avversi al rischio:**

La preferenza per il rischio può dipendere dall'ammontare di denaro coinvolto – rischiando somme piccole, ma assicurando perdite elevate.



## Markowitz Portfolio Theory

- Quantifica il rischio
- Deriva il tasso di rendimento atteso per un portafoglio di attività e una misura di rischio attesa
- Mostra che la varianza del tasso di rendimento è una misura significativa del rischio di portafoglio
- Deriva la formula per calcolare la varianza di un portafoglio, mostrando come diversificare efficacemente un portafoglio

### Assunzioni:

- Gli investitori considerano ogni alternativa di investimento come rappresentata da una distribuzione di probabilità dei rendimenti attesi su un certo periodo di detenzione.
- Gli investitori massimizzano l'utilità attesa su un singolo periodo, e le loro curve di utilità mostrano un'utilità marginale decrescente della ricchezza.
- Gli investitori stimano il rischio del portafoglio sulla base della variabilità dei rendimenti attesi.
- Gli investitori prendono decisioni esclusivamente in base al rendimento atteso e al rischio, quindi le loro curve di utilità sono funzione del rendimento atteso e della varianza (o deviazione standard) dei rendimenti.
- Per un dato livello di rischio, gli investitori preferiscono rendimenti più elevati a rendimenti più bassi. Allo stesso modo, per un dato livello di rendimento atteso, gli investitori preferiscono meno rischio a più rischio.

## Markowitz Portfolio Theory

Usando queste cinque ipotesi, un singolo titolo o un portafoglio di titoli è considerato efficiente se nessun altro titolo o portafoglio offre un rendimento atteso più elevato con lo stesso (o minore) rischio, oppure un rischio più basso con lo stesso (o maggiore) rendimento atteso.

### Misure di rischio alternative:

- Varianza o deviazione standard del rendimento atteso.
- Intervallo dei rendimenti.
- Semivarianza – una misura che considera solo le deviazioni al di sotto della media.

### Rendimenti attesi:

- Per un singolo titolo: somma dei possibili rendimenti moltiplicati per la corrispondente probabilità dei rendimenti.
- Per un portafoglio di investimenti: media ponderata dei rendimenti attesi dei singoli investimenti presenti nel portafoglio.

## Calcolo del rendimento atteso

Weight ( $W_i$ ) (Percent of Portfolio)	Expected Security Return ( $R_i$ )	Expected Portfolio Return ( $W_i \times R_i$ )
0.20	0.10	0.0200
0.30	0.11	0.0330
0.30	0.12	0.0360
0.20	0.13	0.0260
		E(R <sub>port</sub> ) 0.1150

$$E(R_{\text{port}}) = \sum_{i=1}^n W_i R_i$$

where :

$W_i$  = the percent of the portfolio in asset i

$E(R_i)$  = the expected rate of return for asset i

## Calcolo della varianza (singolo asset)

$$\text{Variance } (\sigma^2) = \sum_{i=1}^n [R_i - E(R_i)]^2 P_i$$

Possible Rate of Return ( $R_i$ )	Expected Return $E(R_i)$	$R_i - E(R_i)$	$[R_i - E(R_i)]^2$	$P_i$	$[R_i - E(R_i)]^2 P_i$
0.08	0.103	-0.023	0.0005	0.35	0.000185
0.10	0.103	-0.003	0.0000	0.30	0.000003
0.12	0.103	0.017	0.0003	0.20	0.000058
0.14	0.103	0.037	0.0014	0.15	0.000205
					0.000451

$$\text{Variance } (\sigma^2) = .000451$$

$$\text{Standard Deviation } (\sigma) = .021237$$

## Covarianza e Correlazione

### Covarianza dei rendimenti:

- Una misura del grado in cui due variabili “si muovono insieme” rispetto ai loro valori medi individuali nel tempo.
- Per due attività,  $i$  e  $j$ , la covarianza dei tassi di rendimento è definita come:  $Cov_{ij} = E\{[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\}$
- Il coefficiente di correlazione si ottiene standardizzando (dividendo) la covarianza per il prodotto delle deviazioni standard individuali.

### Covarianza e Correlazione:

- Il coefficiente di correlazione varia tra -1 e +1.
- Un valore pari a +1 indica una correlazione positiva perfetta. Ciò significa che i rendimenti dei due asset si muovono insieme in modo completamente lineare.
- Un valore pari a -1 indicherebbe una perfetta “decorrelazione”. Ciò significa che i rendimenti dei due asset si muovono con la stessa variazione percentuale, ma in direzioni opposte.

$$r_{ij} = \frac{\text{Cov}_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

where :

$r_{ij}$  = the correlation coefficient of returns

$\sigma_i$  = the standard deviation of  $R_{it}$

$\sigma_j$  = the standard deviation of  $R_{jt}$

## Deviazione standard del portfolio

$$\sigma_{\text{port}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{Cov}_{ij}}$$

where :

$\sigma_{\text{port}}$  = the standard deviation of the portfolio

$w_i$  = the weights of the individual assets in the portfolio, where weights are determined by the proportion of value in the portfolio

$\sigma_i^2$  = the variance of rates of return for asset i

$\text{Cov}_{ij}$  = the covariance between the rates of return for assets i and j,

where  $\text{Cov}_{ij} = r_{ij} \sigma_i \sigma_j$

## Markowitz Portfolio Theory

Qualsiasi asset di un portafoglio può essere descritto da due caratteristiche:

- Il rendimento atteso
- La deviazione standard attesa dei rendimenti

La correlazione, misurata tramite la covarianza, influisce sulla deviazione standard del portafoglio.

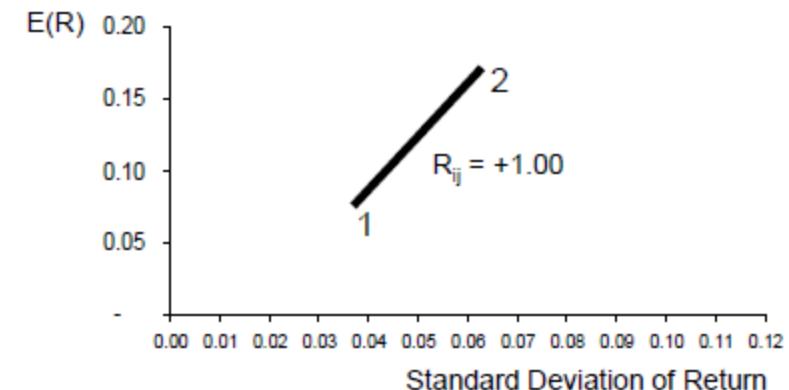
Una bassa correlazione riduce il rischio del portafoglio senza influenzare il rendimento atteso.

Gli asset possono differire nei rendimenti attesi e nelle deviazioni standard individuali.

Una correlazione negativa riduce il rischio del portafoglio.

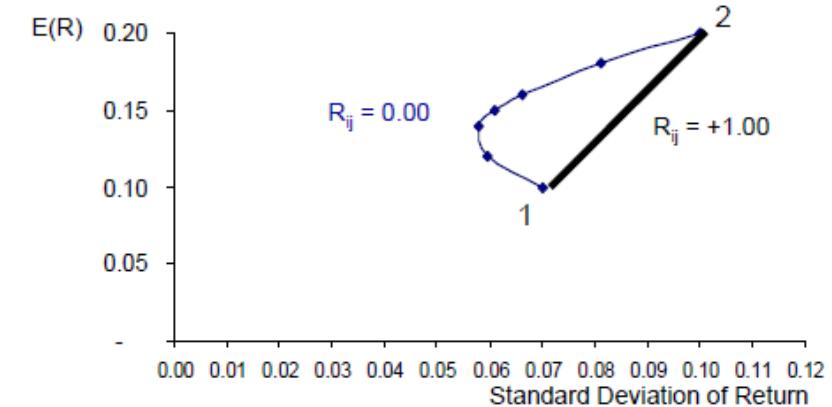
Combinare due asset con correlazione pari a  $-1,0$  riduce la deviazione standard del portafoglio a zero solo quando le deviazioni standard individuali sono uguali.

Con due asset perfettamente correlati, è possibile creare un portafoglio composto da due asset con combinazioni rischio-rendimento solo lungo una linea compresa tra i due singoli asset.

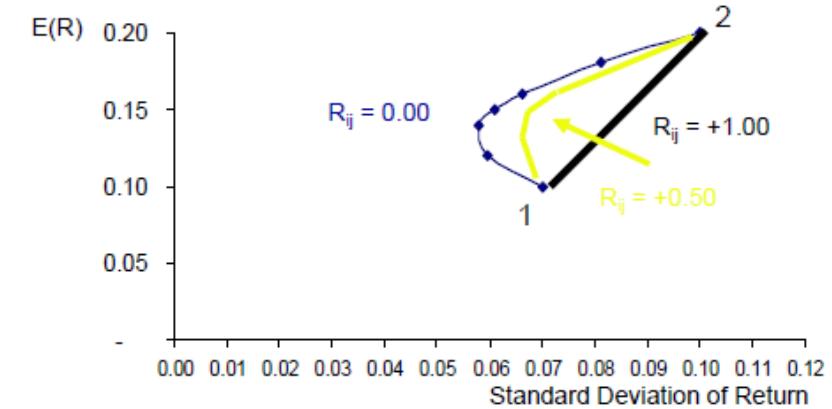


## Markowitz Portfolio Theory

Con asset non correlati è possibile creare un portafoglio composto da due asset con un rischio inferiore rispetto a ciascuno dei singoli asset.

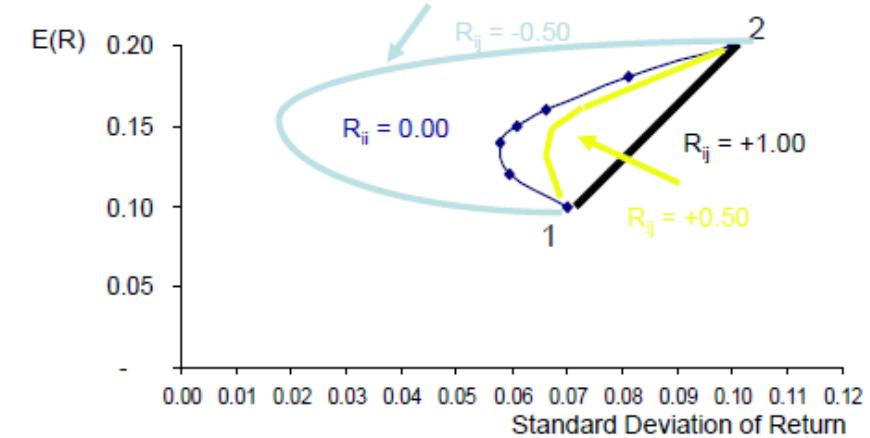


Con asset correlati è possibile creare un portafoglio composto da due asset situato tra le due curve.

