

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

Un polinomio $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 =$
$$= \sum_{k=0}^n a_k z^k,$$

dove $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $a_n \neq 0$, e la variabile $z \in \mathbb{C}$ ammette sempre una radice complessa, cioè un numero $z_1 \in \mathbb{C}$ t.c. $P_n(z_1) = 0$. (Quindi il polinomio è divisibile per $z - z_1$)

Ne segue che esistono n numeri complessi (anche tra loro coincidenti) $z_1, z_2, \dots, z_n$ t.c.

$$P_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

OSS. Il risultato è falso nei reali.

$P_2(x) = x^2 + 1$ non ha radici reali, ma ha radici complesse $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

Risolvere l'eq^{ue} $z^6 + 2z^3 + 2 = 0$

Poniamo $z^3 = W$, diventa un'eq^{ue} di 2° grado:

$$W^2 + 2W + 2 = 0$$

$$z^3 = W = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i.$$

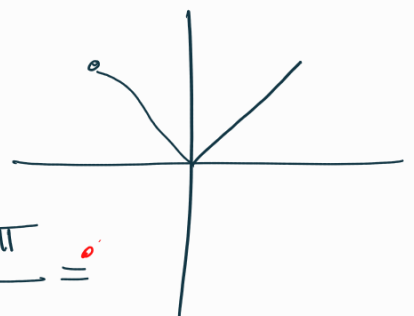
Sono le due radici complesse di -1

1) $z^3 = -1 + i = \sqrt{2} e^{i \frac{3\pi}{4}}$

$$z = z_k = \sqrt[6]{2} e^{i \theta_k}$$

$$\theta_k = \frac{\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}k\pi \quad k = 0, 1, 2$$

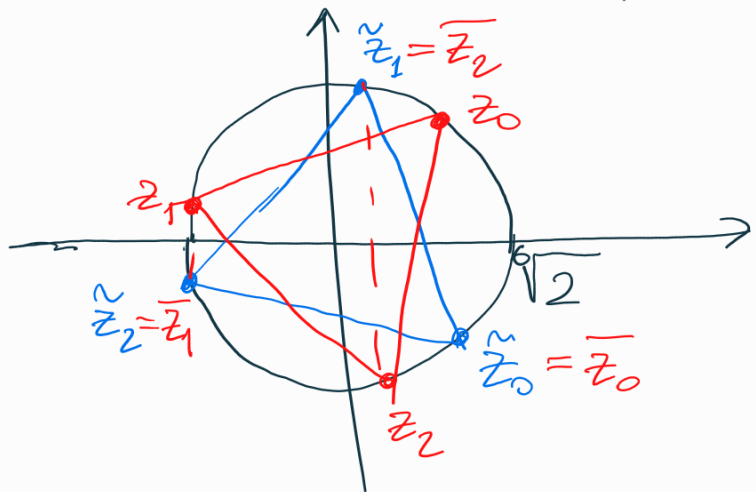


$$z_0 = \sqrt[6]{2} e^{i \frac{\pi}{4}} = \sqrt[6]{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (1 + i)$$

$2^{1/6}$ $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2^{-1/2}$

$$z_1 = \sqrt[6]{2} e^{i \frac{11\pi}{12}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right)$$

$$z_2 = \sqrt[6]{2} e^{i \frac{19\pi}{12}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) \right)$$



$$2) \quad z^3 = -1 - i = \sqrt{2} e^{-\frac{3}{4}\pi i}$$

$$\tilde{z}_k = \sqrt[6]{2} e^{i \tilde{\theta}_k} \quad \tilde{\theta}_k = \frac{-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \quad k=0,1,2$$

$$\tilde{z}_0 = \sqrt[6]{2} e^{-i \frac{\pi}{4}} = \sqrt[6]{2} \left(+\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} (1 - i)$$

$$\tilde{z}_1 = \sqrt[6]{2} e^{i \frac{5\pi}{12}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

$$\tilde{z}_2 = \sqrt[6]{2} e^{i \frac{13\pi}{12}} = \sqrt[6]{2} \left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{13\pi}{12}\right) \right)$$

CONSEGUENZE del Teorema Fondamentale dell'Algebra sui polinomi a coeff^{ti} reali.

