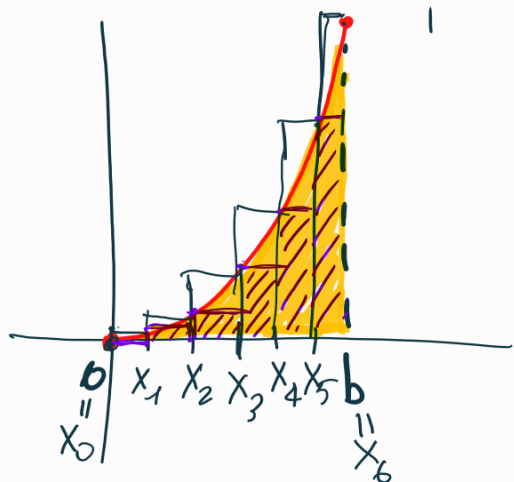


Stiamo calcolando $\int_a^b x^2 dx$

Preso la partizione equispaziata $P_n = \{x_k = \frac{kb}{n}, k=0, 1, \dots, n\}$



abbiamo calcolato

$$S(P_n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \frac{b^3}{n^3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{b^3}{3}$$

Ora calcoliamo $s(P_n) = \sum_{k=1}^n m_k \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\frac{b}{n}} =$

$\inf_{[x_{k-1}, x_k]} x^2$
 $\parallel$
 $x_{k-1}^2 = \left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^2$

$$= \sum_{k=1}^n (k-1)^2 \frac{b^2}{n^2} \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^n (k-1)^2 =$$

$\parallel$
 $0 + 1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2$

$$\left[\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \parallel \quad \sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right]$$

$$= \frac{b^3}{n^{\cancel{3}2}} \frac{(n-1)\cancel{n}(2n-1)}{6} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{b^3}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 \text{ \u00e8 integrabile in } [0, b] \text{ e } \int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}$$

Esercizio per casa:

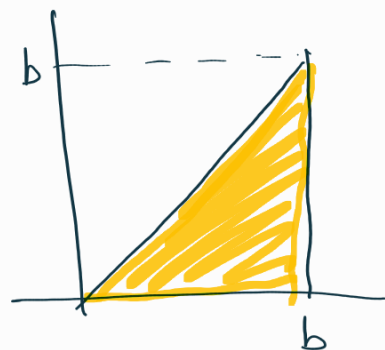
• mostrare che

$$\int_0^b x^3 dx = \frac{b^4}{4}$$

(usare che $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$)

• mostrare che

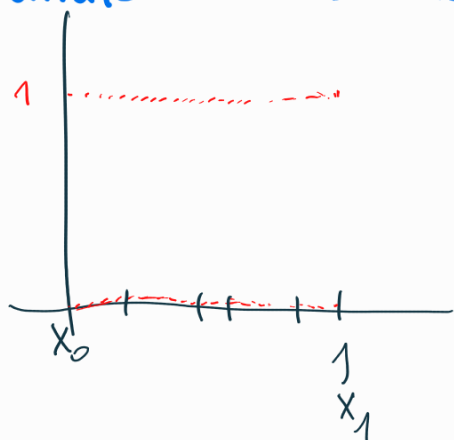
$$\int_0^b x dx = \frac{b^2}{2}$$



N.B. Non tutte le funzioni limitate sono integrabili.

La funzione di Dirichlet
è limitata ma non integrabile

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



Se fissiamo una partizione $P = \{x_k, k=0,1,n\}$

$$S(P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) = 1$$

$$s(P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) = 0$$

$\sup_P s(P) = 0 < \inf_P S(P) = 1$. Quindi
non è integrabile in $[0,1]$

Classi di funzioni integrabili

TEOREMA Se f è monotona in $[a,b]$,

allora è integrabile in $[a,b]$.

Diremo $f \in \mathcal{R}(a,b)$

(oss. f monotona in $[a,b] \Rightarrow f$ limitata in $[a,b]$)

DIM. Supponiamo per es. f crescente.