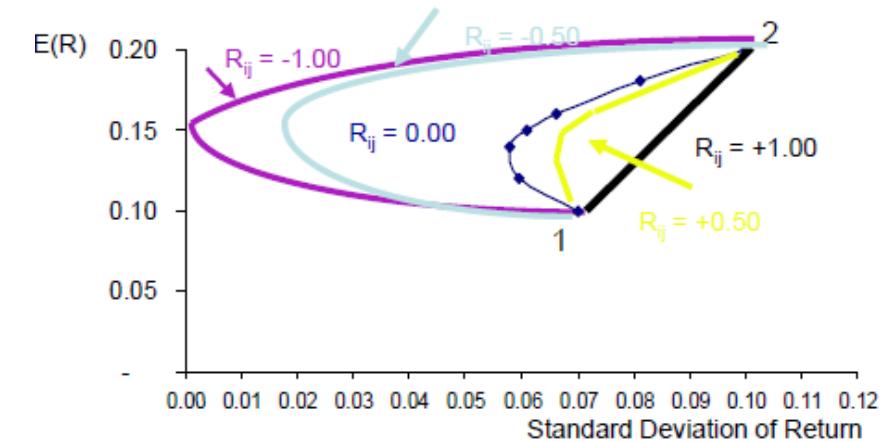


## Markowitz Portfolio Theory

Con asset negativamente correlati è possibile creare un portafoglio composto da due asset con un rischio molto inferiore rispetto a ciascuno dei singoli asset.



Con asset perfettamente negativamente correlati è possibile creare un portafoglio composto da due asset con quasi nessun rischio.



### Problemi di stima:

- I risultati dell'allocazione del portafoglio dipendono da input statistici accurati.
- Bisogna stimare i rendimenti attesi, le deviazioni standard, i coefficienti di correlazione.
- Se supponiamo di avere 100 assets, occorre stimare 4,950 stime di correlazione.
- **Estimation risk:** possibilità di commettere errori nelle stime dei parametri.

### Single index market model:

- Assumendo che i rendimenti azionari possano essere descritti da un singolo modello di mercato, il numero di correlazioni richieste si riduce al numero di asset.
- $R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i$
- $\beta_i$  = coefficiente angolare che mette in relazione i rendimenti del titolo  $i$  con i rendimenti del mercato azionario complessivo.
- $R_m$  = rendimenti del mercato azionario complessivo

### Coefficiente di correlazione:

- Se tutti i titoli sono similmente collegati al mercato e viene ricavato un  $\beta$  per ciascuno, si può dimostrare che il coefficiente di correlazione tra due titoli  $i$  e  $j$  è dato da:
- $$\rho_{ij} = \beta_i \beta_j \frac{\sigma_m^2}{\sigma_i \sigma_j}$$
- Dove  $\sigma_m^2$  è la varianza dei rendimenti del mercato aggregato.

### La Frontiera Efficiente e l'Utilità dell'Investitore:

- La curva di utilità di un singolo investitore specifica i compromessi che egli è disposto a fare tra rendimento atteso e rischio.
- La pendenza della curva della frontiera efficiente diminuisce gradualmente man mano che ci si sposta verso l'alto.
- Il portafoglio ottimale è quello con la massima utilità per un dato investitore.
- Si trova nel punto di tangenza tra la frontiera efficiente e la curva di utilità con la massima utilità possibile.

### **La Frontiera Efficiente:**

- Rappresenta l'insieme di portafogli che offrono il massimo rendimento atteso per un dato livello di rischio o il minimo livello di rischio per un dato livello di rendimento atteso.
- Gli investitori dovrebbero scegliere di collocarsi sulla frontiera efficiente sulla base della propria tolleranza al rischio.
- Relazione positiva tra rendimento e rischio.

## Limitazioni del modello di Markowitz

- La funzione di utilità può essere complessa e dipendere da parametri diversi dal valore atteso e dalla varianza. La soddisfazione dell'investitore, ad esempio, può essere influenzata dai momenti superiori della distribuzione dei rendimenti (skewness, kurtosis).
- Il modello media-varianza è un approccio a un solo periodo. Nessuna nuova informazione viene incorporata nella stima dei parametri e non è consentito il ribilanciamento dinamico. Inoltre, nel framework statico la liquidità non è un problema (mentre nel mondo reale è un aspetto molto rilevante, come ben sappiamo).
- Non viene considerata la leva finanziaria. È possibile prendere in prestito o prestare (a un tasso fisso o variabile) somme arbitrarie e i vincoli di passività non influenzano le decisioni di investimento.
- Il modello non è robusto. Piccole differenze nei parametri rilevanti (valori attesi, varianze e covarianze dei rendimenti dei titoli) possono determinare allocazioni di portafoglio completamente diverse.



### A cosa serve il modello di Markowitz?

- Anche se le limitazioni del modello sono piuttosto evidenti, l'approccio della frontiera efficiente proposto da Markowitz è un ottimo punto di partenza per sviluppare modelli più elaborati.
- Passiamo dalla *portfolio theory* alla *capital market theory*.
- Obiettivo: sviluppare un modello finanziario per prezzare tutti gli asset rischiosi.

### Capital Asset Pricing Model:

- Il modello CAPM ci permette di determinare il tasso di rendimento richiesto per ogni asset rischioso

## CAPM

### Assunzioni:

- Tutti gli investitori sono investitori efficienti secondo Markowitz che desiderano collocarsi su punti della frontiera efficiente. L'esatta posizione sulla frontiera efficiente e, quindi, il portafoglio specifico selezionato, dipenderà dalla funzione di utilità rischio-rendimento del singolo investitore.
- Gli investitori possono prendere a prestito o prestare qualsiasi somma di denaro al tasso di rendimento privo di rischio (RFR). Chiaramente è sempre possibile prestare denaro al tasso nominale privo di rischio acquistando titoli privi di rischio come i Buoni del Tesoro.
- Tutti gli investitori hanno aspettative omogenee; cioè stimano distribuzioni di probabilità identiche per i futuri tassi di rendimento.
- Tutti gli investitori hanno lo stesso orizzonte temporale di un solo periodo, ad esempio un mese, sei mesi o un anno.

## CAPM

### Assunzioni:

- Tutti gli investimenti sono infinitamente divisibili, il che significa che è possibile acquistare o vendere frazioni di qualsiasi asset o portafoglio.
- Non ci sono tasse o costi di transazione associati all'acquisto o alla vendita di asset.
- Non c'è inflazione né variazione dei tassi di interesse, oppure l'inflazione è completamente prevista.
- Tutti gli investitori hanno lo stesso orizzonte temporale di un solo periodo, ad esempio un mese, sei mesi o un anno.
- I mercati dei capitali sono in equilibrio. Ciò significa che iniziamo con tutti gli investimenti correttamente valutati in linea con i loro livelli di rischio.

Alcune di queste assunzioni sono irrealistiche. Allentare molte di queste assunzioni avrebbe solo un'influenza minore sul modello e non cambierebbe le sue principali implicazioni o conclusioni.

## Risk-free asset

### Caratteristiche di un asset privo di rischio:

- Deviazione standard pari a 0.
- Correlazione con tutti gli altri asset rischiosi uguale a 0.
- Garantisce il rendimento risk-free (RFR).
- Si troverà sull'asse verticale di un grafico del portafoglio.

La covarianza con un asset risk-free?

$$\text{Cov}_{ij} = E\{[R_i - E(R_i)][R_j - E(R_j)]\}$$

I rendimenti sono certi, quindi  $\sigma_{RF} = 0$ , quindi  $R_i = E(R_i)$  e  $R_i - E(R_i) = 0$

Di conseguenza, la covarianza dell'asset privo di rischio con qualsiasi asset rischioso o portafoglio sarà sempre pari a zero. Stesso discorso per la correlazione.

## Inserire un risk-free asset in un portafogli rischioso

### Rendimento atteso:

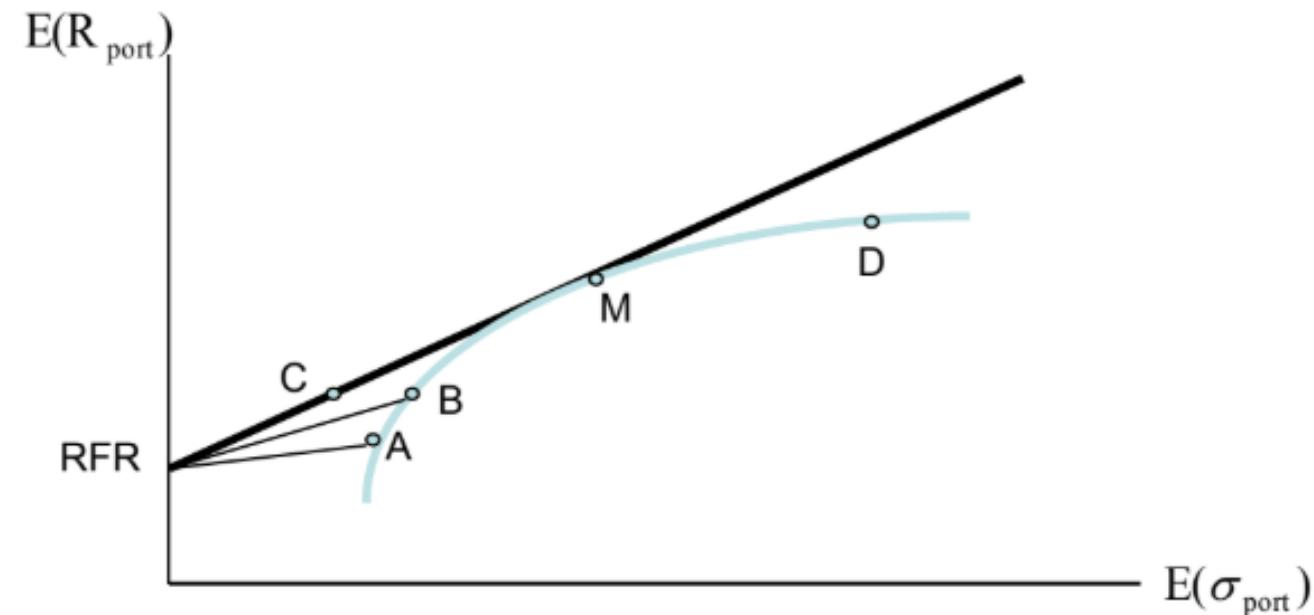
- Media ponderata dei due rendimenti:  $E(R_{port}) = w_{rf}(RFR) + (1 - w_{rf})E(R_i)$

### Deviazione standard:

- Partiamo dalla varianza di portafogli:  $E(\sigma_{port}^2) = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2$
- Assumiamo che il titolo 1 sia quello r-f:  $E(\sigma_{port}^2) = w_{rf}^2\sigma_{rf}^2 + (1 - w_{rf})^2\sigma_i^2 + 2w_{rf}(1 - w_{rf})\rho_{rf,i}\sigma_{rf}\sigma_i$
- Poiché sappiamo che la varianza dell'asset privo di rischio è zero e che la correlazione tra l'asset privo di rischio e qualsiasi asset rischioso  $i$  è zero, possiamo adattare la formula.
- $E(\sigma_{port}^2) = (1 - w_{rf})^2\sigma_i^2$
- Pertanto, la deviazione standard di un portafoglio che combina l'asset privo di rischio con asset rischiosi è pari alla proporzione lineare della deviazione standard del portafoglio di asset rischiosi.

