

Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Sia $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Sia $c \in [a,b]$, consideriamo la funzione integrale

$$F_c(x) = \int_c^x f(t) dt \quad x \in [a,b]$$

Se $x_0 \in [a,b]$ è t.c. f sia continua in x_0 , allora F_c è derivabile in x_0 , e si ha

$$F_c'(x_0) = f(x_0)$$

In particolare se f è continua in tutto $[a,b]$

F_c è derivabile in $[a,b]$, e si ha

$$F_c'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

Dim con l'ipotesi aggiuntiva che f sia continua non solo in x_0 , ma anche in un intorno di x_0 .

$$(F_c)'_{+}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^{+}} \frac{F_c(x) - F_c(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0^{+}} \frac{1}{x - x_0} \left[\underbrace{\int_c^x f(t) dt}_{\int_c^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^x f(t) dt} - \int_c^{x_0} f(t) dt \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0^{+}} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt =$$

← valor medio di f in $[x_0, x]$ ←
e se x è vicino a x_0 , f è continua qui

$$\Rightarrow \exists c(x) \in [x_0, x] \quad \text{t.c.} \quad f(c) = \frac{1}{x-x_0} \int_{x_0}^x f(t) dt$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(\underbrace{c(x)}_{x_0}) = f(x_0)$$

$$\text{se } x \rightarrow x_0^+, \quad x_0 \leq c(x) \leq x$$

$$c(x) \rightarrow x_0$$

In maniera quasi identica si trova che

$$(F_c)'_-(x_0) = f(x_0) \quad .$$

□

DEF Sia $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un intervallo I .
Una funzione $G: I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice **primitiva** di f
in I se $G'(x) = f(x) \quad \forall x \in I$

Esempio: Una primitiva di x^2 in $\mathbb{R}$ è $\frac{x^3}{3}$.

Un'altra primitiva di x^2 in $\mathbb{R}$ è $\frac{x^3}{3} - 6$

OSS Se $G(x)$ è una primitiva di f in I ,
anche $G(x) + c$ lo è. Ce ne sono altre? NO!

PROPOSIZIONE Se $G(x)$ e $F(x)$ sono primitive di $f(x)$
in I intervallo. Allora

$$G(x) - F(x) \equiv \text{costante in } I.$$

Dim $(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$
 $\forall x \in I$.

$\Rightarrow G(x) - F(x)$ è costante in I $\square$

Il Teorema fondamentale del calcolo integrale dice che:
 una funzione continua in I intervallo ammette
 sempre una primitiva:

$$F_c(x) = \int_c^x f(t) dt$$

$\mathbb{R}$, alla luce della prop. precedente,

Se f è continua in I , tutte le sue primitive
 sono della forma

$$F_c(x) + c_1 = \int_c^x f(t) dt + c_1 \quad (c_1 \in \mathbb{R})$$

Per questo motivo, l'insieme delle primitive di $f(x)$
 si indica con

$$\int f(x) dx$$

← integrale indefinito di f .

$$\int f(x) dx = \{ \text{primitive di } f \} = \left\{ G(x) : G'(x) \equiv f(x) \text{ in } I \right\}$$

$$\int \sin x dx = \{ -\cos x + c, c \in \mathbb{R} \}$$

$$\int \left(3x^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \{ x^3 - \log x + c \} \quad \text{in } (0, +\infty)$$

Abbiamo due simboli di integrale, con significati diversi

$$\int_a^b f(x) dx$$

Integrale "definito", o integrale di Riemann

è un numero, ed è un concetto di calcolo integrale (partizioni, somme superiori e inferiori, etc...)

$$\int f(x) dx$$

integrale indefinito è un concetto di calcolo differenziale, e denota l'insieme delle primitive di f .

Il 1° teorema fond. del calcolo integrale dice che,
se f è continua in I

$$\int f(x) dx = \left\{ \int_{c_1}^x f(t) dt + c, \quad c \in \mathbb{R} \right\}$$

Secondo teorema fondamentale del Calcolo Integrale.

Sia f continua in $[a, b]$. Sia $G(x)$ una primitiva di f . Allora

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = G(x) \Big|_a^b$$

Esempio

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$$

$$\int_0^1 e^x dx = e^1 - e^0 = e - 1$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \log x \Big|_1^2 = \log 2 - \cancel{\log 1} = \log 2.$$

Dim 2° thm $G(x)$ è una primitiva di $f(x)$ in $[a,b]$.

Conosco un'altra primitiva: $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ (1° teor. fond.)

$$\text{Prop} \Rightarrow G(x) \equiv F_a(x) + c$$

$$G(b) - G(a) = (F_a(b) + \cancel{c}) - (F_a(a) + \cancel{c}) =$$
$$= \int_a^b f(t) dt - \int_a^a \cancel{f(t) dt} = \int_a^b f(t) dt$$

" 0

$$\int_a^b f(x) dx \quad \square$$

Il calcolo di un integrale di Riemann è quindi ricondotto alla ricerca di primitive della funzione integranda.

In termini di integrali definiti/indefiniti, il 2° thm fond. dice:

$$\int_a^b f(x) dx = \left(\int f(x) dx \right) \Big|_a^b$$

Costruiamo una tabella delle primitive a partire da una tabella di derivate.