Fisso n e considero $P_n = \{x_k = a + k \frac{b-a}{n}, k=0,1,\dots,n\}$

$$S(P_n) = \sum_{k=1}^n M_k \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\frac{b-a}{n}} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

$\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x)$
"
 $f(x_k)$

$$s(P_n) = \sum_{k=1}^n m_k \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\frac{b-a}{n}} = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})$$

$\inf_{[x_{k-1}, x_k]} f$
"
 $f(x_{k-1})$

$$S(P_n) - s(P_n) = \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^n f(x_k) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) \right) =$$

$\cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_2)} + \dots + \cancel{f(x_{n-1})} + f(x_n) -$
 $\cancel{f(x_0)} - \cancel{f(x_1)} - \cancel{f(x_2)} - \dots - \cancel{f(x_{n-1})}$
"
 $f(x_n) - f(x_0) = f(b) - f(a)$

$$= \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

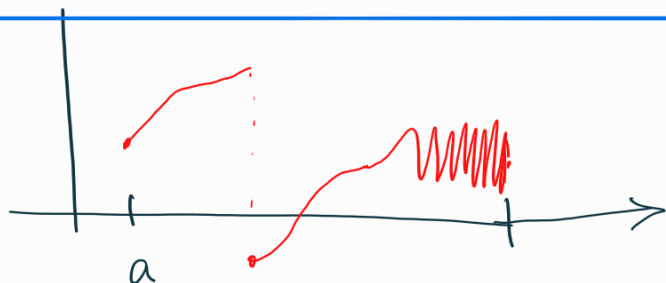
$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S(P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(P_n) \Rightarrow f \text{ integrabile in } [a, b].$$

□

TEOREMA Se f è continua in $[a,b]$, allora $f \in \mathcal{R}(a,b)$
 f integrabile in $[a,b]$

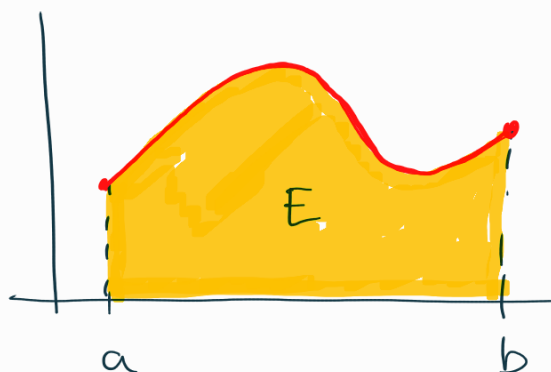
OSS Per Weierstrass, f è limitata in $[a,b]$.

TEOREMA Se f è limitata in $[a,b]$ e continua eccetto in un numero finito di punti, allora $f \in \mathcal{R}(a,b)$.



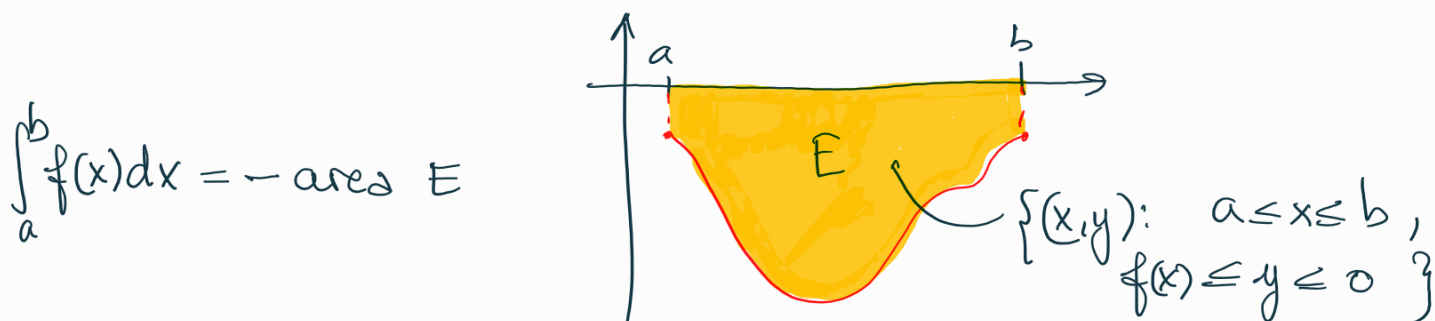
Interpretazione geometrica dell'integrale