## Inserire un risk-free asset in un portafogli rischioso

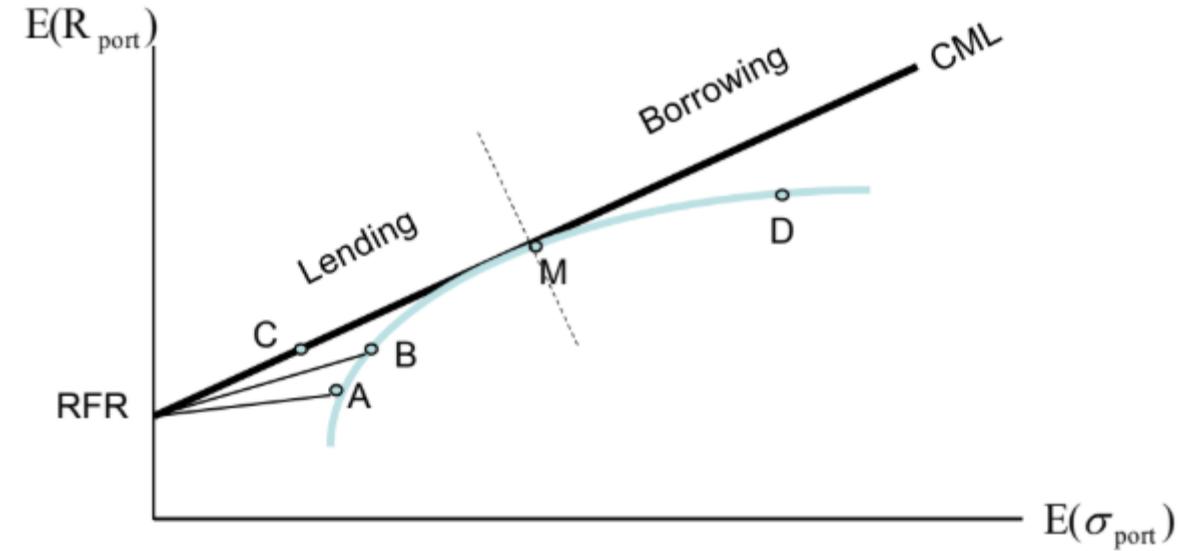
- Poiché sia il rendimento atteso sia la deviazione standard del rendimento per un tale portafoglio sono combinazioni lineari, un grafico dei possibili rendimenti e rischi del portafoglio appare come una linea retta tra i due asset.



## Inserire un risk-free asset in un portafogli rischioso

Per ottenere un rendimento atteso più elevato rispetto a quello disponibile nel punto M (in cambio di un rischio maggiore):

- Si può investire lungo la frontiera efficiente oltre il punto M, ad esempio nel punto D.
- Oppure aggiungere leva finanziaria al portafoglio prendendo in prestito denaro al tasso privo di rischio e investendo nel portafoglio rischioso al punto M.



## Market Portfolio

- Il portfolio M si trova nel punto di tangenza tra la **frontiera efficiente** e la **capital market line**.
- Assumendo che tutti gli investitori sono razionali, allora investiranno nel portfolio M e prenderanno a prestito o presteranno per collocarsi sulla CML.
- Il portfolio M deve includere tutti gli asset rischiosi dato che il mercato è in equilibrio, in proporzione con il rispettivo valore di mercato (market cap).
- Dato che il portfolio M contiene tutti gli asset rischiosi, è un portfolio completamente diversificato e quindi il rischio non sistematico è azzerato.

## Capital Market Line

- Unisce il portfolio che contiene il 100% di asset risk-free e il portfolio di mercato.
- $E(R_i) = R_{rf} + \frac{R_{mkt}-R_{rf}}{\sigma_{mkt}} \sigma_i$  dove  $\frac{R_{mkt}-R_{rf}}{\sigma_{mkt}}$  è lo Sharpe ratio
- Ogni portfolio sulla CML è ritenuto efficiente e il rendimento atteso è dato dalla somma del rendimento privo di rischio e un extra rendimento atteso proporzionale al rischio assunto dall'investitore, per ogni livello di tolleranza al rischio.

## Rischio sistematico

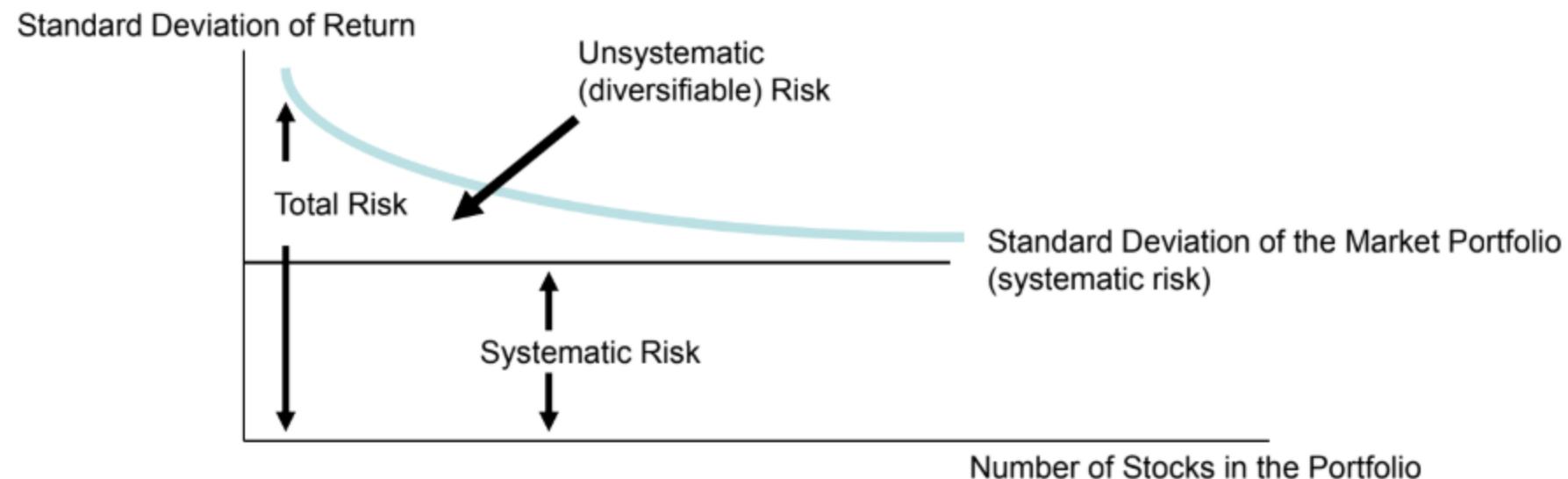
- Nel market portfolio abbiamo esclusivamente il rischio sistematico.
- Il rischio sistematico è la variabilità degli asset rischiosi che è causata dalle variabili macroeconomiche.
- Il rischio sistematico può essere misurato della deviazione standard dei rendimenti del portafogli di mercato e può variare nel tempo.

### Alcuni fattori macro che influenzano il rischio sistematico:

- Monetary policy - Tassi di crescita dell'offerta di moneta, tassi di interesse
- Fiscal policy - Livello del debito, stimoli fiscali, spesa pubblica
- Business cycle – PIL, Inflazione, Disoccupazione, Investimenti, Consumi

## Diversificazione

- Lo scopo della diversificazione è di ridurre la deviazione standard di portfolio.
- Aggiungendo asset al portfolio, mi aspetto che la covarianza media scenda.