$f(x)$	$\int f(x) dx$	$(c \in \mathbb{R})$
c_1 (costante)	$c_1 x + c$	$(c \in \mathbb{R})$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$	$\forall \alpha \neq -1$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x^{3/2} + c$	$\ln [0, +\infty)$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$\left(\begin{array}{l} \ln (0, +\infty) \\ e \ln (-\infty, 0) \end{array} \right)$
$x^{3/5}$	$\frac{5}{8} x^{8/5} + c$	$(\ln \mathbb{R})$
$\frac{1}{x^4}$	$-\frac{1}{3x^3} + c$	$\ln (0, +\infty)$ $e \ln (-\infty, 0)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$\ln (0, +\infty)$
$\frac{1}{x}$	$\left. \begin{array}{l} \log(x) \text{ in } (0, +\infty) \\ \log(-x) \text{ in } (-\infty, 0) \end{array} \right\} \log x + c$	

$$\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x} = \log|x| \Big|_{-3}^{-2} = \log 2 - \log 3 = \log \frac{2}{3}$$

$$e^x$$

$$a^x$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh x$$

$$\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$e^x + c$$

$$\frac{a^x}{\log a} + c$$

$$\operatorname{tg} x + c \quad \text{in } \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$$

$$-\cotg x + c = -\frac{\cos x}{\sin x} + c$$

$$\text{in } (k\pi, (k+1)\pi)$$

$$\arcsin x + c = -\arccos x + c_1$$

$$\text{in } (-1, 1)$$

$$\cosh x + c = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + c \quad \text{in } \mathbb{R}$$

$$\sinh x + c \quad \text{in } \mathbb{R}$$

$$\operatorname{arctg} x + c \quad \text{in } \mathbb{R}$$

$$\operatorname{settsinh} x + c = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

$$\text{in } \mathbb{R}.$$

$$\operatorname{settcosh} x + c = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + c$$

$$\text{in } (1, +\infty)$$

$$-\operatorname{settcosh} |x| + c = -\log(-x + \sqrt{x^2-1}) \quad \text{in } (-\infty, -1)$$

$$|x|$$

$$\left| \frac{x|x|}{2} + c \right.$$

in $\mathbb{R}$.

$$\int_1^2 \left[(x-1)^3 + \sin x + \frac{3}{x} \right] dx =$$

$$= \left(\frac{(x-1)^4}{4} - \cos x + 3 \log x \right) \Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{4} - \cos 2 + \cos 1 + 3 \log 2 - \cancel{3 \log 1}$$

$$\int_0^1 \cos(5x-1) dx = \frac{\sin(5x-1)}{5} \Big|_0^1 = \frac{1}{5} (\sin 4 + \sin 1)$$

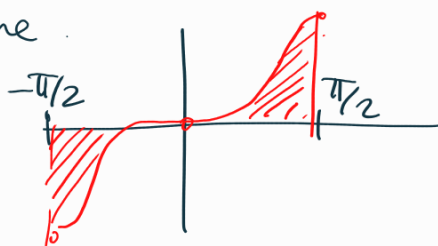
$$\int_0^\pi \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos(2x)) dx = \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\sin(2x)}{2} \Big|_0^\pi \right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}; \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos(2x)) dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^5 x dx = 0$$

perché l'integranda è dispari
e l'intervallo è simmetrico risp.
all'origine.



$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad \text{se } f \text{ è dispari.}$$

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad \text{se } f \text{ è pari}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 x \, dx &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos^3 x \, dx = \\ &\quad \text{f pari} \quad \cos x \cdot \cos^2 x = \cos x (1 - \sin^2 x) \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} \cos x (1 - \sin^2 x) \, dx = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos x - \cos x \sin^2 x) \, dx = \\ &= 2 \left(\sin x \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin^3 x}{3} \Big|_0^{\pi/2} \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Integrazione per parti

Si basa sulla formula di derivata del prodotto.

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (*)$$

Supponiamo ora $f, g \in C^1([a, b])$ (derivabili in $[a, b]$ con derivate continue in $[a, b]$)

$\Rightarrow (*)$ vale $\forall x \in [a, b]$

Integriamo l'uguaglianza $(*)$ in $[a, b]$

$$\int_a^b (f(x)g(x))' \, dx = \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{f'(x)g(x) \Big|_a^b}$

$$\int_a^b f'(x) g(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x) dx$$

Formula di integrazione per parti per integrali definiti
(conviene se l'ultimo integrale è più facile del primo).

Esempio:

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x dx =$$

$$\left[\begin{array}{l} f'(x) = e^x \Rightarrow f(x) = e^x (+c) \\ g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1 \end{array} \right]$$

$$= e - e^x \Big|_0^1 = \cancel{e} - (\cancel{e} - 1) = 1$$

OSS se avessi scambiato i ruoli delle funzioni,
non sarebbe convenuto.

$$f'(x) = x \Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = e^x \Rightarrow g'(x) = e^x$$

$$\int_0^1 x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} e^x dx$$

↑ più complicato
di quello di partenza

Si dimostra in modo simile la formula di integraz. per
parti per integrali indefiniti

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$
$$\forall f, g \in C^1(I)$$

Integrazione per parti per integrali indefiniti.