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ dove} \\ a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Complessifico il problema: $P_n(z)$ ammette, nei complessi, n radici.

$$\Rightarrow P_n(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \\ \text{per il Teor. Fondam.}$$

Dimostriamo che, se i coeff^{ti} a_k sono reali,

$$\text{se } z_1 \text{ è uno zero di } P_n(z) \quad (P_n(z_1) = 0)$$

$$\text{allora anche } \bar{z}_1 \text{ è uno zero " } \quad (P_n(\bar{z}_1) = 0)$$

$$P_n(z_1) = 0 \quad \text{Passo ai coniugati}$$

$$0 = \bar{0} = \overline{P_n(z_1)} = \overline{(a_n z_1^n + a_{n-1} z_1^{n-1} + \dots + a_1 z_1 + a_0)} = \\ = \overline{a_n} \bar{z}_1^n + \overline{a_{n-1}} \bar{z}_1^{n-1} + \dots + \overline{a_1} \bar{z}_1 + \overline{a_0} = \\ \text{(gli } a_k \text{ sono reali } \Rightarrow \overline{a_k} = a_k)$$

$$= a_n \bar{z}_1^n + a_{n-1} \bar{z}_1^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z}_1 + a_0 =$$

$$= P_n(\bar{z}_1) \Rightarrow \bar{z}_1 \text{ è uno zero del polinomio}$$

$\Rightarrow$ le radici di un polinomio a coeff^{ti} reali sono $\begin{cases} \text{reali} \\ \text{a coppie} \\ \text{complesse} \\ \text{coniugate} \end{cases}$

• Infatti il polinomio visto prima $P_n(z) = z^6 + 2z^3 + 2$ ha 3 coppie di radici complesse coniugate

• OSS Un polinomio di grado dispari a coeff^{ti} reali ha sempre un numero dispari di zeri reali (eventualmente coincidenti)

Sia $z_1, \bar{z}_1$ una coppia di zeri coniugati tra loro di un polinomio a coeff^{ti} reali.

$$P_n(z) = a_n \underbrace{(z - z_1)(z - \bar{z}_1)}_{\text{polinomio a coeff. reali}} (z - z_3) \dots$$

$$z_1 = x_1 + iy_1 \quad x_1, y_1 \in \mathbb{R}$$

$$\bar{z}_1 = x_1 - iy_1$$

$$(z - z_1)(z - \bar{z}_1) = (\underbrace{(z - x_1)}_{\text{real}} - iy_1)(\underbrace{(z - x_1)}_{\text{real}} + iy_1) =$$

$$= (z - x_1)^2 - (iy_1)^2 = \underbrace{z^2 - 2x_1z + x_1^2 + y_1^2}_{\text{polinomio a coeff. reali}} =$$

$$z^2 + b_1z + b_2 \quad b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

Torniamo ai reali.

$$P_n(x) = a_n \underbrace{(x^2 + b_1x + b_2)}_{\substack{\text{irriducibile nei} \\ \text{reali}}} \underbrace{(x^2 + b_3x + b_4)}_{\text{irriduc.}} \dots (x^2 + b_{k+1}x + b_{k+2})$$

$$\dots (x - x_k) (x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)$$

Scomporre $P_4(x) = x^4 + 1$

1° modo: $(\text{quadrato}) \quad x^4 + 1 = (x^4 + 1 + 2x^2) - 2x^2 =$

$$= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = \underbrace{(x^2+1-\sqrt{2}x)}_{\text{irriducib}} \underbrace{(x^2+1+\sqrt{2}x)}_{\text{imid.}}$$