## Esempio di Mkt portfolio e CML

### INPUT

Tasso risk free	3%
Volatilità	7%
Rendimento	8%

### CAPITAL MARKET LINE (CML):

$$E[r_X] = r_{RF} + \frac{r_{MKT} - r_{RF}}{\sigma_{MKT}} \sigma_X$$

### P.LIO DI MERCATO

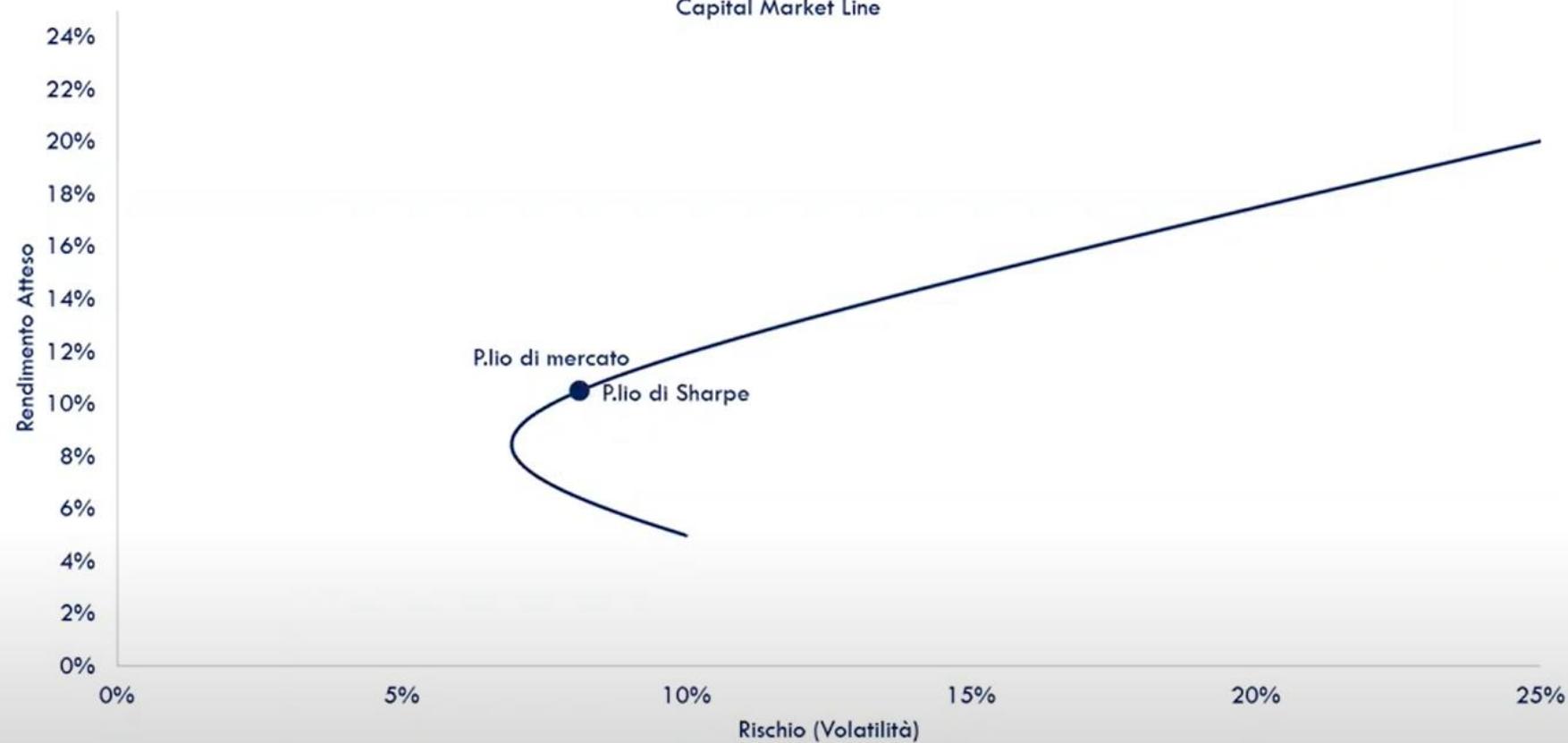
Rendimento	10.5%
Volatilità	8.1%
Sharpe Ratio	0.92

### P.LIO DI SHARPE (CML)

Pesi	
Risk free	0%
P.lio di mercato	+ 100%

### Statistiche

Rend. P.lio	10.5%
Volatilità P.lio	8.1%



## Esempio di Mkt portfolio e CML

INPUT	
Tasso risk free	3%
Volatilità	7%
Rendimento	8%

CAPITAL MARKET LINE (CML):

$$E[r_X] = r_{RF} + \frac{r_{MKT} - r_{RF}}{\sigma_{MKT}} \sigma_X$$

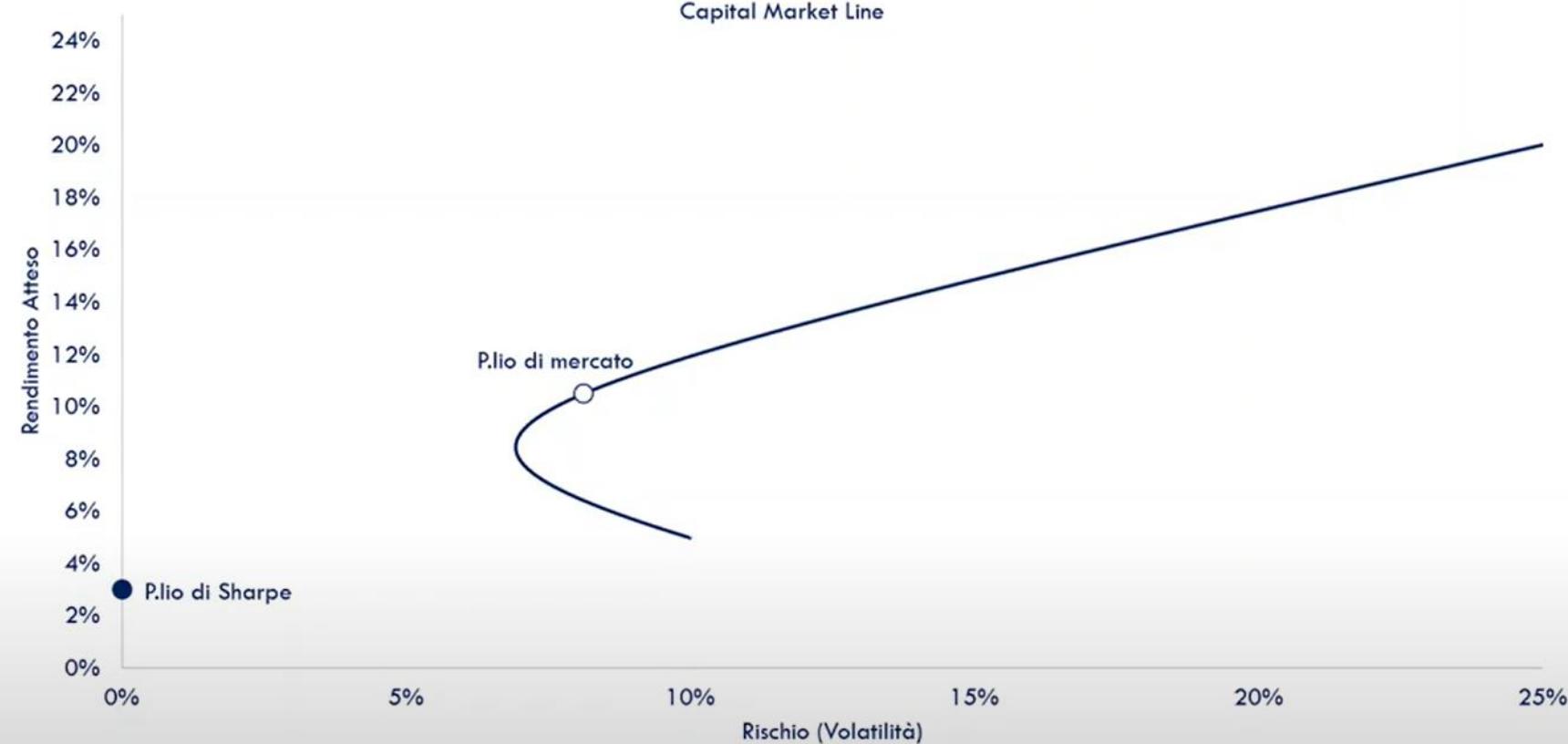
P.LIO DI MERCATO

Rendimento	10.5%
Volatilità	8.1%
Sharpe Ratio	0.92

P.LIO DI SHARPE (CML)

Pesi	
Risk free	100%
P.lio di mercato	+ 0%

Statistiche	
Rend. P.lio	3.0%
Volatilità P.lio	0.0%



## Esempio di Mkt portfolio e CML

### INPUT

Tasso risk free	3%
Volatilità	7%
Rendimento	8%

### CAPITAL MARKET LINE (CML):

$$E[r_X] = r_{RF} + \frac{r_{MKT} - r_{RF}}{\sigma_{MKT}} \sigma_X$$

### P.LIO DI MERCATO

Rendimento	10.5%
Volatilità	8.1%
Sharpe Ratio	0.92

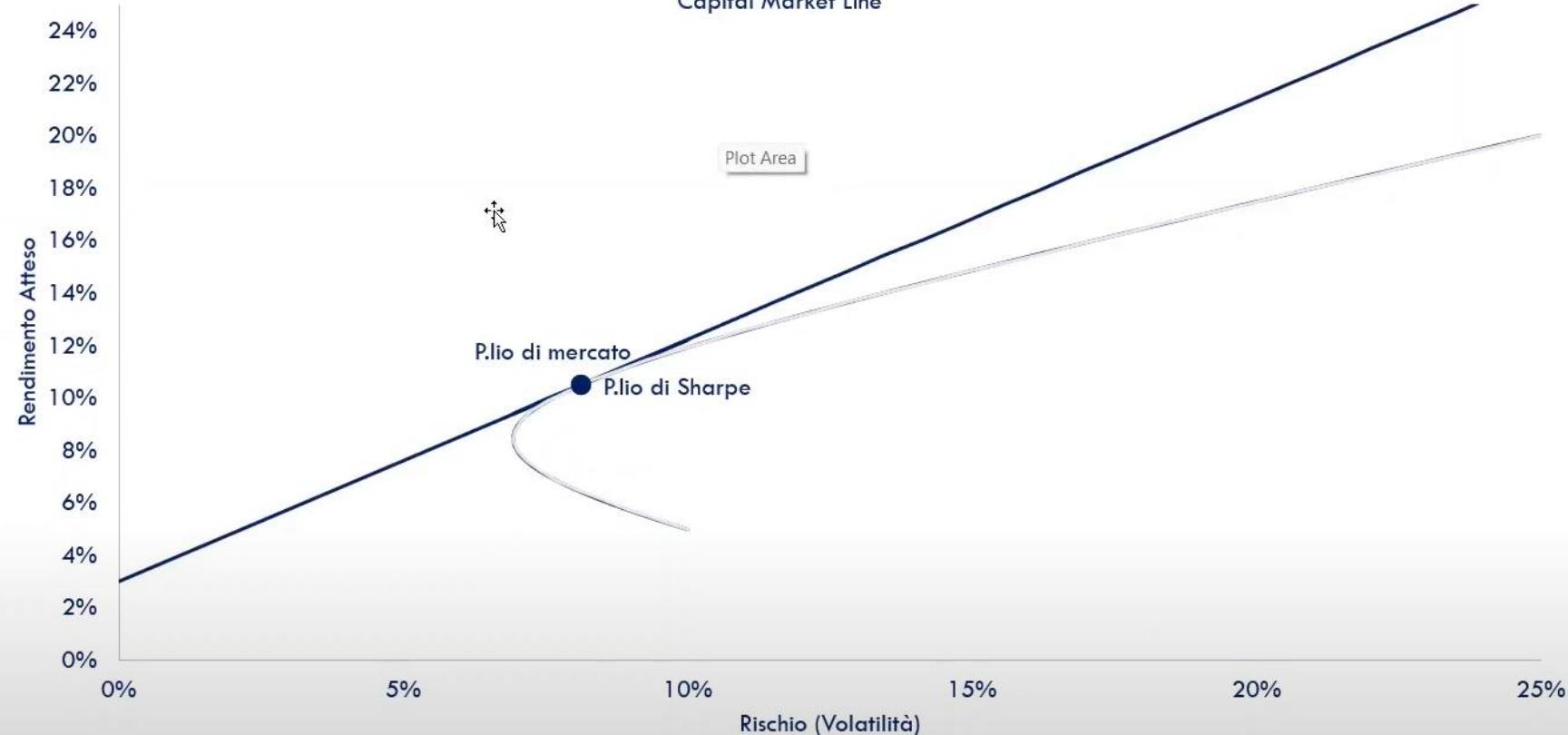
### P.LIO DI SHARPE (CML)