1) Se $f \geq 0$



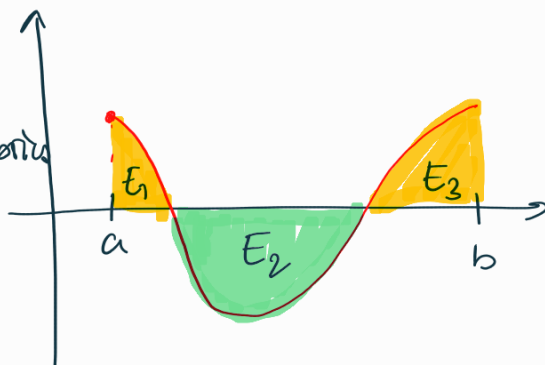
$$\int_a^b f(x) dx = \text{area } E = \text{area} \{(x,y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\} \\ = \text{area (sottografico di } f).$$

2) Se $f \leq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq 0$ (perché gli M_k e gli m_k sono ≤ 0)



$$\int_a^b f(x) dx = -\text{area } E$$

3) Se f cambia segno, si fa una somma algebrica dei contributi dove $f \geq 0$ e dove $f \leq 0$.



$$\int_a^b f(x) dx = \text{area}(E_1) + \text{area}(E_3) - \text{area}(E_2)$$

Proprietà degli integrali

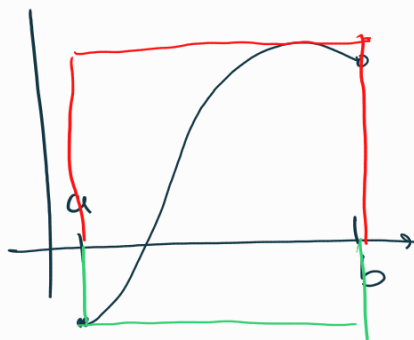
Siano $f, g \in \mathcal{R}(a, b)$ (cioè, f, g integrabili in $[a, b]$)

$$1) (b-a) \inf_{x \in [a, b]} f(x) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \sup_{x \in [a, b]} f(x)$$

Infatti

$$\int_a^b f(x) dx = \inf_P S(P) \leq S(P_1) = (b-a) \sup_{[a, b]} f$$

dove $P_1 = \{x_0 = a, x_1 = b\}$



2) Integrale delle costanti. Se $f(x) \equiv c$ in $[a, b]$

$$\Rightarrow \int_a^b c dx = (b-a)c$$

(segue dalla 1)

3) Linearità dell'integrale.

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow \alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile in $[a, b]$, e si ha

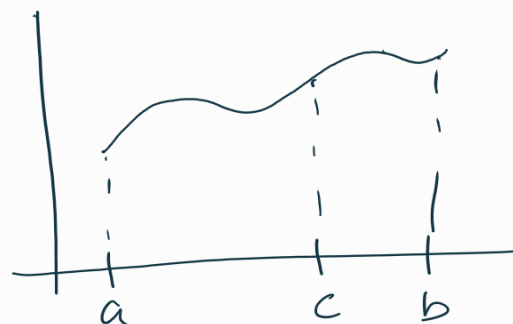
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

4) Se $f \in R(a,b)$, e $[c,d] \subseteq [a,b]$, allora $f \in R(c,d)$

5) Additività rispetto all'intervallo.

Se $f \in R(a,b)$, e $c \in (a,b)$, allora.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$



OSS E' possibile definire $\int_a^b f(x) dx$ anche se $b \leq a$.

Se $b < a$, definiamo $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

$$\int_2^0 x^2 dx = - \int_0^2 x^2 dx = - \frac{2^3}{3}$$

Se $b = a$, definiamo $\int_a^a f(x) dx = 0$.

Con queste definizioni, la formula

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

vale qualunque sia l'ordine dei punti a, b e c purché f sia integrabile nell'intervallo più grande.

Esempio

$$\int_2^5 x^3 dx = \underbrace{\int_2^0 x^3 dx}_{\substack{\text{"} \\ -\int_0^2 x^3 dx \\ \text{"} \\ -\frac{2^4}{4}}} + \underbrace{\int_0^5 x^3 dx}_{\frac{5^4}{4}} = \frac{1}{4}(5^4 - 2^4)$$

6) Monotonia dell'integrale

Se $f, g \in R(a, b)$ e $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$,
allora

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Dim Sia P una partiz. di $[a, b]$.

$$S(P_n; f) = \sum_{k=1}^n \underbrace{M_{k,f}}_{\substack{\sup f(x) \\ [x_{k-1}, x_k]}} (x_k - x_{k-1}); \quad S(P_n; g) = \sum_{k=1}^n M_{k,g} (x_k - x_{k-1})$$

poiché $f \leq g \Rightarrow M_{k,f} \leq M_{k,g} \quad \forall k \Rightarrow S(P_n; f) \leq S(P_n; g)$