2° modo Cerco le radici
 $x^4+1=0 \Leftrightarrow x^4=-1$

cerco le radici quarte di $-1 = \pm e^{i\pi}$ nei complessi

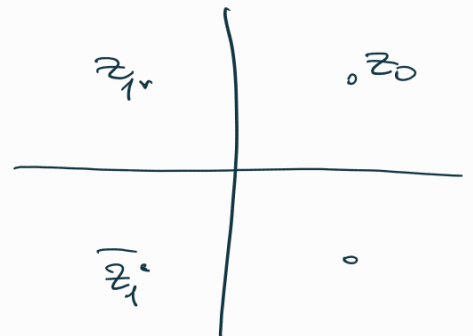
$$z_k = 1 \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)} \quad k=0,1,2,3$$

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1+i)$$

$$z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1+i)$$

$$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (-1-i) = \bar{z}_1$$

$$z_3 = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} (1-i) = \bar{z}_0$$



$$\begin{aligned} x^4+1 &= 1 (x-z_0)(x-\bar{z}_0)(x-z_1)(x-\bar{z}_1) \\ &= \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) \left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right) (x-z_1)(x-\bar{z}_1) \\ &= \left(\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \left(\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \left(\dots\right) \\ &= \left(\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2\right) \left(\dots\right) \left(\dots\right) \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}\right) \left(\dots\right) \left(\dots\right) \\ &= \left(x^2 - \sqrt{2}x + 1\right) \left(x^2 + \sqrt{2}x + 1\right) \end{aligned}$$

Esercizio: scomporre, usando i complessi,

$$P_6(x) = x^6 + 64$$

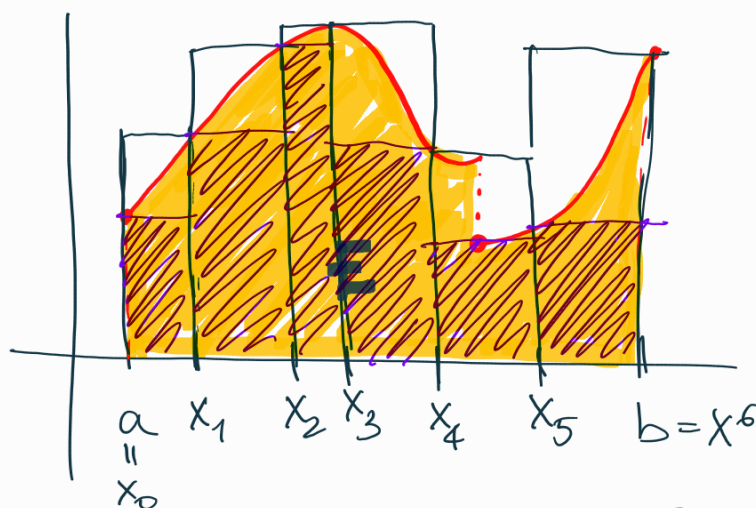
per casa.

Applicazioni future:

$$\int \frac{dx}{1+x^4} = \int \frac{dx}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \text{etc....}$$

Integrale di Riemann

Sia $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata (cioè $|f(x)| \leq M \forall x \in [a,b]$)
e (solo per semplicità) ≥ 0 .



Vorrei valutare l'area di $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Considero una partizione P di $[a,b]$.

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n : x_0 = a < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b\}$$

Relativamente alla partizione P , posso determinare una valutazione per eccesso dell'area di E .

$$S(P) = \sum_{k=1}^n M_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{dove } M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

Somma superiore relativa alla partiz. P .

$$s(P) = \sum_{k=1}^n m_k (x_k - x_{k-1}) \quad \text{dove } m_k = \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

Somma inferiore.

Ovviamente $s(P) \leq S(P)$

Si prova senza grande difficoltà che questa disug. vale anche per partizioni diverse tra loro:

$$s(P) \leq S(Q) \quad \forall P, Q \text{ partizioni di } [a, b]$$

1° modo di definire l'integrale

$$\left(\begin{array}{c} \text{somme inferiori} \\ s(Q) \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{somme superiori} \\ S(P) \end{array} \right) \rightarrow \mathbb{R}$$

OSS $\sup_{\substack{P \text{ partiz.} \\ \text{di } [a, b]}} s(P) \leq \inf_{P \text{ partiz.}} S(P)$