#### Pesi

Risk free	0%
P.lio di mercato	100%

#### Statistiche

Rend. P.lio	10.5%
Volatilità P.lio	8.1%



## Esempio di Mkt portfolio e CML

INPUT	
Tasso risk free	3%
Volatilità	7%
Rendimento	8%

CAPITAL MARKET LINE (CML):

$$E[r_X] = r_{RF} + \frac{r_{MKT} - r_{RF}}{\sigma_{MKT}} \sigma_X$$

P.LIO DI MERCATO

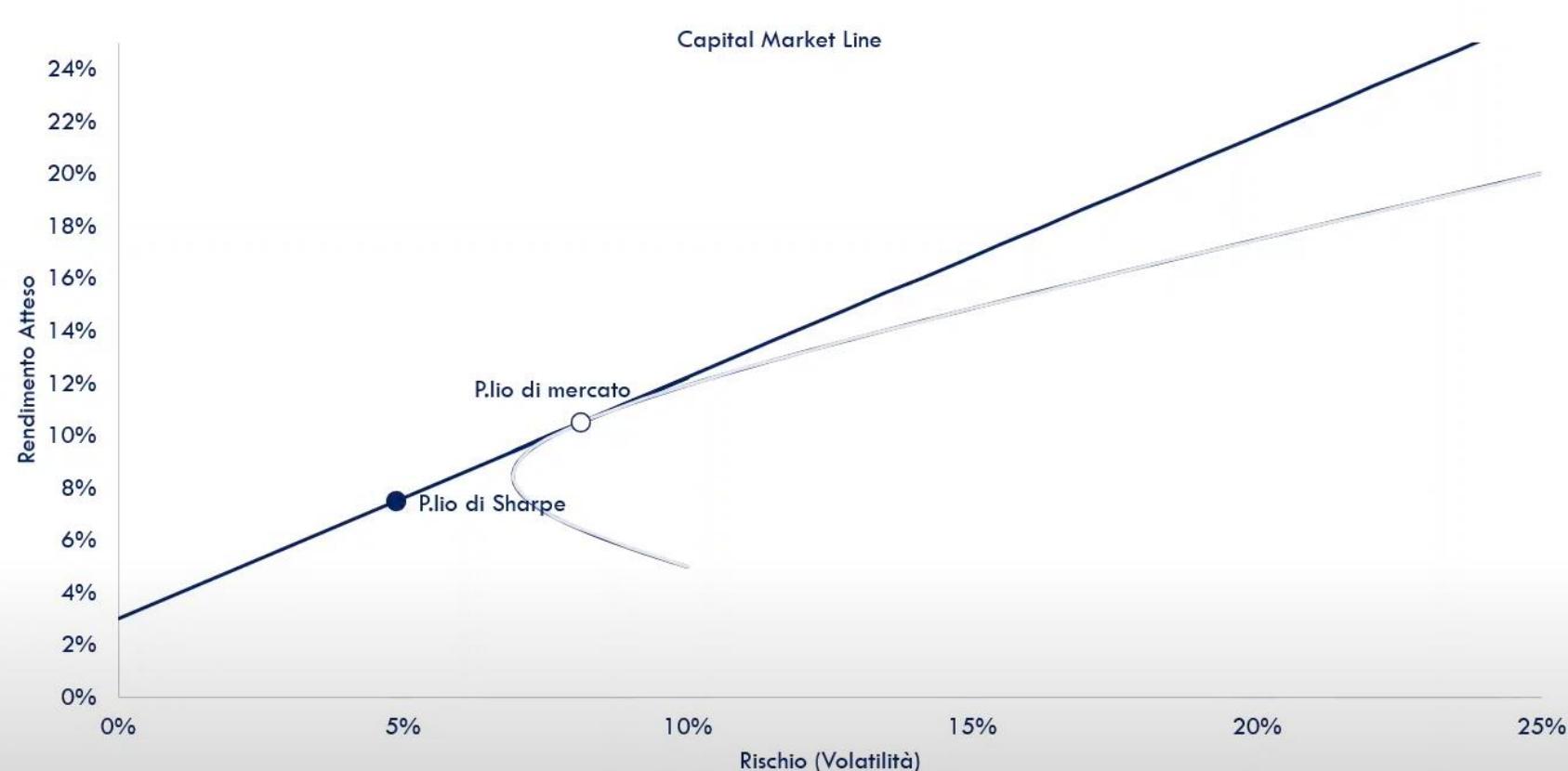
Rendimento	10.5%
Volatilità	8.1%
Sharpe Ratio	0.92

P.LIO DI SHARPE (CML)

Pesi	
Risk free	40%
P.lio di mercato	60%

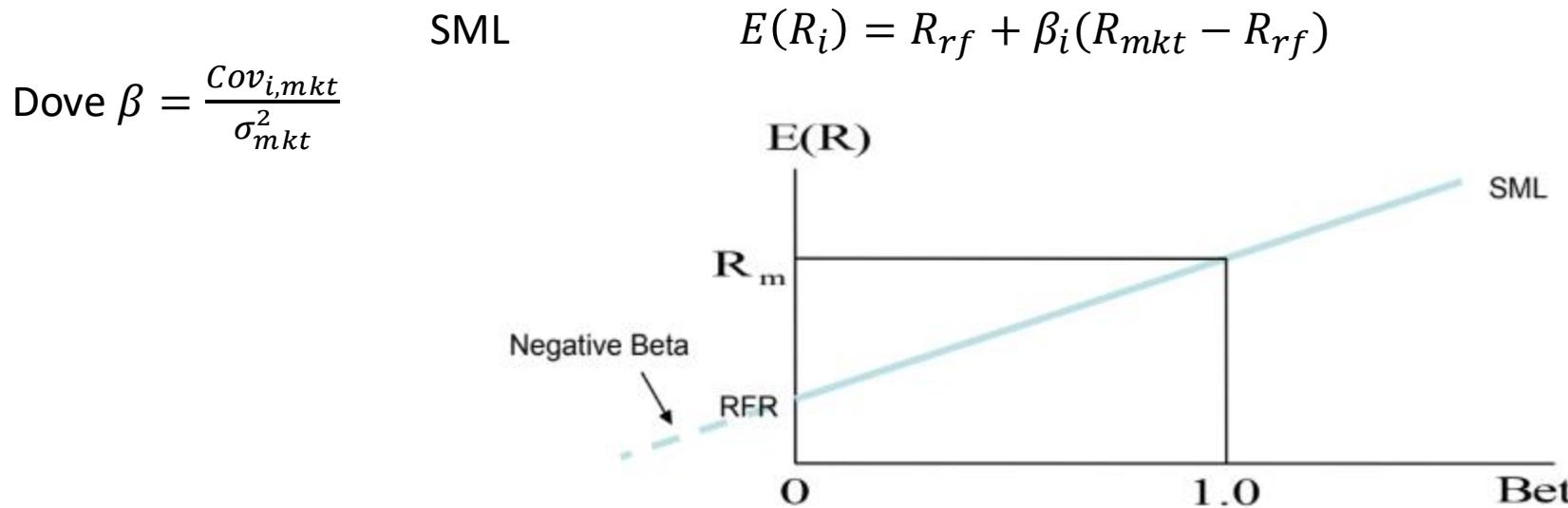
Statistiche

Rend. P.lio	7.5%
Volatilità P.lio	4.9%



## Security Market Line

- Se il market portfolio è efficiente, si può stabilire una relazione tra rischio e rendimento per qualsiasi titolo, non necessariamente efficiente.
- Il rendimento atteso di qualsiasi asset è uguale alla somma tra il rendimento privo di rischio e l'extra rendimento del mercato rispetto al risk-free moltiplicato per il **beta** del titolo.
- Il beta è una nuova misura di rischio e dipende dalla correlazione tra l'asset class e il market portfolio.



## Security Market Line

- Seguendo la formula precedente, il rendimento atteso di un titolo è determinato dal RFR più il risk premium dell'asset specifico.
- Il risk premium è determinato dal rischio sistematico dell'asset (il beta) e il risk premium del mercato.
- La relazione **lineare** tra rischio e rendimento atteso può essere espressa in forma grafica e prende il nome di Security Market Line.
- Il market portfolio ha **sempre beta pari a 1**, poiché è esattamente correlato con il mercato stesso (contiene tutti i titoli).
- Per questa ragione, solitamente il market portfolio è utilizzato come **benchmark**.
- In base al beta del singolo asset, mi aspetto un rendimento superiore o inferiore a quello del mercato in base al valore del beta.
- Titoli «aggressivi»:  $\beta > 1$
- Titoli «difensivi»:  $\beta < 1$

## Esempio di SML e portfolio

SECURITY MARKET LINE (SML):

