L'ultima volta abbiamo definito i $\boxed{\text{coefficienti multinomiali}}$

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots k_h} = \frac{n!}{k_1!\, k_2! \dots k_h!}$$

dove $k_1, \dots k_h \in \mathbb{N}$ e $k_1 + k_2 + \dots + k_h = n$

Questi coeff^{ti} compariscono nello sviluppo della potenza di un polinomio.

I coeff^{ti} binomiali sono particolari coeff^{ti} multinomiali.

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$$

I coeff^{ti} multinomiali si interpretano come i modi possibili di distribuire n oggetti distinti in h cassetti, in modo che

- nel 1° cassetto ci siano k_1 elementi
- nel 2° " " " k_2 "
- ⋮
- nell'h-esimo cassetto " k_h "

$$\binom{50}{4, 31, 15} = \binom{50}{4}\cdot\binom{46}{31} = \frac{50!}{4!\,\cancel{46!}}\;\frac{\cancel{46!}}{31!\,15!} = \frac{50!}{4!\,31!\,15!}$$

Avevamo affrontato il problema di trovare gli anagrammi della parola MATEMATICA, che erano $\dfrac{10!}{3!\,2!\,2!}$

Questo risultato si può anche affrontare con i coeff^{ti} multinomiali

Abbiamo 10 lettere: ★★★★★ ★★★★★.

di queste 10 lettere, voglio trasformarne 3 in A, 1 in E

2 in T, 1 in C

2 in M, 1 in I

In quanti modi posso farlo?

$$\binom{10}{3,2,2,1,1,1} = \frac{10!}{3!\,2!\,2!\,\cancel{1!}\,\cancel{1!}\,\cancel{1!}}$$

DIMOSTRAZIONE PER INDUZIONE

E' una tecnica dimostrativa per provare che una certa affermazione $P(n)$ (dipendente da $n \in \mathbb{N}$) è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si basa su due passi:

1) $P(0)$ è vera (oppure $P(1)$ è vera)

2) passo induttivo:
Supponendo vera $P(n)$, si dimostra che è vera $P(n+1)$.

Allora $P(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

<u>Esempio:</u> Proviamo che $\forall n \in \mathbb{N}_+$ si ha

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \boxed{P(n)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k$$

Per es. $1+2+3+\ldots+100 = \frac{100 \cdot 101}{2} = 101 \cdot 50 = 5050$

1) $P(1)$ è vera? $\quad 1 \overset{?}{=} \frac{1 \cdot 2}{2}$ ok!

2) Supponiamo $P(n)$ vera.
Proviamo che $P(n+1)$ è vera.

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+n}_{=\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + n+1 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$\Updownarrow$ divido per $n+1$

$$\frac{n}{2} + 1 \overset{?}{=} \frac{n+2}{2} \qquad \text{ok!}$$

Altro esempio:

$$\boxed{1+4+9+16+25+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}} \quad P(n)$$

1) $P(1)$ è vero?

$$1 \overset{?}{=} \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} \qquad \text{ok!}$$

2) Supponiamo $P(n)$ vera.
Mostriamo che è vera anche $P(n+1)$

$$\underbrace{1+4+9+\dots+n^2}_{\overset{\shortparallel}{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}}+(n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

per l'ipotesi induttiva

$\Updownarrow$

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \overset{?}{=} \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$\Updownarrow$ divido per $(n+1)$
e moltiplico per 6.

$$n(2n+1) + 6(n+1) \overset{?}{=} (n+2)(2n+3)$$

$$\cancel{2n^2} + \cancel{n} + \cancel{6n} + \cancel{6} \stackrel{?}{=} \cancel{2n^2} + \cancel{3n} + \cancel{4n} + \cancel{6}$$

OK.

Quindi $P(n)$ è vera $\forall n$.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio per casa: provare che

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

- Sono dimostrazioni abbastanza facili (normalmente)
- Non sono costruttive (non si capisce perché l'affermazione è vera)

Proviamo che $1+2+3+\dots+100 = \frac{100 \cdot 101}{2}$

in un modo che spiega il motivo.

$$1+2+3+\dots \; \_ \; \_ \; \_ \; \_ \; \_ + 98 + 99 + 100$$

$$\underbrace{(1+100)}_{101} + \underbrace{(2+99)}_{101} + \underbrace{(3+98)}_{101} + \dots + \underbrace{(50+51)}_{101} = \frac{101 \cdot 100}{2}$$

Questa dim. (costruttiva) si può ripetere per tutti gli n pari.

Cosa succede se n è dispari.

Per es.

$0+1+2+3+ \dots +101 =$

$$= \underbrace{(0+101)}_{101} + \underbrace{(1+100)}_{101} + \underbrace{(2+99)}_{101} + \dots + \underbrace{(50+51)}_{101} = 101 \cdot \frac{102}{2}$$

Quindi il risultato è vero anche per gli n dispari.

Proviamo la seguente <u>disuguaglianza di Bernoulli</u>.

$$\boxed{(1+x)^n \geq 1+nx \qquad \forall x \geq -1} \qquad P(n)$$

Voglio provare che è vera $\forall n \in \mathbb{N}$.

$P(0)$ è vero? $\qquad (1+x)^0 \overset{?}{\geq} 1+0\,x$

$$1 \overset{?}{\geq} 1 \qquad \text{OK.}$$

$P(1)$ è vera? $\qquad (1+x)^1 \geq 1+x \qquad$ OK.

Supponiamo $P(n)$ vera, proviamo $P(n+1)$.

$$(1+x)^{n+1} \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x \qquad \forall x \geq -1.$$

$$\| $$

$$\underbrace{(1+x)^n}_{\substack{\text{VI} \\ 1+nx}} \underbrace{(1+x)}_{\substack{\text{VI} \\ 0}} \geq (1+nx)(1+x)$$

per ipotesi induttiva

Mi basterà provare che $(1+nx)(1+x) \overset{?}{\geq} 1+(n+1)x$

$$\cancel{1} + \cancel{x} + \cancel{nx} + nx^2 \overset{?}{\geq} \cancel{1} + \cancel{nx} + \cancel{x}$$

$$nx^2 \overset{?}{\geq} 0 \qquad \text{vero!}$$