Se per caso $\sup_{P \text{ partiz.}} s(P) = \inf_{P \text{ partiz.}} S(P)$,

diremo che f è integrabile in $[a, b]$ secondo Riemann e potremo

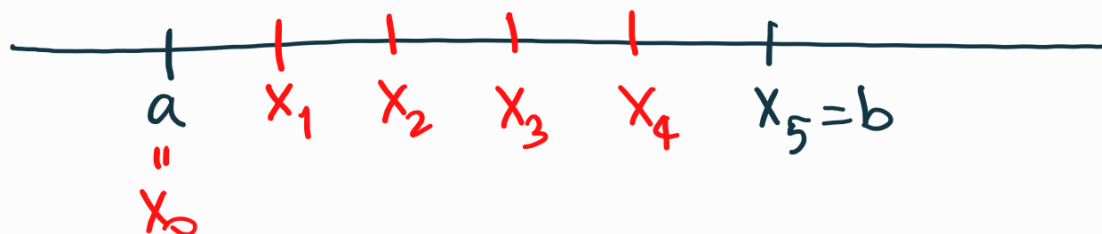
$$\int_a^b f(x) dx = \sup s(P) = \inf S(P)$$

integrale di f in $[a, b]$

Altro approccio (equivalente):

Considero le partizioni equispaziate di $[a, b]$

$$P_n = \left\{ x_k = a + k \frac{b-a}{n}, \quad k=0, 1, \dots, n \right\}$$



considero le somme superiori $S(P_n)$ e inferiori $s(P_n)$

Si dimostra che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(P_n) = \inf_{P \text{ part.}} S(P)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(P_n) = \sup_P s(P)$$

Diremo che f è integrabile in $[a, b]$ se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S(P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} s(P_n)$$

e il valore comune di questo limite sarà l'integrale di f in $[a, b]$.

DEF. Integrale di Riemann.

Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata.

Diremo che f è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se vale una delle due condizioni equivalenti:

$$\sup_P s(P) = \inf_P S(P) \quad (*)$$

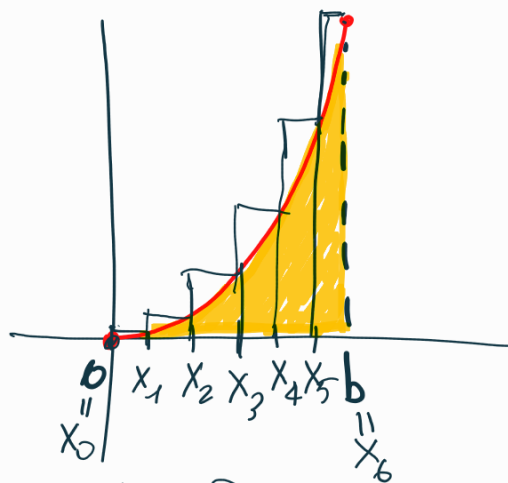
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s(P_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S(P_n) \quad (**)$$

dove le P_n sono le partizioni equispaziate di $[a, b]$.

In tal caso la quantità che compare in (*) e (**) si chiama integrale di f in $[a, b]$ e si indica con

$$\int_a^b f(x) dx$$

Verifichiamo che la funzione $f(x) = x^2$ è integrabile in $[0, b]$ $\forall b > 0$.



Prendo la partizione equispaziata P_n $\frac{b}{n}$

$$\text{Calcolo } S(P_n) = \sum_{k=1}^n M_k \overbrace{(x_k - x_{k-1})}^{\frac{b}{n}} =$$

$\sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x) = f(x_k) = x_k^2$

$$\text{dove } x_k = \frac{k}{n} b \quad k = 0, 1, \dots, n$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{k^2 b^2}{n^2} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^3}{n^3} \boxed{\sum_{k=1}^n k^2} =$$

$$\quad \quad \quad \parallel$$

$$\quad \quad \quad \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{b^3}{n^{\cancel{2}} \cancel{2}} \frac{\cancel{n} (n+1)(2n+1)}{6} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{b^3}{3}$$

... da completare.