$$E[r_X] = r_{RF} + \beta_X (r_{MKT} - r_{RF})$$

PORTAFOGLIO DI MERCATO

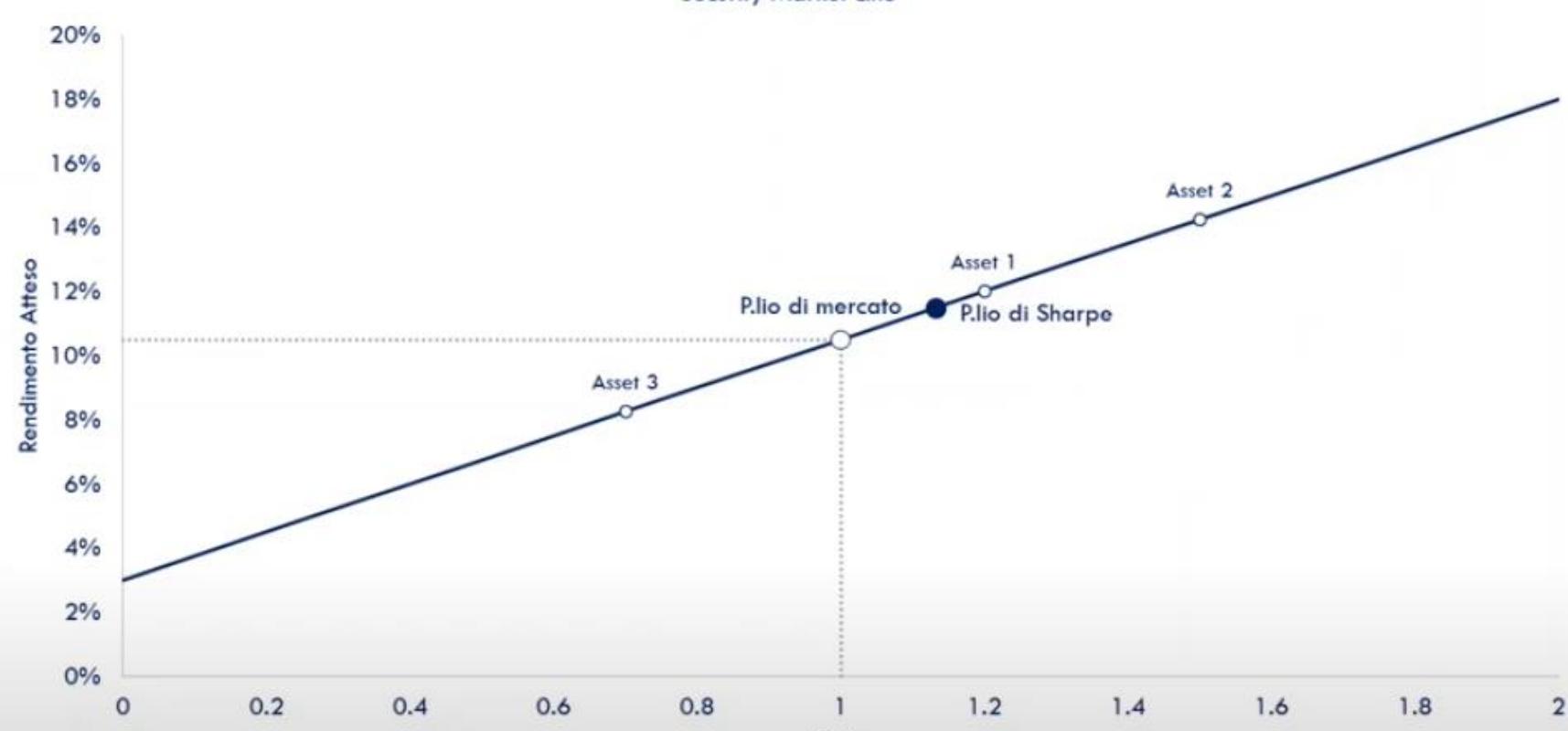
Rendimento	10%
Volatilità	8%
Sharpe Ratio	0.92

PORTAFOGLIO

Asset	Pesi	Beta
Asset 1	33%	1.20
Asset 2	33%	1.50
Asset 3	33%	0.70
100%		1.13

Statistiche

Beta	1.13
Rendimento	11%



## Esempio di SML e portfolio

**SECURITY MARKET LINE (SML):**

$$E[r_X] = r_{RF} + \beta_X (r_{MKT} - r_{RF})$$

**PORTAFOGLIO DI MERCATO**

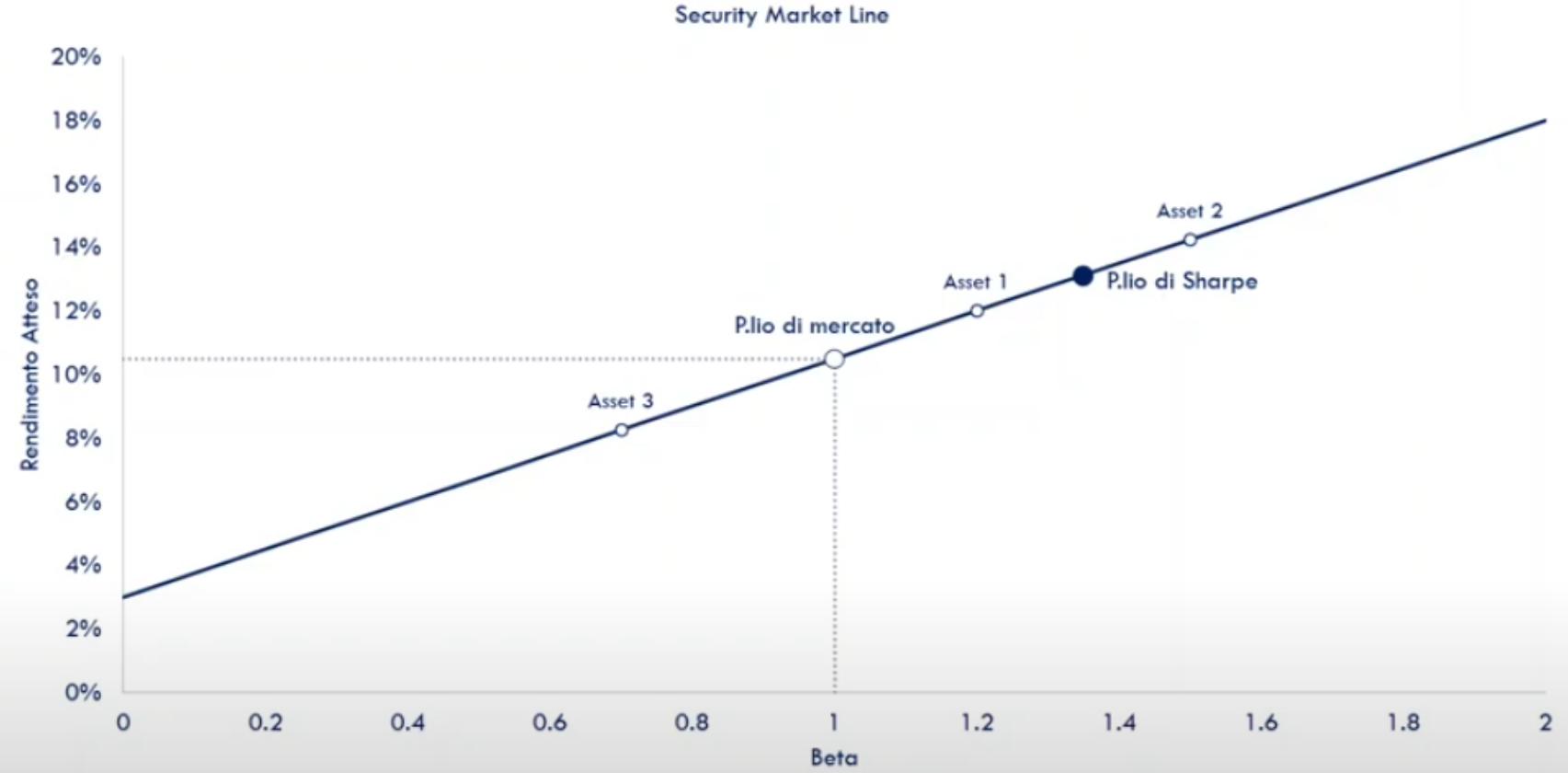
Rendimento	10%
Volatilità	8%
Sharpe Ratio	0.92

**PORTAFOGLIO**

Asset	Pesi	Beta
Asset 1	50%	1.20
Asset 2	50%	1.50
Asset 3	0%	0.70
100%		1.35

**Statistiche**

Beta	1.35
Rendimento	13%





## CAPM

- In equilibrio, tutti gli asset e tutti i portfolio dovrebbero essere sulla SML.
- Se un asset si trova al di sopra della SML, vuol dire che è **sottoprezzato**.
- Se un asset si trova al di sotto della SML, vuol dire che è **sovraprezzato**.
- Per ottenere rendimenti migliori (corretti per il rischio) rispetto alla media degli altri investitori, un investitore “superiore” deve essere in grado di stimare il valore degli asset in modo più accurato o efficace rispetto al mercato nel suo complesso.

## Limitazioni del modello CAPM

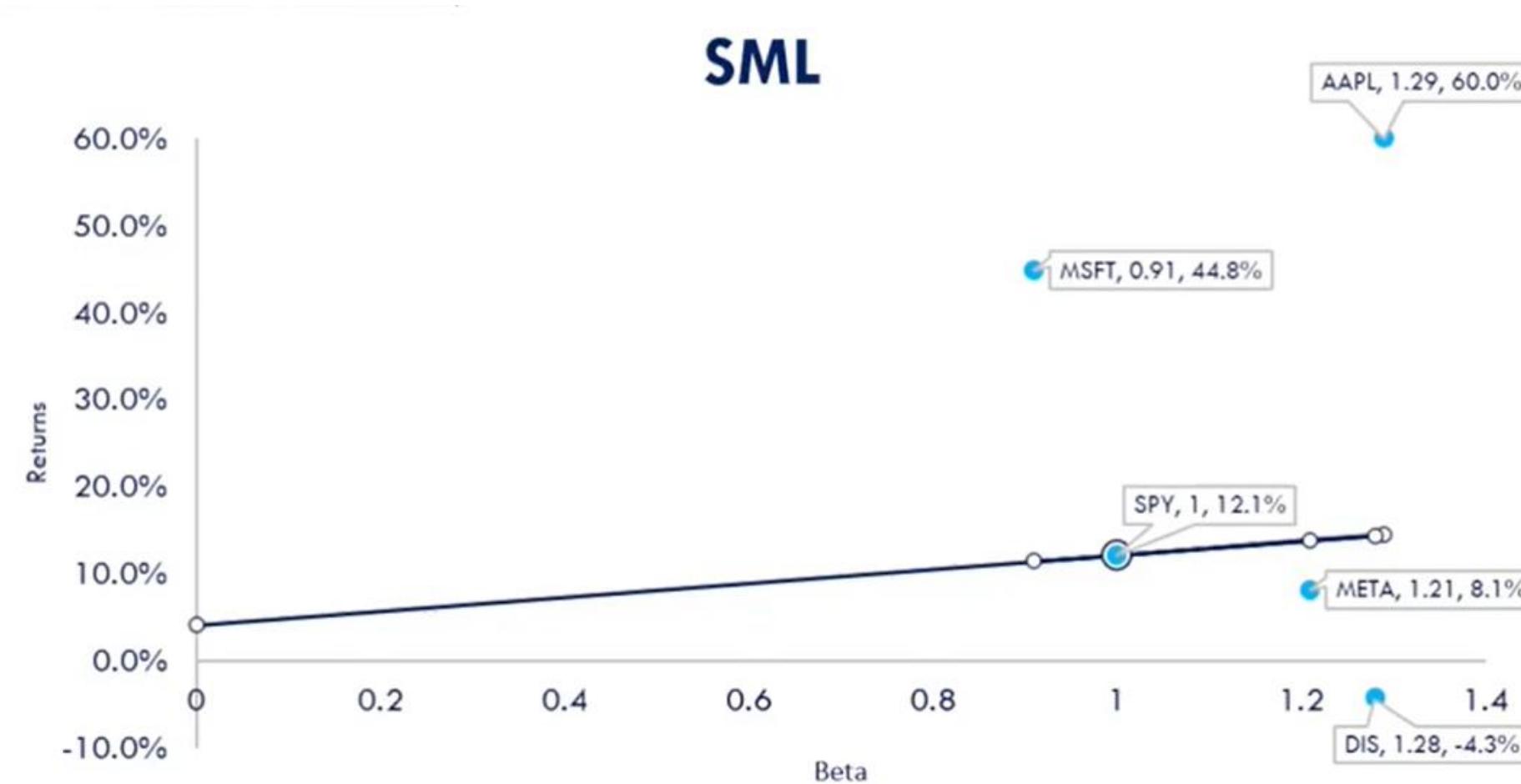
- Assunzioni irrealistiche: mercati efficienti, perfetta informazione, no costi di transazione, investitori razionali.
- Instabilità del beta: varia nel tempo e non sempre cattura tutte le fonti di rischio sistematico. Instabile per singoli titoli, più stabile per portfolio. Più stabile nel lungo periodo.
- Inesistenza del market portfolio: non esiste un unico mercato in cui sono disponibili tutti gli asset per un investimento (nuovi asset entrano, altri escono), e il valore degli asset stessi varia costantemente quindi è una misura dinamica difficile da calcolare. Utilizziamo proxy per applicare il modello, ma quale scegliamo?
- Relazione rischio-rendimento non-lineare
- Perfetta diversificazione inesistente
- Instabilità risk-free: costante ed uguale per tutti gli investitori.
- Modello a fattore singolo: considera solo il rischio sistematico ma ci sono altri rischi che devono essere considerati (credito, liquidità, macroeconomici) → Modello multi-fattoriale di Fama e French