$\int_a^b f$ $\nearrow +\infty$

$\int_a^b g$

$$\int_2^3 (x^3 - 2x^2 + 5x - 3) dx = \overset{\text{lineare}}{\int_2^3 x^3 dx - 2 \int_2^3 x^2 dx + 5 \int_2^3 x dx - \int_2^3 3 dx}$$

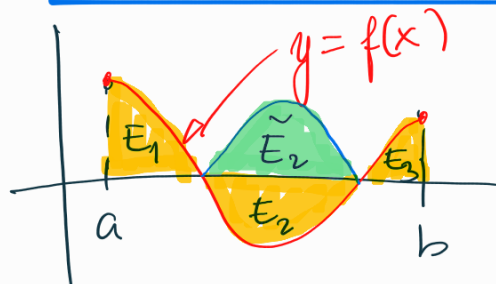
$$\underbrace{\int_2^0 x^3 dx + \int_0^3 x^3 dx}_{-\frac{2^4}{4} + \frac{3^4}{4}} + \underbrace{\frac{1}{3}(3^3 - 2^3)}_{\frac{1}{2}(3^2 - 2^2)} + \underbrace{\frac{5}{2}(3^2 - 2^2)}_{\frac{5}{2}(3^2 - 2^2)} - \underbrace{3(3 - 2)}_{3(3 - 2)}$$

$$= \frac{1}{4}(81 - 16)$$

7) Dis. triangolare per gli integrali.

Se $f \in R(a,b)$, anche $|f| \in R(a,b)$, e si ha

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$



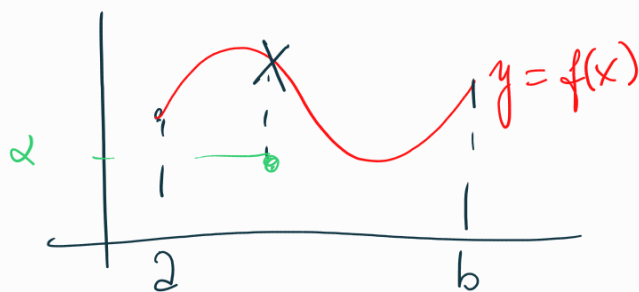
$$\int_a^b f(x) dx = \text{area } E_1 - \text{area } E_2 + \text{area } E_3$$

$$\int_a^b |f(x)| dx = \text{area } E_1 + \text{area } E_2 + \text{area } E_3$$

La dis. dice: $|\text{area } E_1 - \text{area } E_2 + \text{area } E_3| \leq \text{area } E_1 + \text{area } E_2 + \text{area } E_3$

8) Sia $f \in R(a,b)$, e sia g una funzione ottenuta modificando f in un solo punto (oppure: in un numero finito di punti)

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \alpha & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$



Allora $g \in R(a,b)$ e $\int_a^b g(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

OSS Si può definire senza ambiguità l'integrale di una funzione non definita in un punto.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$$

$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ non è definita in $x=0$ (ma è limitata in quanto

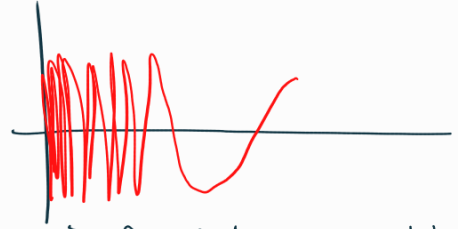
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{ha senso}$$

Indipendentemente da come si definisce per $x=0$

$$\int_0^1 \sin \frac{1}{x} dx \quad \text{ha senso}$$

perché, comunque la si definisca in $x=0$, è limitata e continua
eccetto in $x=0$

prolungabile con continuità
in $[0, 1]$
ponendo $f(0) = 1$.



9) Integrali di funzioni costanti a tratti

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0, 2) \\ -5 & \text{se } x \in [2, 3] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = \underbrace{\int_0^2 f(x) dx}_{\substack{2 \cdot 2 = 4}} + \underbrace{\int_2^3 f(x) dx}_{\substack{-5 \cdot (3-2) \\ -5}} = 4 - 5 = -1$$