## Esempio con CAPM, SML e alpha

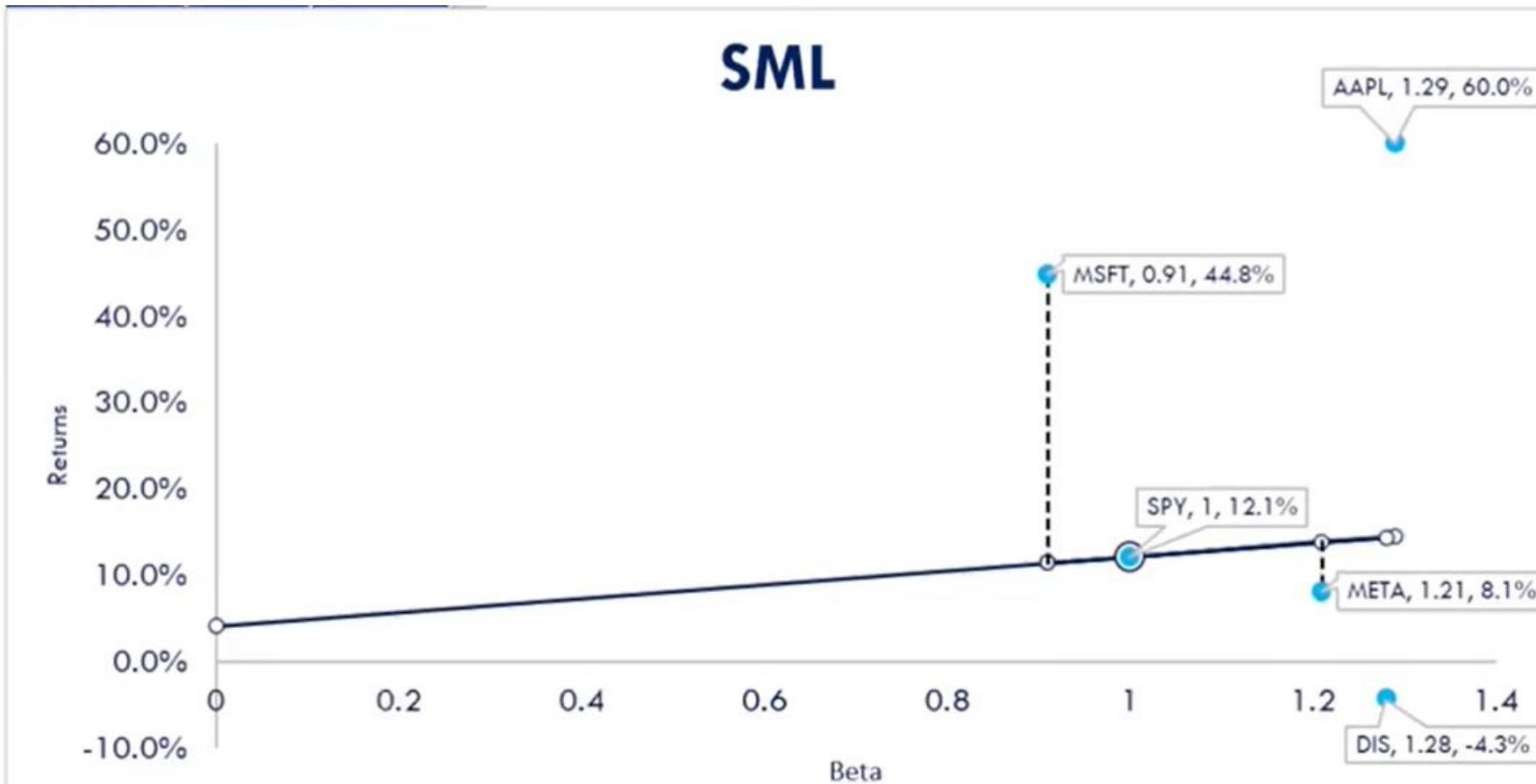
Equity	Ticker	Currency	Mkt rif.	Beta (5Y)	Type	Risk Free	Rf rate	Annualized figures			
								Market E[r]	Fair Ret.	Act. Ret	Alpha
Apple	AAPL	USD	S&P500	1.29	Aggressivo	T-Bond	4.1%	12.1%	14.5%	60.0%	45.5%
Microsoft	MSFT	USD	S&P500	0.91	Difensivo	T-Bond	4.1%	12.1%	11.4%	44.8%	33.4%
SPDR	SPY	USD	S&P500	1	Neutrale	T-Bond	4.1%	12.1%	12.1%	12.1%	0.0%
Meta	META	USD	S&P500	1.21	Aggressivo	T-Bond	4.1%	12.1%	13.8%	8.1%	-5.7%
Disney	DIS	USD	S&P500	1.28	Aggressivo	T-Bond	4.1%	12.1%	14.4%	-4.3%	-18.6%

- Il rendimento effettivo storico è diverso dal fair return predetto dalla SML.
- La differenza tra i due rendimenti è chiamata **Alpha di Jensen**.
- Interpretazione: capacità di sotto- o sovrapreformare rispetto al rendimento ipotetico previsto dal modello.

## Esempio con CAPM, SML e alpha



## Esempio con CAPM, SML e alpha





## Esempio con CAPM, SML e alpha

- Aggiungendo l'alpha di Jensen al modello possiamo migliorare la capacità di «stock picking».
- Il modello CAPM si aspetta un rendimento simile per titoli con beta simile.
- A parità di beta (e quindi a parità di rischio) l'alpha ci permette di preferire le azioni con un rendimento più elevato

## Dal CAPM all'APT

I postulati del CAPM sono stati messi in discussione da numerose evidenze empiriche emerse negli anni successivi alla sua formulazione. A partire dalle limitazioni/critiche del CAPM, viene sviluppata la **Arbitrage Pricing Theory**.

Assunzioni:

- I mercati sono perfettamente competitivi.
- Gli investitori preferiscono sempre più ricchezza a meno ricchezza, con certezza.
- Il processo stocastico che genera i rendimenti degli asset può essere espresso come una funzione lineare di K fattori.

APT non assume:

- L'esistenza di un portfolio di mercato che contiene tutti gli asset rischiosi e che è efficiente in termini di media-varianza.
- Rendimenti distribuiti come una normale.
- Funzione di utilità quadratica.

APT comporta meno assunzioni ed è più generale (consente un maggior numero di fattori) nello spiegare la relazione tra rischio e rendimenti attesi.

## Arbitrage Pricing Theory

### Legge del prezzo unico:

- Principio fondamentale che afferma che due attività con le stesse caratteristiche di rischio non possono avere rendimenti diversi.
- Se ciò accadesse, si creerebbe un'opportunità di arbitraggio ovvero la possibilità di ottenere un profitto certo senza investire capitale e senza assumere rischi.
- Come?

### Implicazioni del modello ATP:

- Se un'attività fosse mal prezzata rispetto ai fattori di rischio sistematico che influenzano i mercati, sarebbe possibile realizzare un portafoglio privo di rischio sistematico e con investimento nullo, ottenendo così un profitto certo.
- L'APT non impone un modello di comportamento agli investitori, ma assume che i rendimenti dei titoli siano guidati da una serie di fattori di rischio comuni.
- Modello che esprime il rendimento di un titolo o di un portafoglio di titoli **in funzione di una serie di fattori macroeconomici o stilistici**, tra i quali possiamo trovare l'inflazione, il PIL, la pendenza della curva dei tassi di interesse, il prezzo del petrolio e così via.

## Multifactor Models

Abbiamo già menzionato diversi fattori che ci aspettiamo abbiano un impatto su tutti gli asset:

- Inflazione
- Crescita del PIL
- Variazione dei tassi di interesse
- Stabilità politica

In contrasto con il CAPM, nel quale l'unico fattore di rischio è il beta, nell'APT abbiamo:

- Un parametro che determina come ogni asset reagisce ad un fattore comune.
- Ogni asset potrebbe reagire diversamente rispetto agli altri asset (es: titoli ciclici rispondono positivamente alla crescita del PIL, mentre anti-ciclici rispondono negativamente).
- Come nel CAPM, gli effetti individuali sono indipendenti e vengono diversificati all'aumentare del numero di titoli nel portfolio.

## Multifactor Models

**IMPORTANTE:** il modello non specifica quali fattori debbano essere presi in considerazione → fattori di rischio sono considerati **esogeni**.

Il prezzo di ogni asset dipende linearmente dall'esposizione (beta) ai vari fattori di rischio.

$$E(R_i) = R_f + \beta_i^{F1}(E(R_{F1}) - R_f) + \beta_i^{F2}(E(R_{F2}) - R_f) + \dots + \beta_i^{Fn}(E(R_{Fn}) - R_f)$$

Dove i vari  $\beta_i^{F1}, \beta_i^{F2}, \dots, \beta_i^{Fn}$  sono i beta dei fattori di rischio e possono essere interpretati come misure di sensibilità, analogamente al beta nel CAPM.

Il beta di un fattore misura quanto il rendimento di un titolo è influenzato da una specifica fonte di rischio sistematico.

**VANTAGGIO:** non richiede che il portafoglio di mercato sia efficiente, la relazione tra rendimento atteso e rischio sistematico deriva da una **condizione di non arbitraggio**, e non da una condizione di equilibrio generale del mercato.

## ATP a 2 fattori

Per semplicità, assumiamo che ci siano solo 2 fattori di rischio; in questo caso la formula si riduce a:

$$E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}$$

Dove:

- $\lambda_0$  è il tasso di rendimento di un asset con rischio sistematico nullo (risk-free)  $\rightarrow 4\%$
- $\lambda_1$  rappresenta le variazioni inattese dell'inflazione  $\rightarrow$  risk premium relativo a questo fattore è del 2% per ogni aumento dell'1% nell'inflazione.
- $\lambda_2$  rappresenta la crescita del PIL reale  $\rightarrow$  risk premium è del 3% per ogni aumento dell'1% del PIL reale.

Assumiamo solo 2 asset X e Y:

- $b_{X1} = 0.5 \rightarrow$  risposta dell'asset X alle variazioni nell'inflazione
- $b_{Y1} = 2 \rightarrow$  risposta dell'asset Y alle variazioni nell'inflazione
- $b_{X2} = 1.5 \rightarrow$  risposta dell'asset X alle variazioni nel PIL
- $b_{Y2} = 1.75 \rightarrow$  risposta dell'asset Y alle variazioni nel PIL

## ATP a 2 fattori

$$E(R_i) = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \lambda_2 b_{i2}$$

$$= 0,04 + (0,02)b_{i1} + (0,03)b_{i2}$$

$$E(R_X) = 0,04 + (0,02)0,5 + (0,03)1,5 = 0,095 = 9,5\%$$

$$E(R_Y) = 0,04 + (0,02)2 + (0,03)1,75 = 0,1325 = 13,25\%$$

Se i prezzi dei due asset non riflettono questi rendimenti attesi, ci si aspetta che gli investitori ricorrono ad arbitraggi, vendendo allo scoperto gli asset sopravvalutati e utilizzando i proventi per acquistare quelli sottovalutati, finché i prezzi non saranno corretti.

## ATP a 2 fattori

Consideriamo un esempio con 2 fattori di rischio: variazioni inattese del livello di inflazione e variazioni inattese della crescita del PIL reale.

Supponiamo di osservare tre asset o portafogli diversificati (A, B e C) con i seguenti rendimenti attesi e beta rispetto ai due fattori.

Inoltre, per semplicità assumiamo che il tasso risk-free sia pari a 0 e che l'extra rendimento rispetto al fattore 1 sia pari al 4% e per il fattore 2 pari al 5%.

Stocks/Portfolio	Rendimento atteso	Beta del fattore 1	Beta del fattore 2
A	7,7%	0,8	0,9
B	5,7%	-0,2	1,3
C	9,7%	1,8	0,5

$$E(R_A) = 0 + (0,8 * 4) + (0,9 * 5)$$

Supponendo che i 3 asset abbiano lo stesso prezzo di \$35 e che non pagheranno dividendi possiamo calcolare il prezzo atteso tra un anno:

- $E(P_A) = 35(1 + 7,7\%) = 37,70$
- $E(P_B) = 35(1 + 5,7\%) = 37,00$
- $E(P_C) = 35(1 + 9,7\%) = 38,40$

Se le nostre previsioni sul prezzo dei 3 asset tra un anno fossero A=37,20 – B=37,80 – C=38,50 avremmo delle stime diverse rispetto al prezzo atteso calcolato con il modello ATP.

Questo vuol dire che il titolo A non raggiungerà in un periodo un livello di prezzo coerente con le aspettative di rendimento degli investitori ( $37,20 < 37,70$ ). Al prezzo attuale (35), dato il rendimento atteso dagli investitori (7,7%) e la previsione del prezzo del titolo A alla fine del periodo (37,20), il titolo A risulta sopravalutato, il titolo B è sottovalutato, il titolo C è leggermente sottovalutato.



Cosa possiamo fare se pendo che l'asset A è sopravvalutato mentre gli asset B e C sottovalutati?

Costruiamo un portfolio che è composto da due posizioni short dell'asset A per ogni posizione lunga sugli asset B e C:

- $w_A = -1$
- $w_B = +0,5$
- $w_C = +0,5$

**Net Initial Investment:**

Short 2 shares of A:	+70
Purchase 1 share of B:	-35
Purchase 1 share of C:	<u>-35</u>
Net investment:	0

**Net Exposure to Risk Factors:**

	Factor 1	Factor 2
Weighted exposure from Stock A:	(-1.0)(0.8)	(-1.0)(0.9)
Weighted exposure from Stock B:	(0.5)(-0.2)	(0.5)(1.3)
Weighted exposure from Stock C:	<u>(0.5)(1.8)</u>	<u>(0.5)(0.5)</u>
Net risk exposure	0	0

Net Profit:  $[2(35)-2(37.20)]+[37.80-35]+[38.50-35] = \$1.90$



Gli arbitraggi continueranno a eseguire questa operazione fino a quando i prezzi non torneranno ad allinearsi con il rendimento atteso.

Il prezzo dell'asset A scenderà mentre i prezzi degli asset B e C saliranno fino a quando non sarà più possibile sfruttare l'arbitraggio.

$$P_A = \$37.70 / 1.077 = \$34.54$$

$$P_B = \$37.00 / 1.057 = \$35.76$$

$$P_C = \$38.40 / 1.097 = \$35.10$$

## Modelli multifattoriali nella pratica

Nei modelli multifattoriali, l'investitore sceglie il numero e la tipologia di fattori di rischio.

### **Macroeconomic-based risk factor models:**

Chen, Roll and Ross (1986)

### **Microeconomic-based risk factor models:**

Fama and French (1992), Carhart (1997)

### **Extensions of Characteristic-Based Risk Factor Models:**

BARRA Characteristic-based risk factors

## Modelli multifattoriali nella pratica

### Macroeconomic-based risk factor models:

Assumiamo che i rendimenti degli asset dovrebbero riflettere lo stato dell'economia nel medio-lungo periodo.

Quindi, gli indicatori macroeconomici sono il punto di partenza per determinare i rendimenti dei fattori di rischio.

- Crescita della produzione industriale (business cycle risk factor)
- Default premium ( confidence risk factor)
- Struttura a termine dei tassi (time horizon risk factor)
- Dinamiche di inflazione (inflation risk factor)

$$R_{it} = a_i + [b_{i1}R_{mt} + b_{i2}MP_t + b_{i3}DEI_t + b_{i4}UI_t + b_{i5}UPR_t + b_{i6}UTS_t] + e_{it}$$

Rm= the return on a value weighted index of NYSE-listed stocks

MP=the monthly growth rate in US industrial production

DEI=the change in inflation, measured by the US consumer price index

UI=the difference between actual and expected levels of inflation

UPR=the unanticipated change in the bond credit spread

UTS= the unanticipated term structure shift (long term less short term RFR)

## Modelli multifattoriali nella pratica

### Microeconomic-based risk factor models:

Fama e French specificano il rischio in termini microeconomici utilizzando determinate caratteristiche degli asset. Partendo dal rendimento atteso di mercato definito dal CAPM, aggiungono due fattori di rischio: **Value** e **Size**.

**Fattore Value:** Le azioni value (società con un alto rapporto valore book-to-market) tendono a sovrapreformare le azioni growth (società con un basso rapporto book-to-market), e le azioni value risultano sottovalutate rispetto a quelle growth.

**Fattore Size:** Le azioni a bassa capitalizzazione tendono a sovrapreformare quelle a grande capitalizzazione e sono intrinsecamente più rischiose rispetto alle large-cap.

$$(R_{it} - RFR_t) = a_i + b_{i1}(R_{mt} - RFR_t) + b_{i2}SMB_t + b_{i3}HML_t + e_{it}$$

## Modelli multifattoriali nella pratica

### Microeconomic-based risk factor models:

Fama e French sostengono che, nel lungo periodo, i rendimenti sono più elevati per le società di piccole dimensioni rispetto a quelle di grandi dimensioni, così come più elevati per le società value (con un alto rapporto valore contabile/prezzo di mercato) rispetto alle società growth (con un basso rapporto valore contabile/prezzo di mercato).

Combinando i fattori value e size con il fattore di mercato, è possibile spiegare circa il 90% del rendimento di un portafoglio azionario adeguatamente diversificato rispetto al mercato nel suo complesso.

Pertanto, il modello a tre fattori di Fama e French (FFTFM) fornisce teoricamente un approccio più accurato alla stima del tasso di sconto di una società quotata, poiché incorpora due fattori di rischio aggiuntivi rispetto al CAPM, che considera come fattore di rischio unicamente il beta.

## Modelli multifattoriali nella pratica

Carhart (1997) estende il modello a tre fattori di Fama-French includendo un quarto fattore di rischio comune, che tiene conto della tendenza delle società con rendimenti passati positivi a generare rendimenti futuri positivi: **Fattore Momentum**.

$$(R_{it} - RFR_t) = a_i + b_{i1}(R_{mt} - RFR_t) + b_{i2}SMB_t + b_{i3}HML_t + b_{i4}PR1YR_t + e_{it}$$

## Portafogli di investimento

Portafoglio	Composizione tipica	Obiettivo	Rischio (volatilità stimata)	Rendimento atteso (storico)
<b>Golden Butterfly</b>	40% azioni large cap USA, 20% azioni small cap USA, 20% obbligazioni long term, 10% obbligazioni short term, 10% oro	Stabilità + crescita moderata	Medio	6–7% annuo
<b>All-Weather (Dalio)</b>	30% azioni USA, 40% obbligazioni long term, 15% obbligazioni medium term, 7.5% oro, 7.5% materie prime	Protezione in ogni scenario economico	Medio-basso	5–6% annuo
<b>60/40</b>	60% azioni, 40% obbligazioni	Equilibrio rischio/rendimento classico	Medio	6–7% annuo
<b>Permanent Portfolio (Browne)</b>	25% azioni, 25% obbligazioni long term, 25% oro, 25% liquidità	Protezione assoluta del capitale	Basso	4–5% annuo
<b>Coffeehouse</b>	25% azioni USA large cap, 25% azioni USA small cap, 25% azioni internazionali, 25% obbligazioni USA	Diversificazione globale semplice	Medio	6–7% annuo
<b>Ivy Portfolio</b>	Mix di azioni, obbligazioni, immobili, materie prime, hedge fund (o ETF equivalenti)	Massimizzare rendimento con rischio diversificato	Medio-alto	7–8% annuo

## Portafogli di investimento

